Travaux dirigés de l'électrostatique & magnétostatique / Filière SMPC/Session II

Série N° 2 : Champ et potentiel électrostatiques

Exercice N°1

Aux sommets d'un carré ABCD de côté $a = 2\,m$, sont placées les charges suivantes : $q_A = +2\,.\,10^{-8}\,C\,;\,q_B = -8\,.\,10^{-8}\,C\,;\,q_C = +2\,.\,10^{-8}\,C;\,q_D = +4\,.\,10^{-8}\,C.$

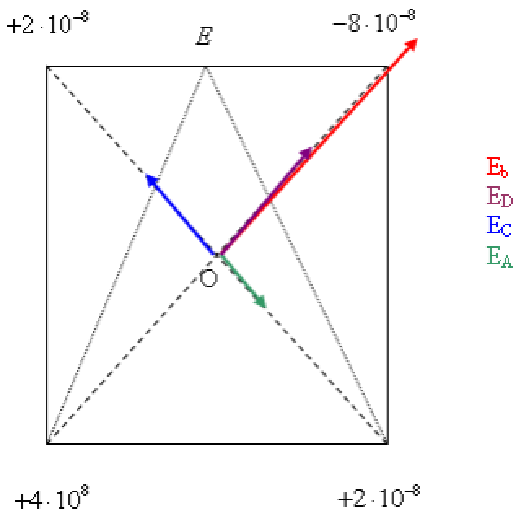
1- Calculez le champ électrique et le potentiel au centre du carré O.

2- Calculez le potentiel en E point milieu de AB.

3- Calculez le moment dipolaire de la distribution

Correction de l'exercice N°1

1- Représentons tout d'abord le tout sur un dessin :



Considérons le point O comme étant négatif (c'est pour tracer les vecteurs du champ électrique). Notons que le prendre positif n'aurait en rien changer la réponse sauf que la direction du vecteur résultant aurait été opposée.

Etant donné que les charges sont égales en A et C et que leur distance au point O sont égales, le champ électrique résultant de ces deux charges en O est nul. (les deux vecteurs étant dans des directions opposées.

Il nous reste donc les champs électriques de B et D qui sont dans la même direction car une charge étant positive et l'autre négative (un repousse et l'autre attire dans la même direction).

Il suffit alors de faire la somme de ces deux vecteurs pour obtenir le vecteurs champ électrique totale agissant sur le point O. Et de plus, comme la charge en B est égale à deux fois celle de B, nous pouvons dire que la somme des deux champs électriques est égale au triple de celui créé par la charge située en D.

$$\|\overrightarrow{E_O}\| = \|\overrightarrow{E_B}\| + \|\overrightarrow{E_D}\| = 3\,\|\overrightarrow{E_D}\|$$

$$\|\overrightarrow{E_O}\| = 3\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4.\,10^{-8}}{(\sqrt{2})^2}$$

$$\|\overrightarrow{E_O}\| = 540\;V/m$$

Concernant le potentiel, nous savons que :

$$V(O) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$$

$$V(O) = \frac{10^{-8}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

2- Nous allons faire de même qu'au point précédent :

$$V(O) = \frac{10^{-8}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{1} - \frac{8}{1} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}}\right) = -298.5\,V$$

3. Considérons les axes $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ étant dirigé respectivement de O à C et de O à B.

De plus nous savons que :

$$\vec{P} = \sum_i q_i \overrightarrow{R_i}$$

$$\vec{P} = 10^{-8}\left[2.(-\sqrt{2})\overrightarrow{e_x} - 8.\sqrt{2}\overrightarrow{e_y} + 2.\sqrt{2}\overrightarrow{e_x} + 4.(-\sqrt{2})\overrightarrow{e_x}\right]$$

$$\vec{P} = 10^{-8}.(-12.\sqrt{2}\overrightarrow{e_y})$$

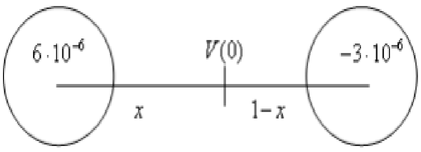
$$\vec{P} = -16{,}97.10^{-8}\overrightarrow{e_y}\ C.m$$

Exercice N°2

Deux sphères métalliques de de rayon $r = 4\,cm$; distantes de 1 m et portent respectivement une charge de $6.10^{-6}C$ et $-3.10^{-6}C$. En quel point de la droite joignant ces deux charges le potentiel est-il nul ? Quelles sont la valeur et la direction du champ électrique en ce point ?

Correction de l'exercice N°2

Faisons un schéma représentant le problème :



$$V(O) = \frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{6}{x} - \frac{3}{1-x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{6}{x} - \frac{3}{1-x} = 0$$

$$9x = 6 \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2}{3}\,m$$

Le potentiel est donc nul à 66 [cm] de la première sphère. En sachant cela, nous pouvons calculer alors le champ électrique en ce point :

$$\|\vec{E}\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{6.10^{-6}}{(0.66)^2} - \frac{3.10^{-6}}{(0.34)^2}\right) = 3.84.10^5\ V/m$$

Exercice N°3

Nous assimilons le noyau d'uranium à une boule de rayon a, de centre O et de charge Q uniformément répartie avec la densité volumique ϱ.

On admet que la permittivité à l'intérieur, comme à l'extérieur du noyau, est $\varepsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}\ m^{-3}.kg^{-1}.s^4.A^2 \approx 8.85 \times 10^{-12}\ SI$.

1- Que vaut la charge totale Q portée par le noyau ${}^{235}_{92}U$.

2- Exprimer ϱ, la densité volumique de charge, en fonction de Q et a.

3- Déterminer la charge q(r) contenue dans une sphère de centre O et de rayon r, prise au sein du noyau.

4- Déterminer la charge dq(r) contenue entre une sphère de rayon r et une sphère r + dr au sein du noyau. Calculer le potentiel au point O, centre du noyau, en fonction de ε_0, Q et a.

Correction de l'exercice N°3

1- Le noyau d'uranium possède q_2 protons de charge +e $\Longrightarrow Q_{totale} = Q = q_2 e$.

2- La charge Q est supposée répartie uniformément dans le volume de la sphère.

$$\Longrightarrow \rho = \frac{Q}{\tau} = \frac{Q}{4/3\pi a^3} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

3- Par simple proportionnalité : $\rho = \frac{Q}{\tau} = \frac{q(r)}{\tau(r)} \quad \Longrightarrow \quad q(r) = Q\frac{r^3}{a^3}$

4-

a- On peut soit calculer directement dq d'après la relation $dq = \rho\, d\tau$, en remarquant que $d\tau = \rho\, 4\pi r^2\, dr$

$$\Longrightarrow dq = \rho\, 4\pi r^2\, dr = \frac{3Qr^2}{a^3}\, dr$$

Soit obtenir ce résultat par différentiation de q(r).

b- Le point O est centre de symétrie de la distribution.

La charge dq comprise entre la sphère de rayon r et la sphère de rayon r + dr crée au point O le potentiel élémentaire suivant :

$$\Longrightarrow dV(0) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \Longrightarrow V(0) = \int_0^a \frac{\rho\, 4\pi r^2\, dr}{4\pi\varepsilon_0\, r}$$

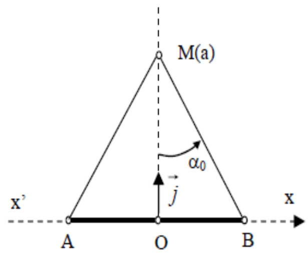
$$\Longrightarrow V(0) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_0^a r\ dr = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0\, a}$$

$$\Longrightarrow V(0) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0\, a}$$

Exercice N°4- Segment de droite uniformément chargé avec la densité linéique

Soit un segment AB uniformément chargé avec une densité linéique $\lambda > 0$.

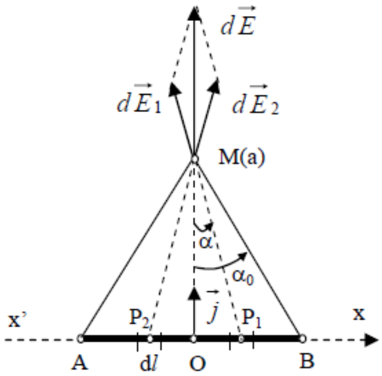
On désigne par O le milieu du segment AB. Calculer le champ *E* crée par cette distribution en tout point M sur une distance a de la médiatrice de AB et en un point M appartenant au segment AB.



Correction de l'exercice N°4- Segment de droite uniformément chargé avec la densité linéique

1- Le point M est sur la médiatrice de AB

Considérons les points A et B sur l'axe x'x tel que l'origine O soit le milieu de AB (figure ci dessous). Deux éléments de charges dq_1 et dq_2, centrés en deux points P_1 et P_2 symétriques par rapport à O, créent en M des champs électrostatiques élémentaires respectivement $d\vec{E_1}$ et $d\vec{E_2}$. La résultante de ces champs est portée par la médiatrice (OM), par exemple l'axe y'y de vecteur $\vec{j}$.



Le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par l'ensemble de la charge portée par le segment AB est donc, par raison de symétrie, dirigé suivant l'axe des y. Soit,

$$d\vec{E_1}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{dx}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}\,cos\alpha\,\vec{j}$$

Si on choisit α comme variable d'intégration, on aura :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0}\frac{cos\alpha}{a}\,d\alpha\,\vec{j}$$

Avec , $tan\alpha = \frac{x}{a}$

$$dx = a(1+tan^2\alpha)d\alpha = \frac{a}{cos^2\alpha}d\alpha$$

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{cos^2\alpha}{a^2}$$

Pour $x = -L,\ \alpha = -\alpha_0$ et pour $x = +L,\ \alpha = +\alpha_0$

Soit,

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}2sin\alpha_0\,\vec{j} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}2\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}\vec{j}$$

Cas limite

- Si le point M est très éloigné de l'origine O (a >> L), on a :

$$sin\alpha_0 = \frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}} \cong \alpha_0 \cong \frac{L}{a}$$

Et donc,

$$\vec{E}(M) = \frac{2\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{j}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par une charge $Q = 2\lambda L$ concentrée en O.

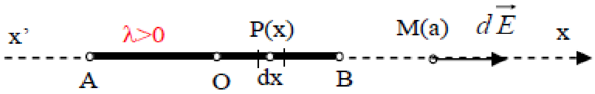
- Si le point M est très proche du segment (L >> a), on a :

$$\alpha_0 \to \frac{\pi}{2} \qquad et \qquad \vec{E}(M) = \frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{j}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par un fil de longueur infinie uniformément chargé.

2) Le point M appartient à (AB)

Un élément de charge $dq = \lambda dx$ centré en P crée en M un champ élémentaire $d\vec{E}$ porté par $\vec{\imath}$ (figure ci-dessous) :



$$d\vec{E_1}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{\imath}}{\|\overrightarrow{PM}\|^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dx}{(a-\ x)^2}\vec{\imath}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{dx}{(a-\ x)^2}\vec{\imath} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{d(a-x)}{(a-\ x)^2}\vec{\imath} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{(a^2-\ x^2)}\vec{\imath}$$

Soit,

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{(a^2-\ x^2)}\vec{\imath}$$

Cas limite

- Si le point M est très éloigné du segment [AB] (a >> L), on a :

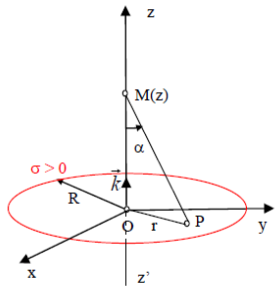
$$\boldsymbol{\vec{E} \cong \frac{2\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{\imath}}$$

Exercice N°5 : Disque uniformément chargé avec la densité superficielle uniforme

Soit un disque de centre O, de rayon R, uniformément chargé avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$. Calculer le champ $\vec{E}$ créé par cette distribution de charges en un point M de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ du disque :

1- A partir du potentiel électrostatique

2- directement

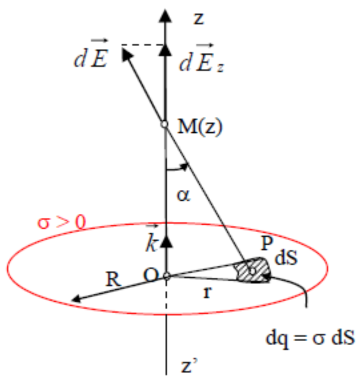


Correction de l'exercice N°5: Disque uniformément chargé avec la densité superficielle uniforme

1- Calcul du champ électrostatique à partir du potentiel

Le potentiel dV(M) crée en un point M(0,0,z) par la charge $dq\ = \sigma\, dS$ entourant le point P (figure ci-dessus) est :

La charge $dq =\ \sigma\, dS$ crée en M le potentiel V(M) s'écrit :



$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\|\overrightarrow{PM}\|} = \frac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon_0\|\overrightarrow{PM}\|}$$

Avec $ds = rdr\, d\theta$ et $\|\overrightarrow{PM}\| = \sqrt{R^2+z^2}$

Ce qui donne $dV(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{rdrd\theta}{\sqrt{R^2+z^2}}$

Le potentiel V(M) est obtenu par intégration sur la surface du disque :

$$V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{rdrd\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2+z^2}\right]_0^R$$

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - \ |z|\right] = V(0,0,z) = V(0,0,-z)$$

Le champ $\vec{E}(M)$ est déduit du potentiel par dérivation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) = -\frac{dV}{dz}\vec{k}$$

Ainsi,

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{k} = \vec{E}(0,0,z) = -\vec{E}(0,0,-z)$$

2- Calcul direct du champ en un point M(0,0,z)

Examinons d'abord la symétrie du problème : la distribution présente une symétrie de révolution autour de $\overrightarrow{z'z}$. Tout plan contenant l'axe $\overrightarrow{z'z}$ est un plan de symétrie paire de la distribution. Donc le champ E en un point M de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ est porté par k :

$$E(M) = E(0,0,z) = E(z)\,k$$

Un élément de charge $dq = \sigma dS$, centré en P (figure ci-dessus), crée en un point M de l'axe du disque un champ élémentaire $d\vec{E}$ donné par :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

$dS = \rho\, d\rho\, d\theta$; $\|\overrightarrow{PM}\| = \sqrt{\rho^2+z^2}$; $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}$

Le disque chargé présente une symétrie de révolution autour de son axe, par exemple l'axe z'z, le champ est alors porté par cet axe. On a :

$$d\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\rho^2+z^2}\vec{u}$$

avec, ρ variable radiale cylindrique

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\rho^2+z^2}\cos\theta\,\vec{u_z} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\rho^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\vec{u_z}$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} z\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta\,\vec{u_z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{u_z}$$

Soit

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{u_z}$$

Loin du disque (z grand), le champ s'affaiblit (figure 14).

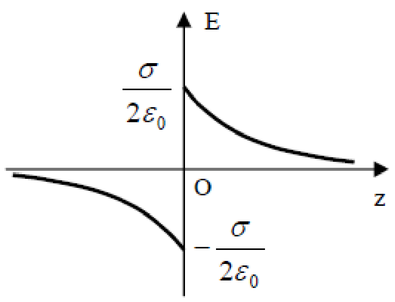
Cas limites

• Si le point M est très éloigné du disque, c'est à dire :

$|z| >> R$, on aura alors :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{\frac{z}{|z|}}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}}\right]\vec{u_z} \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\left[1-\left(1-\frac{R^2}{2z^2}\right)\right]\vec{u_z} \cong$$

$$\frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 z^2}\frac{z}{|z|}\vec{u_z} = \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\frac{z}{|z|}\vec{u_z}$$



C'est l'expression du champ créé en M par une charge $Q = \sigma\pi R^2$ placée en O.

• Si le point M est très proche du disque, c'est à dire $|z| << R$, on aura :

$$\vec{E}(M) \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{u_z}$$

C'est l'expression du champ créé en M par un plan (infini) uniformément chargé :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} \;\; du\ côte\ des\ z\ positifs \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} \;\; du\ côte\ des\ z\ négatifs \end{cases}$$

Conséquence

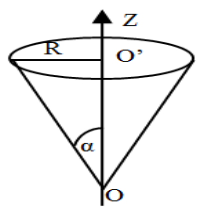
A la traversée du disque, le champ normal au disque subit une discontinuité égale à :

$$E_{z>0} - E_{z<0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Ce résultat est valable pour n'importe quelle distribution de charges en surface, uniforme ou non : si σ est la densité locale d'une distribution surfacique quelconque de charges, il y a en ce point un changement brutal (discontinuité égale à $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$) de la composante du champ électrostatique perpendiculaire à la surface.

Exercice N°6

On considère un disque d'axe OZ, de centre O' et de rayon R.



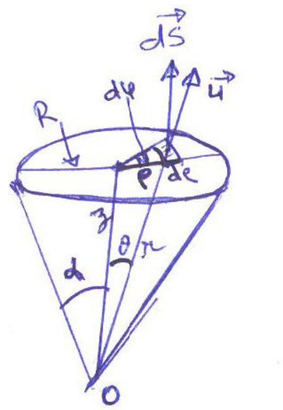
1- Calculer l'angle solide Ω sous lequel on voit le disque à partir du point O en fonction de α. (voir figure)

2- Déduire l'angle solide sous lequel on voit la moitié de l'espace.

3- Déduire l'angle solide sous lequel on voit tout l'espace.

Correction de l'exercice N°6

1- Calcul de l'angle solide Ω sous lequel on voit le disque à partir du point O en fonction de α.



$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS}.\vec{u}}{r^2} = \frac{\rho d\rho d\varphi cos\theta}{r^2}$$

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\rho}{z} \Rightarrow \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{d\rho}{z} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{z}{r}$$

$$\Rightarrow d\Omega = \frac{zsin\,\theta}{cos\theta}.\frac{z\ d\theta}{cos^2\theta}.d\varphi cos\theta.\frac{cos^2\theta}{z^2}$$

$$d\Omega = sin\,\theta d\theta d\varphi \Rightarrow \Omega = \int_0^{\alpha} sin\,\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

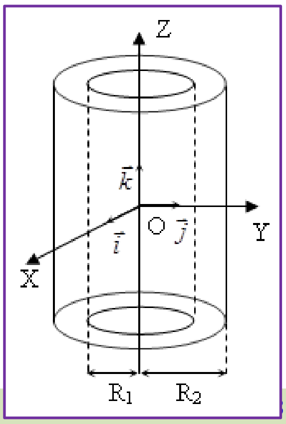
$$\Omega = 2\pi\,(1 - cos\alpha)$$

2- L'angle solide sous lequel on voit la moitié de l'espace $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Omega = 2\pi$

3- L'angle solide sous lequel on voit tout l'espace. $\Rightarrow \alpha = \pi \Rightarrow \Omega = 4\pi$

Exercice N°7

Considérons deux cylindres C_1 et C_2 de même axe OZ, de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) et de hauteur infinie. Les deux cylindres sont chargés uniformément en surface avec les densités surfaciques de charges respectifs σ_1 et σ_2.



1- En utilisant la notion de symétrie de charges, déterminer la direction du champ $\vec{E}(M)$ crée par les deux cylindres en un point M de l'espace.

2- En utilisant la notion des invariances ; montrer que le champ $\vec{E}(M)$ ne dépend que de la distance $r = \|\overrightarrow{OM}\|$?

3- Quelle est la surface de Gauss convenable à cette distribution de charges? Justifiez votre réponse.

4- En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ $\vec{E}$(M) crée par les deux cylindres en tout point M de l'espace.

5- En déduire le potentiel V(M) en tout point M de l'espace. (On prendra comme origine des potentiels (V(0) = 0)).

Correction de l'exercice N°7

1-

La symétrie est cylindrique (r, φ, z) → les plans $\pi(M, \vec{k}, \vec{e_r})$ et $\pi'(M, \vec{e_r}, \vec{e_\varphi})$ sont deux plans de symétrie de la distribution chargé (dans deux cylindres) contenant M.

$$\Rightarrow \vec{E} \subset \pi \cap \pi' \quad \rightarrow \quad \vec{E} \text{ est porté par } \vec{e_r}$$

2-

- Si on fait une translation de la distribution (2 cylindres) suivant l'axe Oz (c-à-d z varie) ; la distribution reste invariante par rapport à M.
- Même chose si on fait une rotation autour de l'axe Oz (c-à-d φ varie) ; la distribution reste invariante par rapport à M.
- Par contre si on fait une translation des 2 cylindres suivant $\vec{e_r}$ (c-à-d r varie) ; alors la distribution de charges change par rapport à M (s'approche ou s'éloigne de M)

$$\Rightarrow E \text{ dépend de r}$$

Donc $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e_r}$

3- la symétrie est cylindrique donc la surface de Gauss la plus adoptée à cette distribution de charges est un cylindre, de même axe que les deux cylindres chargés, de rayon r et de hauteur h.

4- Théorème de Gauss : $\oiint_{surf\ Gauss} \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

- $r < R_1 : d\phi = d\phi_{b.sup} + d\phi_{b.inf} + d\phi_{sup\ Latérale}$

  Base sup : $\overrightarrow{dS} \longrightarrow \vec{k}$ et $\vec{E} \longrightarrow \vec{e_r} \Rightarrow d\phi_{b.sup} = 0$

  Base inf : $\overrightarrow{dS} \longrightarrow -\vec{k}$ et $\vec{E} \longrightarrow \vec{e_r} \Rightarrow d\phi_{b.inf} = 0$

Donc $d\phi = d\phi_{sup\ Latérale} \Rightarrow d\phi = d\phi_{sup\ Latérale} = E.2\pi rh$

$(d\phi_{sup\ Latérale} \rightarrow \vec{e_r}$ $\vec{E} \longrightarrow \vec{e_r})$ sur la surface latérale $E = cste$ $(r = 0)$

$$Q_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = 0$$

- $R_1 < r < R_2$:

$$Q_{int} = \sigma_1 2\pi R_1 h \quad \Rightarrow \quad \vec{E_2} = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,\vec{e_r}$$

- $r > R_2$:

$$Q_{int} = \sigma_1 2\pi R_1 h + \sigma_2 2\pi R_2 h \quad \Rightarrow \quad \vec{E_3} = \left(\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r}\,\vec{e_r}$$

5- Détermination du potentiel V(r)

- $r < R_1$: $\vec{E_1} = -\overrightarrow{grad}\,V_1 = \vec{0} \Rightarrow V_1 = cste = C_1$
- $R_1 < r < R_2$:

$$dV_2 = -\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,dr$$
$$V_2 = -\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\,lnr + C_2$$

- $r > R_2$:

$$dV_3 = -(\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0})\frac{1}{r}\,dr$$
$$V_3 = -(\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0})\,lnr + C_3$$

Détermination des constantes C_1, C_2 et C_3

- $V(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad V_1(0) = C_1 = 0 \qquad \Longrightarrow \quad V_1 = 0$
- Continuité de V en R_1

$$\lim_{\substack{r\to R_1\\ r<R_1}} V_1(r) = \lim_{\substack{r\to R_1\\ r>R_1}} V_2(r) \qquad \Longrightarrow \quad 0 = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\,lnR_1 + C_2$$
$$\Longrightarrow \quad \mathrm{V_2(r)} = -\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_1}{r}\right)$$

- Continuité de V en R_2

$$\lim_{\substack{r\to R_2\\ r<R_2}} V_2(r) = \lim_{\substack{r\to R_2\\ r>R_2}} V_3(r) \qquad \Longrightarrow \quad \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = -(\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0})\,lnR_2 + C_3$$
$$\Longrightarrow \quad C_3 = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + (\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0})\,lnR_2$$
$$V_3(r) = (\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0})\,ln\frac{R_2}{r} + \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Exercice N°8

Considérons deux sphères S_1 et S_2 de même centre O et de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$). La sphère interne S_1 est chargée uniformément en volume avec une densité volumique de charges ρ et la sphère externe S_2 est chargée uniformément en surface avec une densité surfacique de charge σ.

1- En utilisant la symétrie de charges, déterminer la direction du champ $\vec{E}(M)$ créé par les deux sphères en un point M de l'espace ?

2- En utilisant la notion d'invariance, déterminer les variables dont dépend le champ $\vec{E}(M)$.

3- Quelle est la surface de Gauss adaptée à cette distribution de charges ?

4- En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ $\vec{E}(M)$ crée par les deux sphères en tout point M(r) de l'espace.

5- Déterminer le potentiel V(M) en tout point de l'espace. (V (∞)=0).

Correction de l'exercice N°8

1- on a une symétrie sphérique ; donc on va utiliser le système de coordonnées sphériques.

- Le plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ est un plan de symétrie de la distribution de charges considérée ; donc $\vec{E}(M) \in plan\ (M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.
- De même pour le plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\varphi})$; donc :

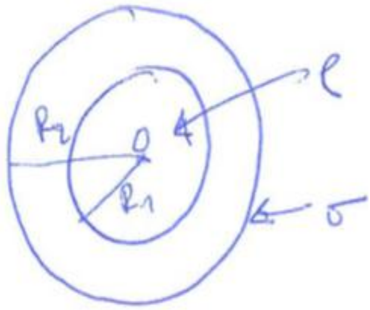
$$\vec{E}(M) \in \cap\ des\ deux\ plans$$
$$\Longrightarrow \vec{E}(M)\ est\ porté\ par\ \vec{e_r}$$

2- Si on fait une rotation des deux sphères suivant θ et φ : la distribution de charges reste inchangée par rapport au point M(r).

- Par contre si fait translation suivant r, la distribution change $\Longrightarrow \vec{E}(M) = E(r)\vec{e_r}$

3- la symétrie est sphérique donc la surface de Gauss adoptée est une sphère de même centre que les deux sphères chargées et de rayon r.

4-



Première cas : $r < R_1$

La surface de Gauss est la sphère de centre O et de rayon r.

Puisque E ne dépend que de r, donc :

$$\forall\ M \in sphère\ de\ Gauss : E(r) = cste$$

$$\oiint_{suf\ Gauss} \vec{E_1}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Q_{int} : Charge totale qui se trouve à l'intérieur de la surface fermée de Gauss.

$\vec{E_1} = E_1(r)\vec{e_r}$; $\vec{dS} = dS\,\vec{e_r}$

$\Longrightarrow \phi = E_1\ 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{\varepsilon_0}\rho$ avec $Q_{int} = \rho\ \frac{4}{3}\pi r^3$

$\Longrightarrow \vec{E_1} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\vec{e_r}$

Deuxième cas : $R_1 < r < R_2$

$\Longrightarrow \phi = E_2\ 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\frac{\pi {R_1}^3}{\varepsilon_0}\rho$ avec $Q_{int} = \rho\ \frac{4}{3}\pi {R_1}^3$

$$\Longrightarrow \vec{E_1} = \frac{\rho {R_1}^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e_r}$$

Troisième cas : $r > R_2$

$\Longrightarrow \phi = E_3\ 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\frac{\pi {R_1}^3}{\varepsilon_0}\rho + \frac{4\pi {R_2}^2}{\varepsilon_0}\sigma$ avec $Q_{int} = \rho\ \frac{4}{3}\pi {R_1}^3 + \sigma\ 4\pi {R_2}^2$

$\Longrightarrow \vec{E_3}(r) = \left(\frac{\rho {R_1}^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma {R_2}^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}\vec{e_r}$

5- Détermination du potentiel V(r)

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \Longrightarrow V = -\int E(r)\,dr$

- Pour $r > R_2 : V_3(r) = \left(\frac{\rho {R_1}^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma {R_2}^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r} + C_3$

Or $V(\infty) = 0 \Longrightarrow C_3 = 0$

$$\Longrightarrow V_3(r) = \left(\frac{\rho {R_1}^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma {R_2}^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r}$$

- $R_1 < r < R_2$ $V_2(r) = \frac{\rho {R_1}^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$

La continuité en $r = R_2$ de V

$$\Longrightarrow V_3(R_2) = V_2(R_2) \Longrightarrow \frac{\rho {R_1}^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} + C_2 = \left(\frac{\rho {R_1}^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma {R_2}^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{R_2}$$

$$C_2 = \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} \qquad V_2(r) = \frac{\rho {R_1}^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$$

- $r < R_1$ $V_1(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r^2 + C_1$

La continuité de V en $r = R_1$

$$\Longrightarrow V_1(R_1) = V_2(R_1) \Longrightarrow C_1 = \frac{1}{2}\frac{\rho {R_1}^2}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$$

$$d'où \qquad V_1(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + \frac{1}{2}\frac{\rho {R_1}^2}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$$