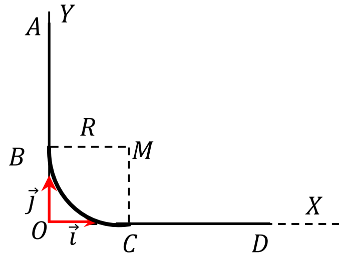
Série de TD 03

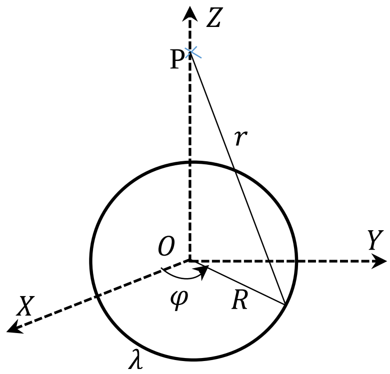
Exercice 01:



Soit un fil non conducteur chargé uniformément avec une densité linéique λ positive, formé par trois segments. Un fil semi-infini AB allongé suivant l'axe OY. Un quart de cercle BC de rayon R et enfin un fil semi-infini CD allongé suivant l'axe OX.
1- Déterminer les deux composantes du champ électrique crées par le fil au point $M(R, R)$

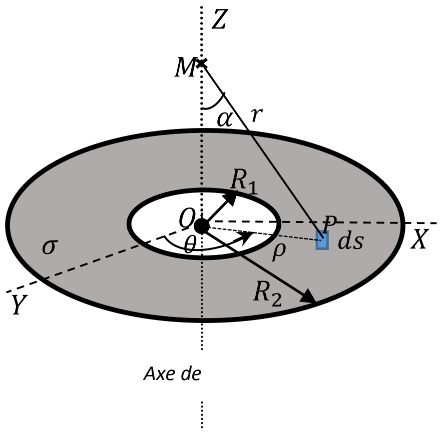
2- Trouver l'expression du potentiel au point $M(R, R)$, à une constante près.

Exercice 02:



Une charge linéaire ($\lambda > 0$) est répartieuniformément sur un fil en forme d'anneau de rayon R . (figure ci-dessous).
1- Déterminer le champ électrique produit par le fil au point P situé sur l'axe Oz à une distance z du
centre O .
2- Trouver le potentiel électrique produit au point P par deux méthodes.
3- Déterminer par le calcul le point pour lequel le champ électrique est maximal.

Exercice 03:



Soit un disque percé de centre O et de rayon intérieur R_1 et extérieure R_2 chargé uniformément avec la densité surfacique uniforme σ positive.

(a) Représenter le champ élémentaire $d\vec{E}(M)$ créé par une charge élémentaire dq du disque en un point M situé sur l'axe de révolution du disque ainsi que le champ total $\vec{E}(M)$ au point M.

(b) Calculer les champs $d\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M)$.

(c) En utilisant la circulation du champ $\vec{E}(M)$, Calculer le potentiel électrostatique au même point M.

(d) Calculer $\vec{E}_1(M) = \lim\limits_{R_1 \to +\infty} \vec{E}(M)$ et $\vec{E}_2(M) = \lim\limits_{\substack{R \to +\infty \\ r \to 0}} \vec{E}_1(M)$.

Exercices Supplémentaires

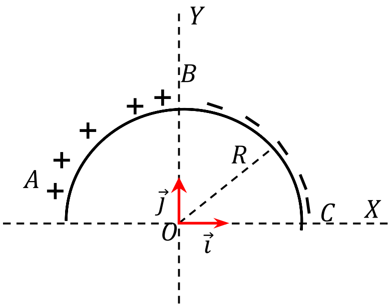
Exercice S1
Considérons deux plans infinis. Le premier plan est chargé positivement avec une densité surfacique $(+\sigma)$ et le second plan est chargé négativement avec une densité surfacique $(-\sigma)$.
1- Déterminer le champ électrique crée par les deux plans en un point M quelconque de l'espace dans les cas suivant :

- Les deux plans sont parallèles et séparés par une distance d;
- Les deux plans son perpendiculaires.

Que devienne l'expression du champ si les deux plans sont chargés de la même charge.
2- Répéter la question 1 pour le cas de deux fils infinis. Le premier plan est chargé positivement avec une densité linéique $(+\lambda)$ et le second plan est chargé négativement avec une densité linéique $(-\lambda)$.

Exercice S2 :

Considérons un fil non conducteur AC, sous forme d'un demi-cercle de rayon R,
chargé uniformément avec une densité linéique λ positive sur le segment AB et négative $-\lambda$ sur le segment BC (Figure ci-contre).



1- Déterminer le champ électrique crée par le fil au point O.

2- Trouver le potentiel électrique au point O par deux méthodes.

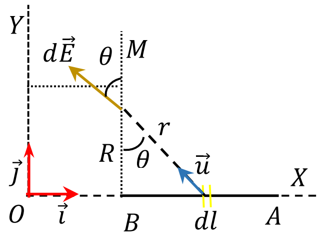
3- on place une charge $q > 0$ au point O, trouver la force électrique qu'elle subit et son énergie potentielle.

Corrigé

Exercice 01

1- Le champ électrique total $\vec{E}\,(M)$ au point M est la contribution des trois champs électriques $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ et $\vec{E}_3$ créés par les segments de fil AB, BC et CD respectivement.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$



a. Calcul du champ électrique $\vec{E}_1$ du segment AB

Soit un élément de longueur dl d'ordonnée x porte une charge élémentaire charge élémentaire dq, génère un champ électrique $d\vec{E}_1$ au point M donnée par la relation:

$$d\vec{E}_1 = \frac{kdq}{r^2}\vec{u}_1$$

On a $dq = \lambda dl = \lambda dx$

$$\vec{u}_1 = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow d\vec{E}_1 = \begin{cases} dE_x = -dE_1\sin\theta = \dfrac{k\lambda\sin\theta\,dx}{r^2} \\ dE_y = dE_1\cos\theta = -\dfrac{k\lambda\cos\theta\,dx}{r^2} \end{cases}$$

On exprime tout en fonction de téta (θ):

$$\cos\theta = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{\cos\theta}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{R} \Rightarrow x = R\operatorname{tg}\theta \Rightarrow dx = \frac{R}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

Donc

$$\Rightarrow \begin{cases} dE_x = -dE\sin\theta = -\dfrac{k\lambda dx}{r^2}\sin\theta = -\dfrac{k\lambda\dfrac{R}{\cos^2\theta}\,d\theta}{\left(\dfrac{R}{\cos\theta}\right)^2}\sin\theta = -\dfrac{k\lambda}{R}\sin\theta\,d\theta \\ dE_y = dE\cos\theta = -\dfrac{k\lambda dx}{r^2}\cos\theta = \dfrac{k\lambda\dfrac{R}{\cos^2\theta}\,d\theta}{\left(\dfrac{R}{\cos\theta}\right)^2}\cos\theta = \dfrac{k\lambda}{R}\cos\theta\,d\theta \end{cases}$$

En intégrant entre 0 et $\pi/2$:

$$E_x = \int_0^{\pi/2} -\frac{k\lambda}{R}\sin\theta\,d\theta = \frac{k\lambda}{R}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -\frac{k\lambda}{R}$$

$$E_y = -\int_0^{\pi/2} \frac{k\lambda dy}{R^2}\cos\theta\,d\theta = \frac{k\lambda}{R}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{k\lambda}{R}$$

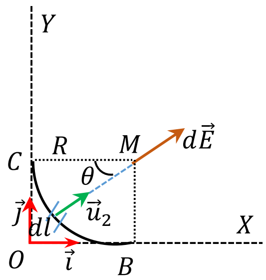
$$\vec{E}_1 = \frac{k\lambda}{R}(-\,\vec{i} + \vec{j})$$

b. Calcul du champ électrique $\vec{E}_2$ du segment BC

Soit un élément de longueur dl de segment BC. Cet élément porte une charge élémentaire dq, génère un champ électrique $d\vec{E}_2$ au point M donnée par la relation :

$d\vec{E}_2 = \frac{kdq}{r^2}\vec{u}_2$

On a $r = R$ et $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$



$\vec{u}_2 = \cos\theta\, \vec{\imath} + \sin\theta\, \vec{\jmath}$

$$\Rightarrow d\vec{E}_2 = \begin{cases} dE_x = dE_2 \cos\theta = \frac{k\lambda R \cos\theta d\theta}{R^2} = \frac{k\lambda \cos\theta d\theta}{R} \\ dE_y = dE_2 \sin\theta = \frac{k\lambda R \sin\theta d\theta}{R^2} = \frac{k\lambda \sin\theta d\theta}{R} \end{cases}$$

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} E_x = \int dE_2 \cos\theta = \frac{k\lambda}{R}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = \frac{k\lambda}{R} \sin\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{k\lambda}{R} \\ E_y = \int dE_2 \sin\theta = \frac{k\lambda}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta = \frac{k\lambda}{R} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{k\lambda}{R} \end{cases}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{k\lambda}{R}\,\vec{\imath} + \frac{k\lambda}{R}\,\vec{\jmath} = \frac{k\lambda}{R}\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right)$$

c. Calcul du champ électrique $\vec{E}_3$ du segment CD

Les segment CD et AB sont symétriques par rapport à l'axe $y = x$ (la premier bissectrices)

Donc, les champs électriques $\vec{E}_3$ et $\vec{E}_1$ sont aussi symétriques par rapport à l'axe $y = x$ $(\vec{\imath} \to -\vec{\imath}; \vec{\jmath} \to -\vec{\jmath})$:

$$\vec{E}_3 = \frac{k\lambda}{R}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

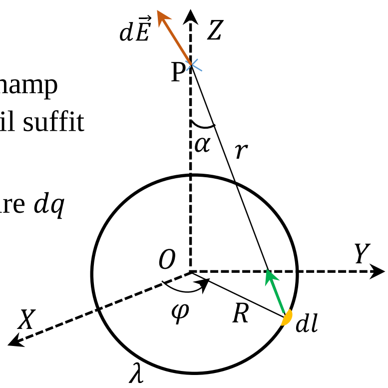
<u>**N.B.**</u> Il est aussi possible de calculer par la méthode directe (il suffit de refaire les mêmes étapes utilisées pour calculer $\vec{E}_1$).

$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{k\lambda}{R}(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + \frac{k\lambda}{R}\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right) + \frac{k\lambda}{R}(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = \frac{k\lambda}{R}\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right)$

2. Calcul du potentiel électrostatique au point M

$dV(M) = -\vec{E}.d\vec{l} = -\frac{k\lambda}{R}\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right).\left(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}\right) = -\frac{2k\lambda}{R}(dx + dy) \to V(M) = -\int \frac{2k\lambda}{R}dx - \int \frac{2k\lambda}{R}dy = -\frac{2k\lambda}{R}x - \frac{2k\lambda}{R}y + C$

Exercice 02 :



1. Le problème présente une symétrie axiale autour de l'axe OZ ; la résultante du champ électrique au point P sera suivant l'axe OZ, par conséquence, $E_x = E_y = 0$. Donc, il suffit de calculer la composantes dE_z

Le champ électrique élémentaire $d\vec{E}\,(P)$ produit au point P par la charge élémentaire dq du fil est :

$$d\vec{E}(P) = \frac{kdq}{r^2}\vec{u}$$

$$dE_z = dE\cos\alpha$$

$$dE = \frac{kdq}{r^2}$$

On a : $r^2 = R^2 + z^2$; $\cos\alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$; $dq = \lambda dl = \lambda R d\varphi$

$$dE_z = \frac{k\lambda R d\varphi}{R^2 + z^2}\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{k\lambda R z d\varphi}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{k\lambda Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi k\lambda Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(P) = E_z\vec{k} = \frac{2\pi k\lambda Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$$

2. Calcul du potentiel :

a. Par calcul :

Le potentiel électrique élémentaire dV produit au point p par la charge élémentaire dq du fil est donné par:

$$dV = \frac{kdq}{r}$$

On a : $r = \sqrt{R^2+z^2}$; $dq = \lambda dl = \lambda R d\varphi$

$$dV = \frac{k\lambda R d\varphi}{\sqrt{R^2+z^2}} \to V = \frac{k\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi k\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

b. Directement depuis l'expression du champ électrique :

$$dV = -\vec{E}.d\vec{l} = -\frac{2\pi k\lambda Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}.\left(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}\right) = -\frac{2\pi k\lambda Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}dz \to V = -\int \frac{2\pi k\lambda Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}dz$$

On pose $u = R^2+z^2 \to du = 2zdz$

$$V = -\pi k\lambda R\int\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \pi k\lambda R\frac{2}{\sqrt{u}} = \frac{2\pi k\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}} + C$$

Si on considère $V = 0\ lorsque\ z \to \infty, \to C = 0,$ donc, $V = \frac{2\pi k\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}$

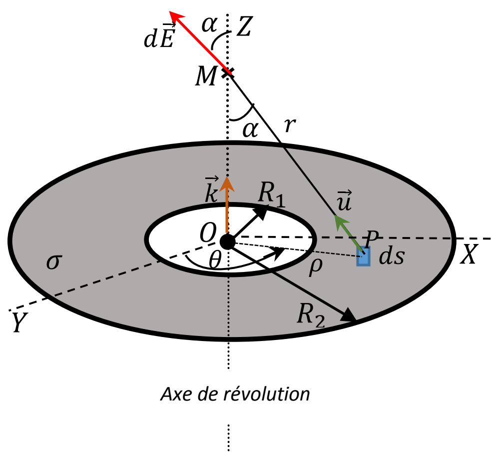
3. $\vec{E}$ est maximal $\frac{d\vec{E}}{dz} = 0$

$$\frac{d\vec{E}}{dz} = \frac{d\left(\frac{2\pi k\lambda Rz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{dz} = \frac{2\pi k\lambda R(R^2-2z^2)}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \to R^2-2z^2 = 0 \to z = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}$$

Exercice 03:

(a) Voire la figure.

(b) Le disque ayant une symétrie axiale d'axe $\overrightarrow{z'z}$, le champ en M de cote z peut s'écrire $\vec{E}(z) = E(z)\vec{k}$. Un élément de surface ds en un point P$p(\rho,\theta)$ du disque, produit alors en M à distance r, le champ électrique élémentaire $d\vec{E}(M) = \frac{kdq}{r^2}\vec{u}$, dont seule la composante selon $\overrightarrow{z'z}$ est à prendre en considération. Le vecteur $\vec{u}$ étant l'unitaire qui point vers M depuis P en faisant un angle α avec $\overrightarrow{z'z}$.



$$dE_Z = dE(M)\cos\alpha = \frac{kdq}{r^2}\cos\alpha$$

On a $dq = \sigma ds;\ r^2 = z^2+\rho^2;\ \cos\alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}}$

$$dE_Z = \frac{k\sigma ds}{z^2+\rho^2}\frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}}$$

Avec, $ds = \rho d\rho d\theta$

$$dE_Z = \frac{k\sigma z\rho d\rho d\theta}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} \rightarrow E_Z = k\sigma z\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho d\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\theta = \pi k\sigma z\int_{R_1}^{R_2}\frac{2\rho d\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}$$

On pose $X = \rho^2 + z^2 \rightarrow dX = 2\rho d\rho$

$$E_Z = \pi k\sigma z\int_{R_1}^{R_2}\frac{dX}{X^{3/2}}$$

Etant donné la primitive de $X^{-3/2}$égale a $-2X^{-1/2}$

$$E_Z = 2\pi k\sigma z\left[-X^{-1/2}\right]_{R_1}^{R_2} = 2\pi k\sigma z\left[-\frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\right]_{R_1}^{R_2} = 2\pi k\sigma z\left[\frac{1}{\sqrt{z^2+{R_1}^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+{R_2}^2}}\right]$$

$$\vec{E}(M) = 2\pi k\sigma z\left[\frac{1}{\sqrt{z^2+{R_1}^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+{R_2}^2}}\right]\vec{k}$$

(c) Le potentiel

$$dV(M) = -\vec{E}.d\vec{l} = -2\pi k\sigma z\left[\frac{1}{\sqrt{z^2+{R_1}^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+{R_2}^2}}\right]\vec{k}.\left(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}\right)$$

$$= 2\pi k\sigma\left[\frac{1}{\sqrt{z^2+{R_2}^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+{R_1}^2}}\right]zdz$$

$$V(M) = -\int\vec{E}.d\vec{l} = 2\pi k\sigma\left[\int\frac{zdz}{\sqrt{z^2+{R_2}^2}}-\int\frac{zdz}{\sqrt{z^2+{R_1}^2}}\right]$$

$$V(M) = 2\pi k\sigma\left[\sqrt{z^2+{R_2}^2}-\sqrt{z^2+{R_1}^2}\right]+C$$

(d) Calcul du champ pour le cas $R_2 \rightarrow +\infty$ et pour $R_2 \rightarrow +\infty; R_1 \rightarrow 0$

$$\vec{E}_1(M) = \lim_{R_2\rightarrow+\infty}\vec{E}(M) = \lim_{R_2\rightarrow+\infty}2\pi k\sigma z\left[\frac{1}{\sqrt{z^2+{R_1}^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+{R_2}^2}}\right]\vec{k} = \frac{2\pi k\sigma z}{\sqrt{z^2+{R_1}^2}}\vec{k}$$

$$\vec{E}_2(M) = \lim_{\substack{R_2\rightarrow+\infty\\R_1\rightarrow0}}\vec{E}(M) = \lim_{\substack{R_2\rightarrow+\infty\\R_1\rightarrow0}}2\pi k\sigma z\left[\frac{1}{\sqrt{z^2+{R_1}^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+{R_2}^2}}\right]\vec{k} = \frac{2\pi k\sigma z}{|Z|}\vec{k}$$