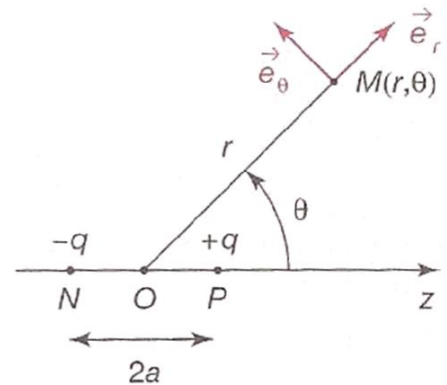


**Travaux dirigés de l'électrostatique & magnétostatique / Filière SMPC/session II**  
**Série N° 2 : dipôle électrique, Conducteurs et énergie électrostatique**

**Exercice N°1: savoir étudier une distribution dipolaire**

Considérons le dipôle électrostatique de moment dipolaire  $\vec{p}$ . On suppose  $r \gg a$  avec  $\|\vec{NP}\| = 2a$ . Le dipôle est supposé rigide.

1- Justifier que l'étude peut se faire dans le plan polaire repéré par les vecteurs de base  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$ . Donner la valeur de la composante du champ électrostatique (créé par le dipôle) portée par un vecteur unitaire perpendiculaire au plan d'étude.



2- Déterminer, à l'ordre le plus bas en  $\frac{a}{r}$ , l'expression du potentiel électrostatique créé au point  $M(r, \theta)$  par le dipôle.

3- Montrer que le champ peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} [3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}]$$

**Application en chimie.**

Considérons la molécule du méthanal  $\text{CH}_2\text{O}$  avec  $\widehat{HCH} = 116^\circ$ . Le moment dipolaire de la liaison C - H vaut **0,4 D** (debye) et celui de la liaison C = O vaut **2,30 D**. On rappelle  $1\text{D} \approx 1/3 \times 10^{-29} \text{C.m.}$

1- Quelle est la valeur théorique du moment dipolaire de cette molécule.

2- On place en  $M(r, \theta)$  un ion positif noté  $I^+$  portant une charge  $+Q = +e$ . Quelle est l'énergie potentielle de l'ion dans le centre du dipôle ?

3- Quelle est l'énergie potentielle du dipôle rigide dans le champ créé par l'ion  $I^+$  ? Si l'on suppose l'ion fixe et le dipôle mobile, quel est le mouvement du dipôle dans ces conditions ?

**Correction de l'exercice N°1**

1- La distribution est invariante par rotation autour de l'axe Oz. En coordonnées sphériques ( $r, \theta, \varphi$ ), cela signifie que le champ et potentiel ne dépendent pas de  $\varphi$ . On se place dans tout plan méridien ( $\varphi = \text{cste}$ ) et on utilise les coordonnées polaires ( $r, \theta$ ).

De plus, tout plan contenant l'axe  $(O, e_\varphi)$  est un plan de symétrie de la distribution  $\Rightarrow$  le champ électrique est contenu dans ce plan  $\Rightarrow \vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta$  et  $E_\varphi = 0$

$$\Rightarrow \vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta$$

2- Le potentiel créé au point  $M(r, \theta)$  par le dipôle s'écrit :

$$V(M) = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 PM} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 NM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right)$$

Or (Cf. cours) !

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a}{r} \cos\theta \right)$$

$$\frac{1}{NM} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{2a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{a}{r} \cos\theta \right)$$

$$\Rightarrow V(M) = \frac{q(2a)\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{avec} \quad \vec{p} = 2a q \vec{e}_z$$

3- Le champ se déduit de la relation  $\vec{E} = -\text{grad} V$

En coordonnées polaires :

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad ; \quad E_\theta = -\frac{dV}{d\theta} = \frac{psin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta)$$

Calculons :  $3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p} = 3p\cos\theta \vec{e}_r - p(\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta)$  avec  $\vec{e}_z = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta$

$$\Rightarrow 3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p} = p(2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta)$$

D'où : 
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}]$$

### Application en chimie

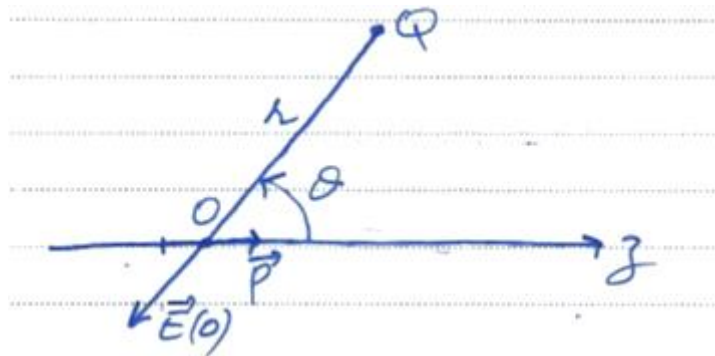
1- Les liaisons  $C^{\delta-} \leftarrow H^{\delta+}$  et  $C^{\delta+} \Rightarrow O^{\delta-}$  sont polarisées  $\Rightarrow$  le moment dipolaire résultant est :  $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = p_{CO} + 2p_{CH} \cos \frac{116^\circ}{2}$  AN :  $p = 2.72 \text{ D}$

2- L'énergie potentielle de l'ion ( $Q = +e$ ) placé dans le champ de la molécule polaire

$$E_p = QV(r, \theta) = \frac{Qp\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

3- L'ion  $I^+$  crée au point O un champ :  $\vec{E}(0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (-\vec{e}_r)$

L'énergie potentielle du dipôle dans le champ extérieur est :  $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}(0) = \frac{Qp\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$



$\Rightarrow$  Le dipole s'oriente selon le champ  $(-\vec{e}_r)$ , puis se déplace vers les champs plus intenses, c'est-à-dire se rapproche de la charge Q.

### Exercice N°2

1- Soit une sphère conductrice  $S_1$  de rayon  $R_1$  portée au potentiel  $V_1$ .

Calculer la charge  $q_1$  portée par cette sphère.

2- On isole  $S_1$  de la source de potentiel  $V_1$  après l'avoir chargé puis on la relie à la sphère conductrice  $S_2$  de rayon  $R_2$  initialement neutre par un fil conducteur très long.

a- Calculer la charge portée par chaque sphère.

b- Calculer le champ électrique au voisinage de chaque sphère.

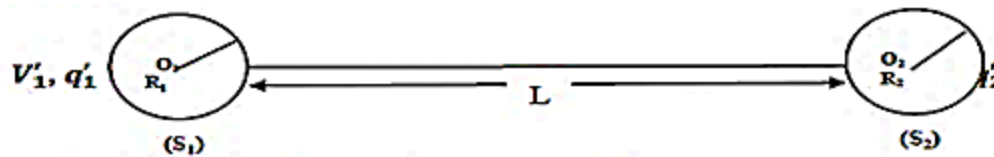
c- Donner l'énergie de l'ensemble avant et après connexion.

### Correction de l'exercice N°2

I/ La charge  $q_1$  de  $S_1$  :

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \Rightarrow q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V_1$$

II/ a/ La charge portée par chaque sphère :  
Après connexion :



Le système est isolé, alors la charge totale se conserve d'où :

$$\boxed{q_1 = q_1' + q_2'} \dots\dots\dots(1)$$

On va avoir un nouveau état d'équilibre du système ( $S_1, S_2$ ) pour lequel la charge totale  $q_1$  se répartit sur les deux sphères  $S_1$  et  $S_2$  qui possèdent le même potentiel  $V_1' = V_2'$

$$V_1' = \frac{q_1'}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2'}{4\pi\epsilon_0 L} \quad \text{pour } S_1$$

$$V_2' = \frac{q_2'}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_1'}{4\pi\epsilon_0 L} \quad \text{pour } S_2$$

Mais  $L \gg R_1$  et  $R_2$  d'où :

$$V_1' = V_2' \Leftrightarrow \frac{q_1'}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q_2'}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Leftrightarrow q_2' = q_1' \frac{R_2}{R_1} \dots\dots\dots(2)$$

De (1) et (2) on trouve :

$$\boxed{q_1' = \frac{q_1 R_1}{R_1 + R_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{q_2' = \frac{q_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

b/ Le champ électrique aux voisinage de chaque sphère :

$$(S_1) \dots\dots\dots E_1 = \frac{q_1'}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1 (R_1 + R_2)}$$

$$(S_2) \dots\dots\dots E_2 = \frac{q_2'}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2 (R_1 + R_2)}$$

c/ L'énergie du l'ensemble avant et après connexion :

❖ Avant connexion :

$$W_1 = \frac{1}{2} q_1 V_1 = \frac{1}{2} q_1 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_1 = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0 R_1}}$$

❖ Après connexion :

$$W_2 = \frac{1}{2} q_1' V_1' + \frac{1}{2} q_2' V_2' \quad \text{or } V_1' = V_2'$$

$$\Rightarrow W_2 = \frac{1}{2} V_1' (q_1' + q_2') = \frac{1}{2} q_1 V_1' = \frac{1}{2} q_1 \frac{q_1'}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{1}{2} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \left( \frac{q_1 R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{W_2 = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)}}$$

Par comparaison, on constate que  $W_2 < W_1 \Rightarrow$  l'énergie après connexion a diminué  $\Leftrightarrow$  l'énergie qui manque a été dissipée sous forme de chaleur (effet Joule) lors de la connexion.

### Exercice N°3

1- Une sphère conductrice pleine  $S_1$  de centre O, de rayon  $R_1$  porte une charge  $Q_1 > 0$ . Une seconde sphère conductrice  $S_2$  creuse de rayon intérieur  $R_2 > R_1$  et de rayon extérieur  $R_3$  porte une charge  $Q_2 > 0$ . On place  $S_1$  à l'intérieur de  $S_2$  ; de telle sorte que les sphères soient concentriques. On

note respectivement  $S_{2int}$  et  $S_{2ext}$  les surfaces interne et externe de  $S_2$ , et  $Q'_1$ ,  $Q'_2$  et  $Q'_3$  les charges de  $S_1$ ,  $S_{2int}$  et  $S_{2ext}$ .

Donner en justifiant, la répartition des charges sur les surfaces de  $S_1$  et  $S_2$  en fonction de  $Q_1$  et  $Q_2$ .

Calculer le potentiel  $V'_1$  de  $S_1$ .

2-  $S_1$  étant toujours à l'intérieur de  $S_2$  on les relie par un fil conducteur de capacité négligeable.

Donner la nouvelle répartition de charges  $Q''_1$ ,  $Q''_2$  et  $Q''_3$  sur les surfaces  $S_1$ ,  $S_{2int}$  et  $S_{2ext}$ . et calculer le nouveau potentiel  $V''_1$  de  $S_1$ .

3-  $S_1$  étant à l'intérieur de  $S_2$ , on supprime la liaison entre les deux sphères et on relie  $S_1$  au sol, et  $S_2$  au potentiel  $V_2$ .

a- Indiquer à l'aide d'un schéma la répartition des charges sur les surfaces des sphères. Justifier votre réponse. On note  $Q'''_1$ ,  $Q'''_2$  et  $Q'''_3$  les charges de  $S_1$ ,  $S_{2int}$  et  $S_{2ext}$ .

b- Calculer le champ et le potentiel électrostatique en tout point M situé entre  $S_1$  et  $S_2$  et repérer par sa distance  $r = OM$  au centre commun O des deux sphères.

c- En déduire en fonction de  $V_2$  les charges  $Q'''_1$ ,  $Q'''_2$  et  $Q'''_3$ .

4- On isole  $S_1$  du sol, (étant toujours à l'intérieur de  $S_2$ ) elle porte une charge  $Q > 0$ ; et on relie  $S_2$  au sol.

a- Donner la nouvelle répartition des charges sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  et exprimer le champ  $\vec{E}$  entre  $S_1$  et  $S_2$ .

b- Calculer le potentiel  $V_1$  de  $S_1$  et en déduire la capacité C du condensateur sphérique ainsi formé. Calculer en fonction de Q, R et  $\epsilon_0$  l'énergie électrostatique  $W_e$  de ce condensateur.

c- Au moyen de la densité d'énergie  $\frac{dW_e}{dv} = \epsilon_0 \frac{E^2}{2}$  retrouver l'expression précédente de W.

### Correction de l'exercice N°3

Exercice :

1) Répartition de charges  $S_1$  et  $S_2$  :

\*  $S_1$  isolée; conserve sa charge initiale

$$\Rightarrow Q'_1 = Q_1$$

$$* S_2 \begin{cases} \bullet S_{2int}: \text{influence totale avec } S_1 \\ \text{theo de élim corresp} \Rightarrow Q'_2 = -Q'_1 = -Q_1 \\ \bullet S_{2ext}: Q'_2 + Q'_3 = Q_2 \end{cases}$$

$S_2$  isolée conserve sa charge initiale  $Q_2$ :

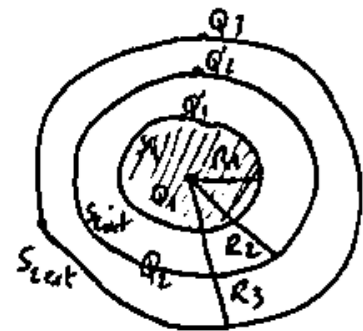
$$\Rightarrow Q'_3 = Q_2 + Q_1$$

• Potentiel de  $S_1$  :  $V'_1$  :

$V'_1$  potentiel au centre O :

$$V'_1 = V(0) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$\text{donc } V'_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} - \frac{Q_1}{R_2} + \frac{Q_1 + Q_2}{R_3} \right)$$



2) La nouvelle répartition de charges:

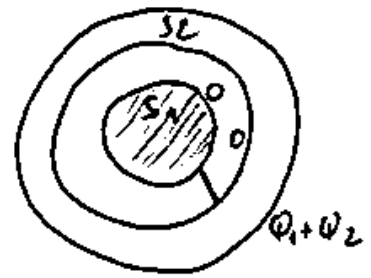
$S_1$  et  $S_2$  reliées, forment un même conducteur avec cavité vide de charge.

$\Rightarrow$  les charges se placent sur la surface externe:

$$\Rightarrow Q_1'' = 0 ; Q_2'' = 0 \text{ et } Q_3'' = Q_1 + Q_2$$

• Potentiel  $V_1''$ :

$$V(S_1) = V(S_2) = V_1'' \Leftrightarrow V_1'' = V(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1 + Q_2}{R_3} \right)$$



3) a) Répartition de charges:

On a  $V_2 > V_1 = 0 \Rightarrow$  les lignes de champ sont dirigées

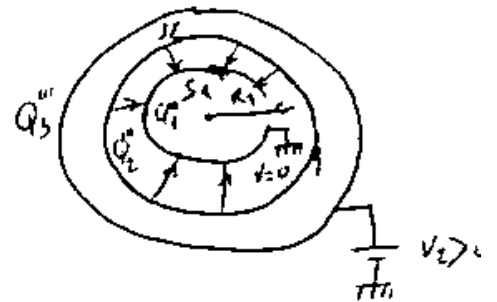
vers la potentiels décroissant c-à-d vers  $S_1$ :

$\Rightarrow S_1$  porte une charge négative

$$\Rightarrow Q_1''' = -q \text{ avec } q > 0.$$

$S_2$  et  $S_1$  sont en influence totale  $\Rightarrow Q_2''' = q$

$$\text{et } S_2 \text{ est } \Rightarrow Q_3'''$$



b) Champ et potentiel entre  $S_1$  et  $S_2$ :  $R_1 < r < R_2$

On a une symétrie sphérique  $\Rightarrow \vec{E} = E_r \vec{e}_r$

$$\vec{E} = \frac{Q_1'''}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \vec{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$E(r) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

• Potentiel:  $\vec{E} = -\text{grad } V = E_r \vec{e}_r$

$$\Rightarrow E(r) = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V(r) = -\int E(r) dr$$

$$\Rightarrow V(r) = -\int \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1$$

calcul de  $C_1$ : on a  $V_1 = V(R_1) = 0$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

$$\text{donc } V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right)$$

$$c) \text{ On a } V_2 = V(R_2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\Rightarrow q = \frac{4\pi\epsilon_0 R_2 R_1 V_2}{(R_2 - R_1)} > 0 \Rightarrow \Phi_1''' = -q \text{ et } \Phi_2''' = +q$$

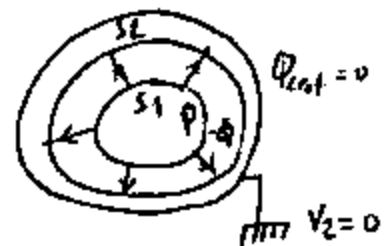
$$\text{On a } V_{r>R_3}(r) = \frac{\Phi_3'''}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow V(R_3) = V_2 = \frac{\Phi_3'''}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$\Rightarrow \Phi_3''' = 4\pi\epsilon_0 R_3 V_2$$

4) a) Répartition des charges :

$$S_1 \Rightarrow Q > 0$$

$$S_2 \Rightarrow \begin{cases} S_{2\text{int}} \Rightarrow \Phi_{2\text{int}} = -Q \\ S_{2\text{ext}} \Rightarrow \Phi_{2\text{ext}} = 0 \end{cases}$$



\* le champ  $\vec{E}$  entre  $S_1$  et  $S_2$  :

$$\text{the de Gauss } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$b) \cdot V_1 = V_{|1|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} \right) \Rightarrow V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

$$\cdot \text{Capacité : } Q = C (V_1 - V_2) = C V_1 \text{ avec } V_2 = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_1} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Rightarrow C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$\cdot \text{Energie : } W_e = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2) \text{ avec } V_2 = 0$$

$$W_e = \frac{1}{2} Q V_1 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} Q^2 \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

$$\text{d'où } W_e = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} Q^2 \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

c) La densité d'énergie:

$$\frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \iff W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint E^2 dV$$

$dV$  en coordonnées sphériques:  $dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$

$$\text{donc } W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0 r^2)^2}$$

$$\implies W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} 4\pi r^2 \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0 r^2)^2} dr$$

$$\implies W_e = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \implies W_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\text{donc } W_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1 R_2} (R_2 - R_1)$$

### Exercice N°4 : Propriétés des condensateurs plans

La capacité  $C$  d'un condensateur est définie par  $Q = CU = C(V_1 - V_2)$  où  $Q$  désigne la charge,  $V_1$  le potentiel de l'armature positive et  $V_2$  le potentiel de l'armature négative.

**Capacité d'un condensateur plan.**

1- Calculer la capacité d'un condensateur plan dont les armatures sont deux plans infinis parallèles distants de  $e$  séparés par de l'air.

On considère la capacité pour deux surfaces identiques  $S$  en regard.

La permittivité de l'air sera prise égale à la permittivité du vide et notée  $\epsilon_0$ .

Application numérique :  $e = 0,5\text{mm}$ ,  $S = 25\text{cm}^2$ ,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ SI}$

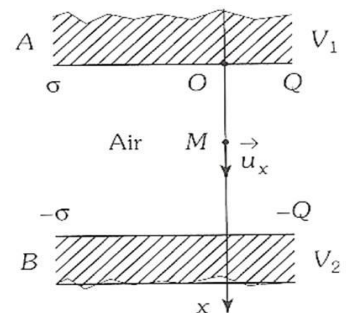
**Influence d'un diélectrique sur la capacité d'un condensateur plan.**

2- Entre les armatures du condensateur précédent, on place une lame diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$  et d'épaisseur  $d$ , parallèlement aux armatures.

Calculer la capacité du condensateur en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_r$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $S$ . Envisager le cas où  $d = e$ .

Application numérique : le diélectrique est du titanate de Baryum et sa permittivité relative vaut 1200.

Calculer  $C$  dans le cas où :  $d = e = 0,5\text{mm}$ ,  $S = 25\text{cm}^2$ .



### Correction de l'exercice N°4: Propriétés des condensateurs plans

1- l'application du théorème de Gauss à une surface cylindrique dans l'une des bases se situe dans le conducteur A ( $\vec{E}_{int} = \vec{0}$ ) et l'autre base à l'abscisse  $x$  donne :

$$\phi = E(x)S_{base} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

Sa circulation de A à B conduit à la capacité :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow V_A - V_B = V_1 - V_2 = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\sigma S}{\sigma e / \epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 S}{e} \quad \text{AN} \quad C_0 = 44.2 \text{ pF}$$

2- Nous avons désormais trois conducteurs en série de capacités respectives :

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{e_1} \quad ; \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{e_2} \quad ; \quad C_3 = \frac{\epsilon_0 S}{e_3}$$

Avec  $e_1 + d + e_3 = e$

La capacité équivalente se déduit de :

$$\frac{1}{C} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) + \frac{1}{C_2} = \frac{e_1 + e_3}{\epsilon_0 S} + \frac{d}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{e-d}{\epsilon_0 S} + \frac{d}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{1}{\epsilon_0 S} \left( e - d + \frac{d}{\epsilon_r} \right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{e - d \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)}$$

Dans le cas où  $d = e$  (tout le diélectrique remplit l'espace entre les armatures), on trouve :

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e} = \epsilon_0 C_0 \quad \text{AN} \quad C = 53 \text{ nF}$$

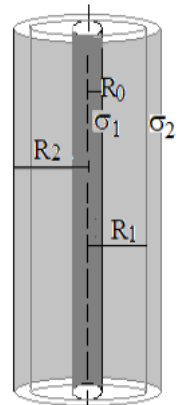
\* Remarque : l'intérêt des diélectriques est donc d'augmenter fortement la capacité des condensateurs !

### Exercice N°5

On considère une charge de densité  $\sigma$  uniformément répartie sur la surface d'un cylindre conducteur infini, creux, de rayons interne  $R_1$  et externe  $R_2$ .

1- Par application du théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique créé par cette charge en tout point  $M$  situé à une distance  $r$  de l'axe du cylindre.

2- On introduit, à l'intérieur de ce cylindre, un fil métallique de rayon  $R_0$ , infiniment long, concentrique du cylindre (figure ci-contre). Le système ainsi constitué correspond à un condensateur cylindrique dont l'armature interne est le fil métallique de rayon  $R_0$  (conducteur 1) et l'armature externe est le conducteur cylindrique creux de rayons interne  $R_1$  et externe  $R_2$  (conducteur 2).



a- Initialement, avant l'introduction du fil à l'intérieur du cylindre, le fil porte une charge uniforme de densité surfacique  $\sigma_1$  et le cylindre porte une charge uniforme de densité surfacique  $\sigma_2$ . Exprimer les charges  $Q_1$  et  $Q_2$  initialement portées par le fil métallique de rayon  $R_0$  et le cylindre, sur une hauteur  $h$ , en fonction de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , respectivement.

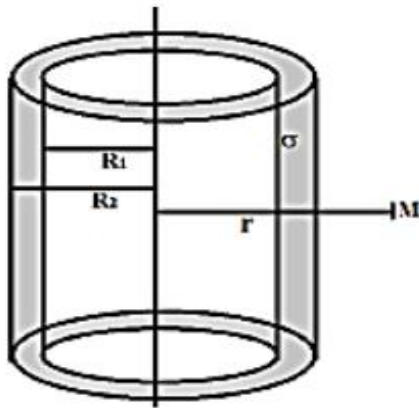
b- En examinant l'influence, exprimer les charges  $Q_{2i}$  et  $Q_{2e}$  des surfaces interne et externe du conducteur 2, sur une hauteur  $h$ , en fonction des charges  $Q_1$  et  $Q_2$ .

3-a- En négligeant les effets de bords, calculer le champ électrostatique créé par ce système en un point  $M$  situé à une distance  $r$  de l'axe dans les cas suivants :  $R_0 < r < R_1$  et  $r > R_2$ .

b- En déduire  $V_1 - V_2$  ( $V_1$  et  $V_2$  étant les potentiels respectifs des conducteurs 1 et 2).

4- Le conducteur 2 est relié à la terre. Déterminer le coefficient de capacité  $C_{11}$  et le coefficient d'influence  $C_{21}$ . Que représente  $C_{11}$ ?

### Correction de l'exercice N°5



1°) Par raison de symétrie cylindrique,  $S_G = \text{cylindre}(r, h, z'z)$ ,  $\vec{E}$  est suivant  $\vec{e}_r$  et  $E$  ne dépend que de  $r$ ;  $E(r)$ .

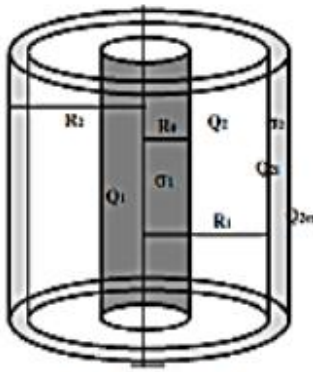
Le flux est nul sur les deux surfaces de base car  $\vec{E} \perp d\vec{S}$ , alors que sur la surface latérale  $S_1$   $\vec{E} // d\vec{S}$  et  $E(r)$  est constant, donc

$$\iint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_G} E dS = E \iint_{S_1} dS = ES_1 = E2\pi rh$$

$$\text{Or } \iint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\text{Pour } r < R_1, \Sigma Q_{in} = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$\text{Pour } r > R_2 \Rightarrow E2\pi rh = \frac{\sigma}{\epsilon_0} 2\pi R_2 h \Rightarrow E = \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0 r}$$



2°) a/  $Q = \sigma S$

$Q_1 = \sigma_1 2\pi R_0 h$  et  $Q_2 = \sigma_2 2\pi R_2 h$  (toute la charge initiale était sur la surface externe).

b/  $Q_{2in}$  et  $Q_{2ex}$  en fonction  $Q_1$  et  $Q_2$

$Q_{2in} + Q_{2ex} = Q_2$  conservation de la charge

Influence totale entre  $S_0$  et  $S_1$ :  $Q_{2in} = -Q_1 = -\sigma_1 2\pi R_0 h$

$Q_{2ex} = Q_2 - Q_{2in} \Rightarrow Q_{2ex} = Q_2 + Q_1 = \sigma_1 2\pi R_0 h + \sigma_2 2\pi R_2 h$

3°) a/ Pour  $R_0 < r < R_1 \Rightarrow$

$$E2\pi rh = \frac{\Sigma Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 r h} = \frac{\sigma_1 R_0}{\epsilon_0 r}$$

Pour  $r > R_2 \Rightarrow$

$$E2\pi rh = \frac{\Sigma Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi \epsilon_0 h} \cdot \frac{1}{r} = \frac{Q_{2ex}}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\sigma_1 R_0 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\text{b/ } \vec{E} = -\text{grad}V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 h} \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr}{r} \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 h} \text{Log}\left(\frac{R_1}{R_0}\right)$$

4°) a/ Condensateur 2 à la terre  $\Rightarrow V_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} Q'_1 = C_{11} V_1 \text{ avec: } Q'_1 = Q_1 \\ Q'_2 = C_{21} V_1 \text{ avec: } Q'_2 = Q_{2in} \end{cases}$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 h} \text{Log}\left(\frac{R_1}{R_0}\right) \Rightarrow C_{11} = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\text{Log}\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \text{ et } C_{21} = \frac{Q_{2in}}{V_1} = \frac{-Q_1}{V_1} = -\frac{2\pi \epsilon_0 h}{\text{Log}\left(\frac{R_1}{R_0}\right)}$$

$$= -C_{11}$$

$C_{11}$ : Représente la capacité du condensateur