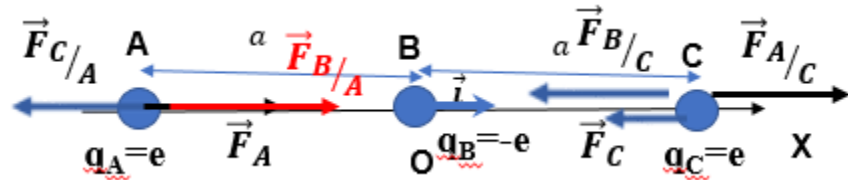


## correction TD electrostatique série 1

### Exercice n°1

1)



Soit  $\vec{F}_A$  la force

qui s'exerce sur  $q_A$  due à  $q_B$  et  $q_C$ .

$\vec{F}_B$  la force qui s'exerce sur  $q_B$  due à  $q_A$  et  $q_C$ .

$\vec{F}_C$  la force qui s'exerce sur  $q_C$  due à  $q_B$  et  $q_A$ .

D'après la loi de Coulomb et le principe de superposition on a :

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{B/A} + \vec{F}_{C/A} = ke \left( \frac{e}{a^2} \vec{i} - \frac{e}{(2a)^2} \vec{i} \right) = \frac{3}{4a^2} ke^2 \vec{i}$$

Sa norme ou module est  $\|\vec{F}_A\| = 1,728 * 10^{-8} N$

$\vec{F}_B = \vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{C/B} = \vec{0}$ , en raison de la symétrie par rapport au point  $O$ .

Et  $\vec{F}_C = \vec{F}_{B/C} + \vec{F}_{A/C} = -\vec{F}_A = -\frac{3}{4a^2} ke^2 \vec{i}$

Sa norme est  $\|\vec{F}_C\| = 1,73 * 10^{-8} N$

2)

Les charges étant ponctuelles, alors leurs potentiels sont :

$$V_A = k \left( -\frac{e}{a} + \frac{e}{2a} \right) = -\frac{ke}{2a}$$

$$V_B = k \left( \frac{e}{a} + \frac{e}{a} \right) = \frac{2ke}{a}$$

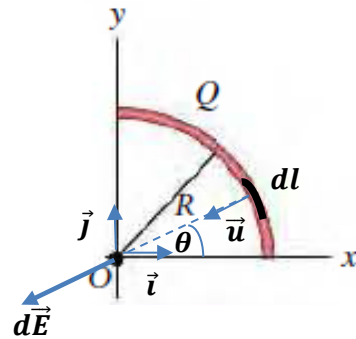
$$V_C = k \left( \frac{e}{2a} - \frac{e}{a} \right) = -\frac{ke}{2a}$$

Donc l'énergie potentielle de système  $U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$

$$U = \frac{1}{2} [q_A V_A + q_B V_B + q_C V_C] = -\frac{3}{2a} ke^2$$

$$U = -3,46 * 10^{-18} J \text{ ou bien } U = -21.6 eV$$

### Exercice n°2



Le champ électrostatique créé par la charge  $dq$  est :

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} \vec{u} \text{ or } dq = \lambda dl \text{ et } dl = R d\theta ; \text{ avec } r=R ; k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Donc

$$d\vec{E} = k \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \vec{u} = k \frac{\lambda d\theta}{R} (-\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j})$$

Le champ total

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{k\lambda}{R} \int_0^{\pi/2} (-\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}) d\theta = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\vec{i} + \vec{j})$$

Le champ en fonction de la charge totale  $Q$

$$\text{On a: } Q = \int dq = \int_0^{\pi/2} \lambda R d\theta = \frac{\lambda R \pi}{2} \rightarrow \lambda = \frac{2Q}{\pi R}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2} (\vec{i} + \vec{j})$$

### Exercice n°3

On fait coïncider l'axe  $Oz$  avec le segment et on se place en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  pour  $M$ .

Soit  $O$  le milieu du segment, on a  $OM=r$ . soit  $P$  un point du segment avec sa cote  $z$  telle que  $-a \leq OP = z \leq a$

On considère un élément de longueur  $dl$  centré en  $P$  et portant la charge  $dq=\lambda dl$ . Il crée en  $M$  le champ élémentaire :

$$d\vec{E}_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

Donc le champ total créé par la distribution s'écrit :

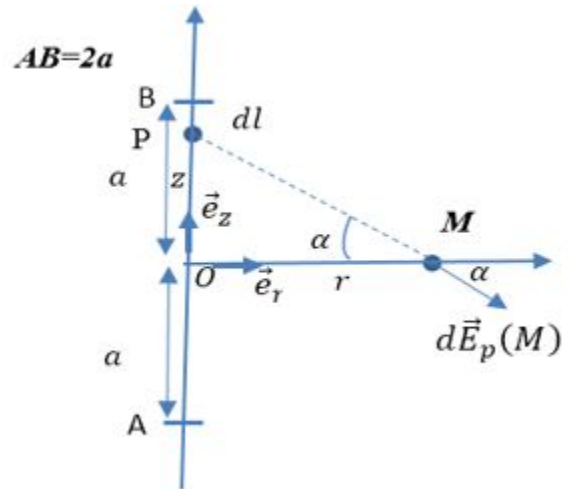
$$\vec{E}(M) = \int_{P \in L} d\vec{E}_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in L} \frac{\lambda dl}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

Ici  $\vec{OP} = z \vec{e}_z$ ,  $dl = dz$  et  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$  d'où

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -z\vec{e}_z + r \vec{e}_r$$

Soit  $PM^2 = z^2 + r^2 \rightarrow PM = \sqrt{z^2 + r^2}$  or  $\vec{u}_{PM} = \frac{\vec{PM}}{PM} = \frac{r \vec{e}_r - z\vec{e}_z}{\sqrt{z^2 + r^2}}$

Finalement :



$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{r \vec{e}_r - z \vec{e}_z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dz$$

Or

$$\int_{-a}^a \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} dz = \left. \frac{-1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right]_{-a}^a = 0$$

et

$$\int_{-a}^a \frac{r}{\sqrt{z^2 + r^2}} dz = \left. \frac{1}{r} \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right]_{-a}^a = \frac{2a}{r\sqrt{a^2 + r^2}}$$

Voir ex 2

On en déduit :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda a}{2\pi r \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \vec{e}_r$$

2)

Dans le cas d'un fil infini c'est-à-dire  $a$  tend vers l'infini ( $a \rightarrow \infty$ )

La valeur du champ est :

$$\vec{E}(M) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\lambda a}{2\pi r \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \vec{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{e}_r$$

### Théorème de Gauss

#### Exercice n°4

1)

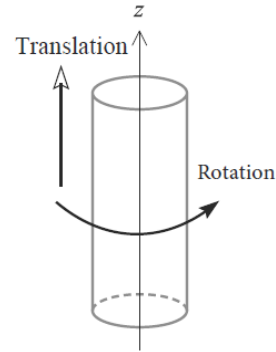
Dans la base cylindrique le vecteur  $\vec{E}(M)$  se décompose en :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

Invariances :

La distribution de charge est invariante par translation selon l'axe (Oz) et par rotation d'un angle  $\theta$  autour de ce même axe, le champ est donc indépendant de coordonnées  $\theta$  et  $Z$ .

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r)$$



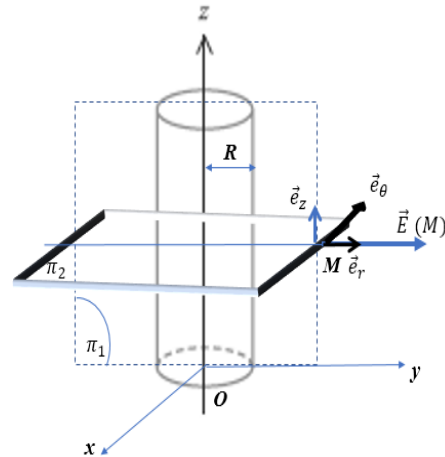
Le plan  $\pi_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  passant par M et OZ est un plan de symétrie donc  $\vec{E}(M)$  est dans ce plan soit ( $E_\theta=0$ ).

Le plan  $\pi_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  passant par M et perpendiculaire à OZ est un plan de symétrie donc  $\vec{E}(M) \in \pi_2$  est dans ce plan soit ( $E_z=0$ ).

Ainsi le champ électrostatique est donc contenu dans l'intersection de ces deux plan  $\vec{E}(M) \in \pi_1 \cap \pi_2$

Finalement le champ est radial (porté par  $\vec{e}_r$ )  $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$

(Pour une densité volumique présentant une symétrie cylindrique on aura : ( $\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$ ))



2)

Flux de champ électrostatique à travers une surface fermée est égale à  $\frac{1}{\epsilon_0}$  fois la charge à l'intérieur de la surface.

$$\Phi_{\vec{E}/s} = \oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

3)

La symétrie est cylindrique. Alors la surface fermée de Gauss sera un cylindre passant par  $M$  de rayon  $r$  et de hauteur arbitraire  $h$ , refermé par deux disques perpendiculaires à  $(OZ)$ .

$$S_G = S_{b_1} + S_{b_2} + S_{Lat}$$

Le flux du champ à travers la surface de Gauss

$$\Phi_{\vec{E}/S_G} = \iint_{n_1 \perp \vec{E}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{b_1} + \iint_{n_2 \perp \vec{E}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{b_2} + \iint_{n_L \parallel \vec{E}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{Lat}$$

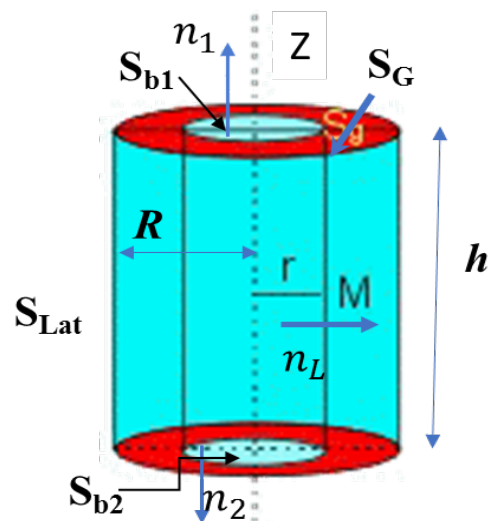
$$ds = r d\theta dz, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq z \leq h$$

$$\Phi_{\vec{E}/S_G} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{Lat} = \iint E dS \cos(0) = ES = E2\pi rh$$

Car  $E$  est radial ne dépend que de  $r$

\* Pour  $r < R$



La charge intérieure à la surface de Gauss est :

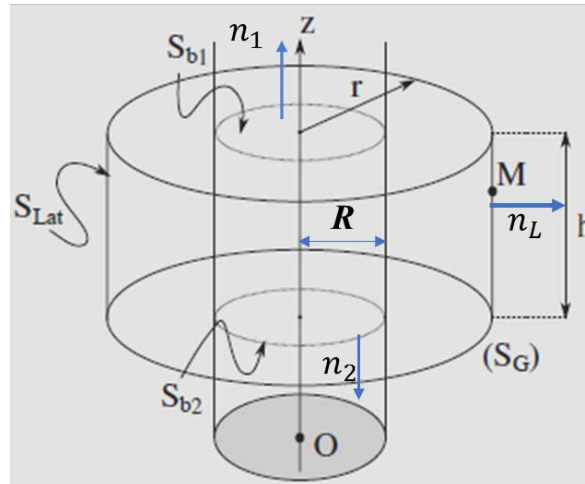
$$Q_{int} = \int dq = \iiint \rho dv = \rho \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \rho \frac{r^2}{2} 2\pi h = \rho r^2 \pi h$$

L'application de Th de Gauss conduit à :

$$\Phi_{\vec{E}/S_G} = E2\pi rh = \frac{\rho r^2 \pi h}{\epsilon_0}$$

$$\text{Soit : } \mathbf{E}(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

\* Pour  $r > R$



$$Q_{int} = \iiint \rho \, dv = \rho \int_0^R r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \rho R^2 \pi h$$

Donc d'après le TH de Gauss :

$$\Phi_{\vec{E}/S_G} = E 2\pi r h = \frac{\rho R^2 \pi h}{\epsilon_0}$$

Soit  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0}$

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0} \vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

On constate que le champ électrostatique est continu en  $r=R$ .

4)

Le potentiel : la relation entre le champ et le potentiel  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$  or  $\vec{E} = E\vec{e}_r \Rightarrow \frac{dV}{dr} \vec{e}_r$

$$\text{Soit } E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E dr$$

\* Pour  $r < R$

$$V(r) = -\int \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + C_1$$

\* Pour  $r > R$

$$V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln r + C_2$$

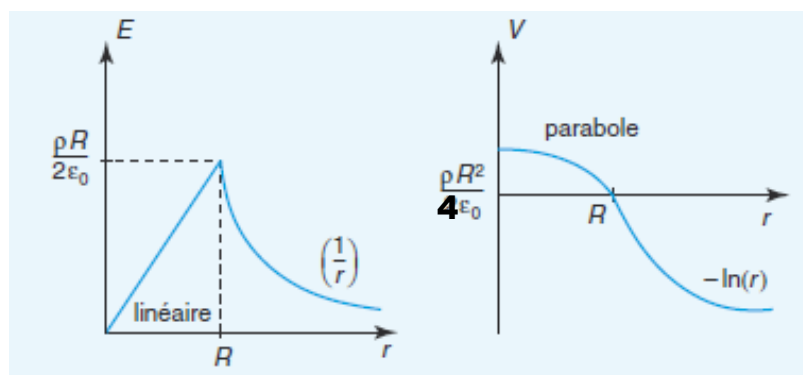
La référence de potentiel ne peut pas être prise à l'infini, puisqu'il y existe des charges. On choisit  $V(r=R)=0$

$$\text{Donc } C_1 = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} \text{ et } C_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln R$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{4\varepsilon_0} (R^2 - r^2) & \text{si } r < R \\ -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln r / R & \text{si } r > R \end{cases}$$

5)

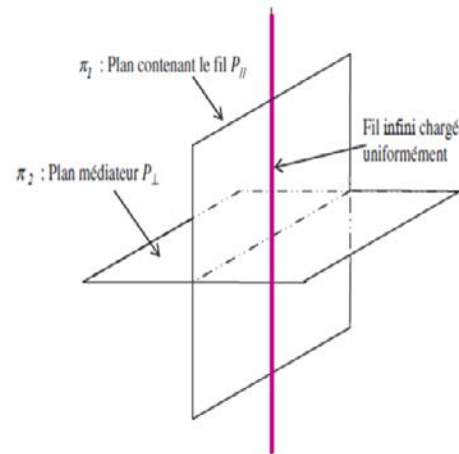
Courbe  $E=f(r)$  et  $V=f(r)$



Exercice n°5

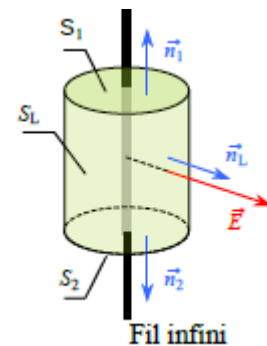
1)

- La distribution de charges est invariante par translation selon Oz.
- La distribution de charges est invariante par rotation autour de Oz
- Le plan  $\pi_1$  contenant le fil est plan de symétrie
- Le plan  $\pi_2$  perpendiculaire au fil est plan de symétrie



2)

La symétrie est cylindrique. On choisit comme surface de Gauss  $S_G$  un cylindre de rayon  $r$  de hauteur  $h$  et qui a pour axe le fil infini.



$$S_G = S_1 + S_2 + S_L$$

Le théorème de Gauss stipule que :

$$\Phi_{\vec{E}/s} = \oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_{\vec{E}/S_G} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_L$$

$$\Phi_{\vec{E}/S_G} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{Lat} = ES = E2\pi rh$$

Car  $E$  est radial ne dépend que de  $r$  et comme tous les points  $M$  de la surface latérale sont séparés de  $r$  du fil  $\Rightarrow E=C^{ste}$

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss :

$$Q_{int} = \int dq = \lambda \int_0^h dz = \lambda h$$

Th de Gauss implique

$$E 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Donc

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

3)

Le potentiel

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \text{ or } \vec{E} = E\vec{e}_r \Rightarrow \frac{dV}{dr}\vec{e}_r$$

$$\text{Soit } E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C^{ste}$$

### Exercice n°6

1- Tout plan passant par  $O$  est plan de symétrie de la distribution de charge

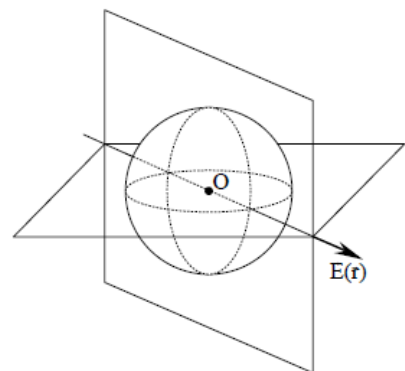
Comme le champ  $\vec{E}$  appartient à l'intersection de deux plans de symétrie, on en déduit que le champ est radial :

$$\vec{E}(r) = E(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$$

La symétrie de la distribution est sphérique, alors  $\vec{E}$  ne dépend pas de  $\theta$  et  $\varphi$ .  $\vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$

2- Champ en tout point de l'espace

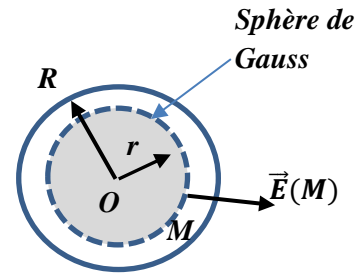
Prenons pour la surface fermée de Gauss ( $S$ ) la sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$  passant par le point  $M$ .



Le flux de  $\vec{E}$  à travers la surface fermée (S) est :  $\Phi_{\vec{E}/S} = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$  puisque  $\vec{E}$  ne dépend que de r donc le flux  $\Phi_{\vec{E}/S} = E \iint dS = ES = E4\pi r^2$

Deux cas se présentent suivant la distance  $r$ .

1<sup>er</sup> cas à l'intérieur de la sphère :  $r < R$



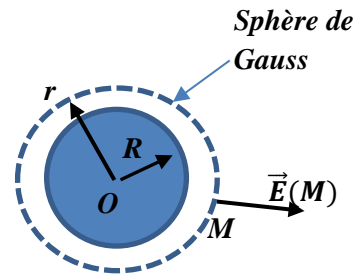
$$\Phi_{\vec{E}/S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \text{ avec } Q_{int} = \int dq \text{ et } dq = \rho dv \Rightarrow Q_{int} = \iiint_v \rho dv$$

$$\text{Soit } Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ donc } \Phi_{\vec{E}/S} = E4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

2<sup>eme</sup> cas à l'extérieur de la sphère :  $r > R$

$$\Phi_{\vec{E}/S} = E4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$



Avec

$$Q_{int} = \iiint_v \rho dv = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\text{Donc } E4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3} \frac{\pi R^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

(Si  $r=R$ ,  $E(r) = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$  on trouve que le champ est continue pour une distribution volumique.)

### 3- Calcul du potentiel

On sait que  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$  car E ne dépend que de  $r$ .

$$\Rightarrow V = -\int E dr + C^{ste}$$

Pour  $r < R$

$$V_{int} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int r dr + C_1 = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + C_1$$

Pour  $r > R$

$$V_{ext} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} + C_2 = \frac{\rho R^3}{3r\epsilon_0} + C_2$$

Si on prend  $V(\infty) = 0$

$$V_{ext}(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \text{ alors } V_{ext}(r) = \frac{\rho R^3}{3r\epsilon_0}$$

$$V_{int}(R) = V_{ext}(R) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \Rightarrow V_{int}(r) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right)$$

#### 4- Courbe $E=f(r)$ et $V=f(r)$

