

**Travaux dirigés d'Electricité 1**  
**SMP/SMC/SMA/SMI**  
**Série 2**

---

**I-** Un anneau fin de rayon  $R$  porte une densité linéique de charges  $\lambda$  qui varie avec l'angle des coordonnées polaires  $\theta$  selon la loi  $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$ .  $\lambda_0$  une constante positive.

Calculer le potentiel et le champ au centre de l'anneau.

**II- 1-** Calculer le champ et le potentiel créés, en tout point  $M$  de l'espace, par une distribution volumique de charges, de densité uniforme  $\rho$ , contenue entre deux sphères concentriques de rayon  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ).

**2-** Tracer les courbes  $E(r)$  et  $V(r)$  avec  $r = OM$ .  $E$  et  $V$  sont-ils continus ?

**3-** Retrouver les valeurs de  $E$  et  $V$  si  $R_1$  tend vers  $R_2$ .  $E$  et  $V$  reste-ils continus ?

**III-** Un dipôle électrique de moment dipolaire  $\vec{p} = qai\hat{i}$  est constitué de deux charges ponctuelle  $-q$  et  $+q$  placées dans le vide aux points  $A$  et  $B$  de l'axe  $OX$  de part et d'autre de  $O$ . La distance  $AB = a$ .  
Un point  $M$  éloigné des charges est repéré par ses coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ .

**1-** Calculer  $V(M)$ .

**2-** En déduire le module et l'orientation du champ électrostatique au point  $M$ .

Le dipôle est maintenant placé dans un champ extérieur uniforme  $E_0$  orienté suivant l'axe  $OX$ . Le potentiel de ce champ est nul à l'origine  $O$

**3-** Donner l'expression du potentiel électrostatique au point  $M$ .

**4-** Quelles sont les surfaces équipotentielles  $V = 0$

**Travaux dirigés d'Electricité 1**  
**SMP/SMC/SMA/SMI**  
**Série 2 - Solution**

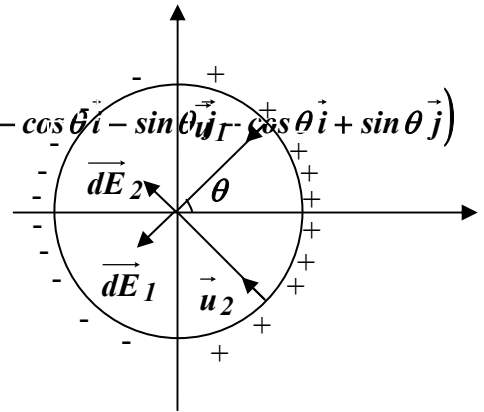
I- Remarquons d'abord que les charges sont concentrées autour de  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  et qu'il y a absence de charge à  $\theta = \pm \pi/2$ . On peut chercher le champ et le potentiel en un point quelconque de l'axe  $OZ$  et les appliquer au centre. En plus le cosinus est positif quand  $0 < \theta < \pi/2$  et il est négatif quand  $\pi/2 < \theta < \pi$

$$\vec{dE} = \vec{dE}_1 + \vec{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \vec{u}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \vec{u}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} (-\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j} + \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$$

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} (-2\cos\theta \vec{i}) = \frac{-2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2} \cos\theta \vec{i}$$

=>  $\vec{E}$  est porté par  $OX$  et il est opposé à  $\vec{i}$

$dl = R d\theta$ , la seule variable dans cette expression est  $\theta$ .



$$\vec{E} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta \vec{i} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \vec{i} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \left[ \frac{2\theta + \sin 2\theta}{4} \right]_0^\pi \vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \frac{\pi}{2} \vec{i} \quad \text{Soit} \quad \vec{E} = \frac{-\lambda_0}{4\epsilon_0} \frac{1}{R} \vec{i}$$

En M le potentiel crée par une charge élémentaire  $dq = \lambda dl$  est :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 \cos\theta R d\theta}{R^2} \quad \text{soit} \quad V = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0$$

En  $O$ , le potentiel des charges plus compense celui des charges négatives de sorte que le potentiel total soit nul.

**N.B :** expliquez aux étudiants que l'on ne peut pas utiliser ici la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$

II- 1- En un point  $M$  de l'espace le champ est radial et il est constant sur tous les points ayant la même distance  $r$  de  $O$ .  $\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_v \rho dv$   $S$  étant la surface de Gauss et  $v$  le volume chargé inclus dans  $S$ .

► Si  $r > R_2$ ,  $E 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)$  soit  $E = \frac{\rho (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \Leftrightarrow V = -\int E dr = \frac{\rho (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}$ , la constante d'intégration est nulle car  $V(\infty) = 0$

► Si  $R_2 > r > R_1$ ,  $E 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3)$  soit  $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(r^3 - R_1^3)}{r^2}$

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \Leftrightarrow V = -\int E dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} \right) + C_1$

► Si  $r < R_1$ , absence de charge dans la surface fermée,  $E = 0$ .  $V = C_2$ .

### Détermination de $C_1$ et $C_2$

Quand  $M$  est à la distance  $R_1$  de  $O$  :  $\lim_{r \rightarrow R_1^+} V(r) = \lim_{r \rightarrow R_1^-} V(r)$ . Soit  $C_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_1} \right) + C_1$

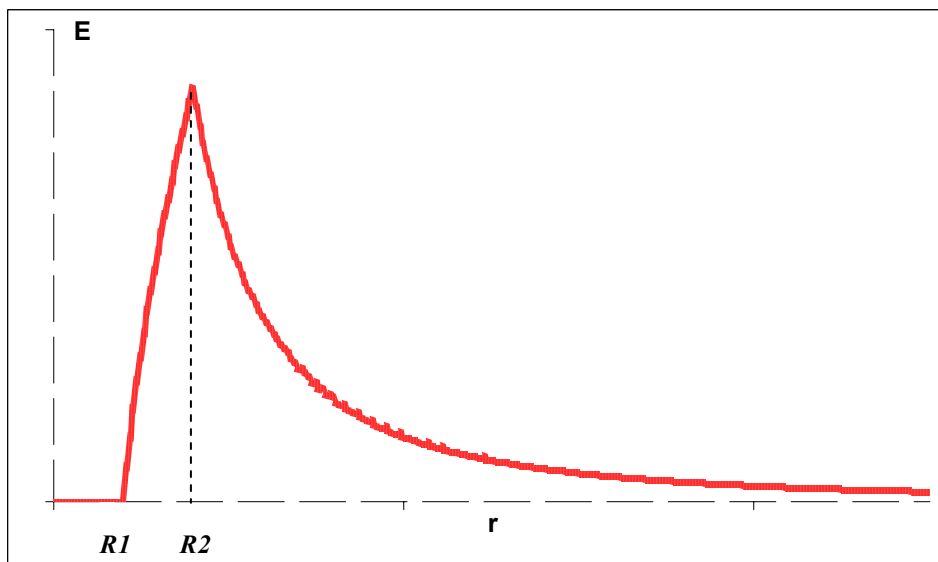
A la distance  $R_2$  de  $O$  :  $\lim_{r \rightarrow R_2^+} V(r) = \lim_{r \rightarrow R_2^-} V(r)$ . Soit  $-\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2} \right) + C_1 = \frac{\rho (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{R_2}$

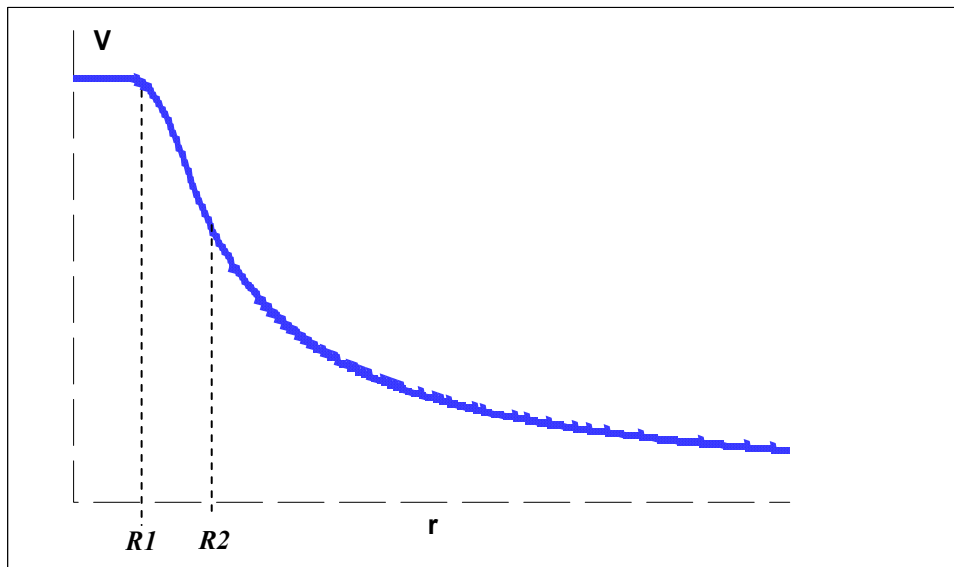
$\Rightarrow C_1 = \frac{3}{2} \frac{\rho}{3\epsilon_0} R_2^2$  et donc  $C_2 = \frac{3}{2} \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$

On regroupe les résultats dans le tableau :

$r > R_2$	$E = \frac{\rho (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$	$V = \frac{\rho (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}$
$R_2 > r > R_1$	$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(r^3 - R_1^3)}{r^2}$	$V = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{3R_2^2}{2} - \frac{r^3 + 2R_1^3}{2r} \right)$
$r < R_1$	$E = 0$	$V = \frac{3}{2} \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$

2-





Le champ et le potentiel sont des fonctions continues à la traversée d'un volume chargé.

3- Si  $R_1$  tend vers  $R_2$ , on obtient une seule sphère chargée en surface de distribution :  $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$

Deux cas uniquement sont possibles  $r < R$  et  $r > R$ . On peut appliquer le théorème de Gauss ou directement remplacer  $\rho$  par son expression en fonction de la charge.

$r > R$	$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$	$V = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r}$
$r < R$	$E = 0$	$V = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$

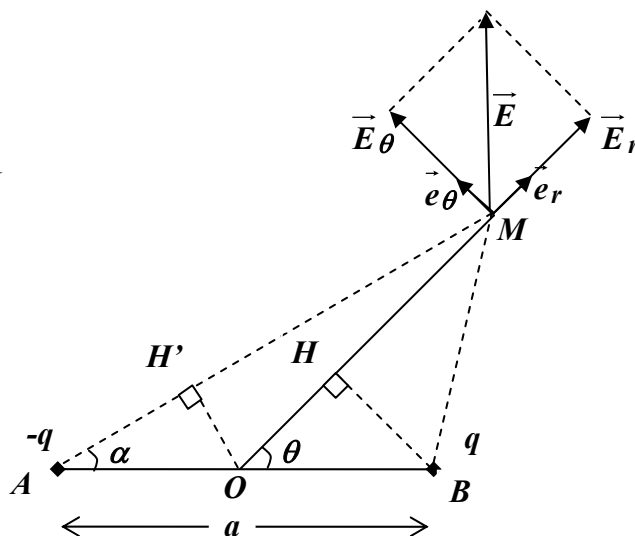
### III/ 1-

$$r = OM = OH + HM$$

$$r_1 = AM = AH' + H'M$$

$$r_2 = BM$$

$$r \gg a \Rightarrow \theta \approx \alpha$$



$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

$$r_1 = AH' + H'M \approx \frac{a}{2} \cos \alpha + r \quad \text{et} \quad r = OH + HM \approx \frac{a}{2} \cos \theta + r_2$$

$$\text{On en déduit : } r_1 - r_2 \approx a \cos \theta \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = r^2 - \frac{a^2}{4} \cos^2 \theta \approx r^2$$

$$\text{Soit : } V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2}$$

$$2- \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \sin \theta}{r^3}$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sqrt{4a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$$

$$\text{L'orientation du champ peu être définie par l'angle } \varphi \text{ que fait } \vec{E} \text{ avec } \vec{OM} : \text{tg } \varphi = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \text{tg } \theta$$

3- Le nouveau potentiel est la somme du potentiel du dipôle et du potentiel extérieur issu de  $E_0$ .

$$V'(M) = V(M) + V_0.$$

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{i} \quad \text{et la relation } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \text{ donnent : } V_0 = -\int E_0 dx = -E_0 x + Cte$$

A l'origine  $V_0(O) = 0 \Rightarrow Cte = 0$ , d'où  $V_0 = -E_0 x$ . avec  $x = r \cos \theta$ .

$$V_{\text{Total}}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2} - E_0 r \cos \theta$$

$$4- V_{\text{Total}} = 0 \Rightarrow \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r^2} - E_0 r \right) \cos \theta = 0$$

$\Rightarrow \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r^2} - E_0 r \right) = 0$  et dans ce cas  $r = \sqrt[3]{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{E_0}}$ , ce qui définit une sphère de rayon  $r$  et de centre  $O$  comme surface équipotentielle.

Ou  $\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$ , ce qui définit le plan médiateur  $OY$  comme surface équipotentielle.