

EXERCICES

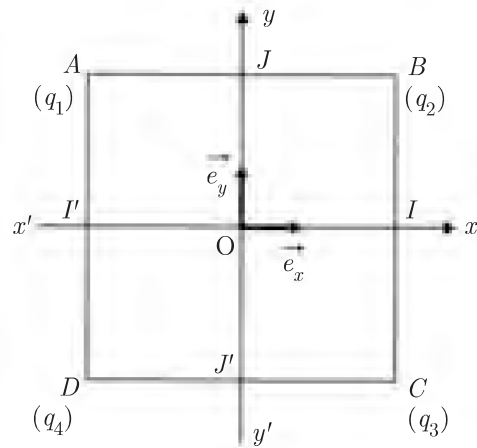
2.1. On place quatre charges ponctuelles aux sommets $ABCD$ d'un carré de côté $a = 1$ m, et de centre O , origine d'un repère orthonormé Oxy de vecteurs unitaires \vec{e}_x et \vec{e}_y .

On donne :

$$q_1 = q = 10^{-8} \text{ C} \qquad q_2 = -2q$$

$$q_3 = 2q \qquad q_4 = -q$$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ S.I.}$$



1) Déterminer le champ électrique \vec{E} au centre O du carré. Préciser la direction, le sens et la norme de \vec{E} .

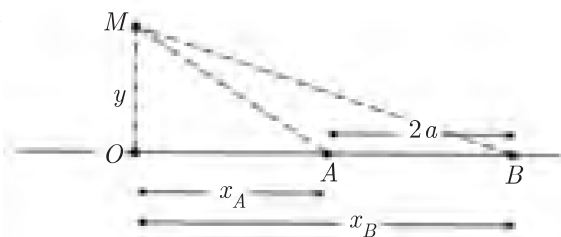
2) Exprimer le potentiel V créé en O par les quatre charges.

3) Exprimer le potentiel sur les parties des axes $x'x$ et $y'y$ intérieures au carré. Quelle est, en particulier, la valeur de V aux points d'intersection de ces axes avec les côtés du carré (I, I', J et J') ?

2.2. 1) Calculer, en tout point M de l'espace, le champ électrique \vec{E} créé par un fil rectiligne AB de longueur finie $2a$, portant une densité linéique de charges $\lambda > 0$.

Soit O la projection de M sur la droite AB , on posera :

$$OM = y, \quad OA = x_A, \quad OB = x_B$$



2) On examinera les cas particuliers suivants :

- a) le point M est dans le plan médiateur de AB ,
- b) le fil a une longueur infinie.

2.3. On considère un disque de rayon R , de centre O , portant une densité de charge surfacique $\sigma > 0$.

1) Retrouver, par un calcul direct, le champ \vec{E} créé par le disque en un point M de son axe $z'Oz$ ($OM = z > 0$) à partir du champ élémentaire $\vec{d^2E}$ créé par la charge élémentaire $dq = \sigma dS$ (voir exemple 3 du paragraphe 7 pour une autre méthode).

Exercices

- 2) Que devient ce champ \vec{E} lorsque le rayon du disque R tend vers l'infini ?
- 3) On considère un plan infini portant une densité de charge surfacique $\sigma > 0$, percé d'un trou circulaire de centre O et de rayon r .

Calculer le champ \vec{E} en un point M de l'axe $z'Oz$ du trou.

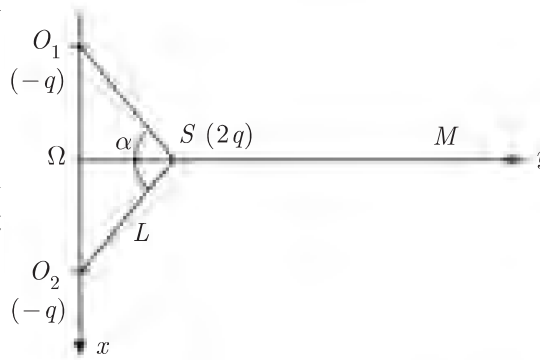
2.4. 1) Un conducteur creux hémisphérique de centre O et de rayon R est chargé uniformément avec une densité de charge surfacique $\sigma > 0$.

Calculer le champ \vec{E}_1 créé au point O .

2) On considère maintenant une distribution de charge en volume ayant la forme de l'hémisphère ci-dessus et portant une charge volumique uniforme ρ . En considérant la distribution volumique comme engendrée par la distribution surfacique de la 1^{re} question lorsque le rayon de cette dernière varie de 0 à R , calculer le champ électrique \vec{E}_2 créé au point O .

3) Retrouver ce dernier résultat par un calcul direct.

2.5. A) On assimile la molécule de SO_2 à un ensemble de trois charges ponctuelles disposées comme l'indique la figure. La charge positive $S(+2q)$ représentant l'atome de soufre est située à la même distance L des deux atomes d'oxygène, situés en O_1 et O_2 , portant chacun une charge $-q$. On désigne par α l'angle entre les deux liaisons soufre-oxygène et on adopte le système d'axes Ωxy représenté sur la figure. L'origine Ω est située au milieu des deux atomes d'oxygène.



- 1) Montrer que cette distribution de charges électriques est équivalente à un dipôle.
- 2) En déduire le moment dipolaire \vec{p} de la molécule SO_2 en précisant son orientation et sa norme.

$$A.N. : \quad \alpha = 120^\circ \quad L = 1,432 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad q = 0,29 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

B) Étant donné un point M situé sur l'axe Ωy à une grande distance de S , on désire justifier l'approximation dipolaire pour $\Omega M = 20L$ par exemple.

- 1) Calculer directement le champ \vec{E}_M créé en M par les trois charges.
- 2) Calculer le champ \vec{E}'_M créé au point M , en remplaçant les trois charges par le dipôle équivalent.
- 3) Comparer les résultats obtenus.

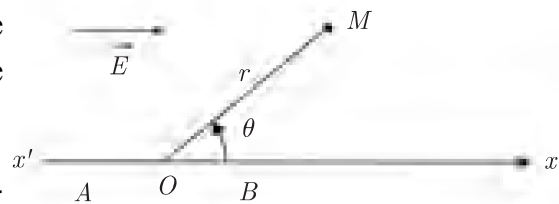
2.6. Dans l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} , on considère sur un axe $x'Ox$ parallèle à \vec{E} deux points A et B tels que \vec{AB} soit dans le même sens que \vec{E} .

1) Quelles sont les surfaces équipotentielles ?

2) Quel est le potentiel en un point M de l'espace situé à la distance r de O et tel que

l'angle $(\vec{OB}, \vec{OM}) = \theta$.

3) On place les charges $-q$ et $+q$ respectivement en A et B .



a) Montrer que le dipôle AB est en équilibre stable.

b) Quel est le potentiel résultant en M ?

c) Montrer qu'il existe une sphère de centre O , sur laquelle ce potentiel reste constant. Calculer numériquement le rayon de cette sphère ?

d) Quelle est la valeur constante de ce potentiel ?

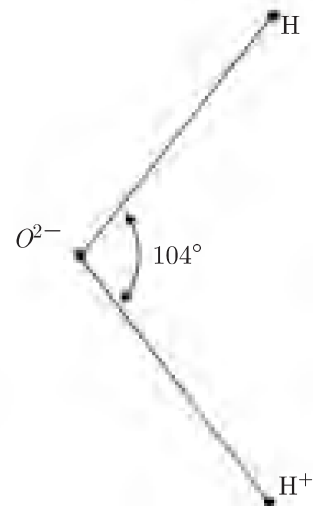
On donne : $q = 10^{-7} \text{ C}$ $AB = 1 \text{ cm}$ $E = 72 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

$$K = 9 \cdot 10^9 \text{ S.I.}$$

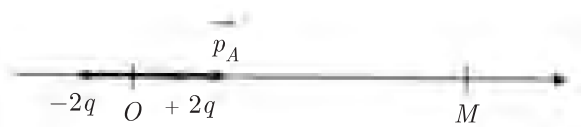
2.7. A) En première approximation, une molécule d'eau peut être considérée comme formée de deux ions H^+ et un ion O^{2-} disposés comme l'indique la figure. Calculer le moment dipolaire \vec{p}_A de cette molécule sachant que les distances entre O^{2-} et les deux ions H^+ sont toutes les deux égales à 1 \AA .

B) On considère une molécule d'eau A , placée au point O . Elle est assimilable à un dipôle électrique permanent de moment \vec{p}_A dont le centre est en O .

En un point M , situé sur l'axe de la molécule A , à une distance r , on place successivement :



1) Une charge électrique $q > 0$. Quelle est la force exercée par la molécule A sur cette charge ?



2) Un dipôle de moment \vec{p} orienté selon \overrightarrow{OM} .

a) Quelle est l'énergie potentielle du dipôle \vec{p} dans le champ électrique \vec{E}_M créé en M par la molécule A ? (On supposera que r est suffisamment grand pour que le champ \vec{E}_M puisse être considéré comme constant autour de M .)

b) Quelle est la force à laquelle est soumis le dipôle ? On précisera sa direction et son sens.

3) On considère un dipôle induit \vec{p} dont l'intensité est proportionnelle à l'intensité du champ \vec{E}_M , soit $\vec{p} = \beta \vec{E}_M$ (on supposera toujours \vec{E}_M constant autour de M).

a) Quelle est l'énergie potentielle d'interaction de ce dipôle avec la molécule d'eau ?

b) À quelle force est-il soumis ?

4) L'interaction dipôle-dipôle peut-elle suffire à expliquer la stabilité du système de deux molécules ? Justifier votre réponse.

CORRIGÉS

2.1. 1) Détermination du champ \vec{E} en O .

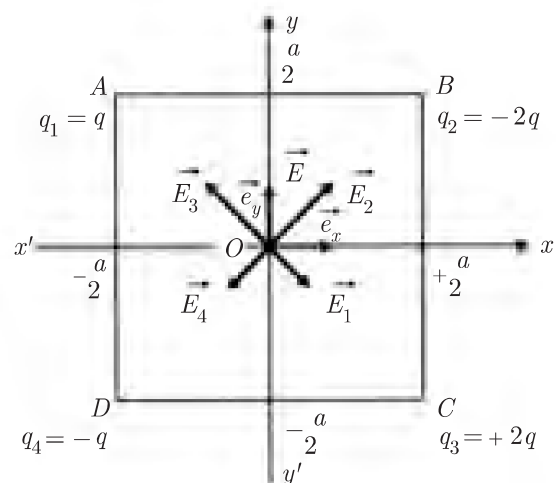
Soit $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ et \vec{E}_4 les champs créés en O respectivement par les charges q_1, q_2, q_3, q_4 .

On a :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

Par raison de symétrie :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 + \vec{E}_4 &= -2E_1 \cos \frac{\pi}{4} \vec{e}_y \\ &= -2K \cdot \frac{2q}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \\ &= -\frac{2Kq}{a^2} \sqrt{2} \vec{e}_y \end{aligned}$$



On a de même :

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 + \vec{E}_3 &= 2E_2 \cos \frac{\pi}{4} \vec{e}_y = 2K \frac{4q}{a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \\ &= 4K \frac{q}{a^2} \sqrt{2} \vec{e}_y \text{ soit :}\end{aligned}$$

$$\vec{E} = \frac{2Kq}{a^2} \sqrt{2} \vec{e}_y$$

Le champ résultant \vec{E} est donc :

- dirigé suivant l'axe $y'oy$;
- dans le sens positif de l'axe $y'oy$;
- de norme $E = \frac{2Kq}{a^2} \sqrt{2}$.

A.N. : $E = 9 \cdot 10^9 \times 10^{-8} \times 2\sqrt{2} = 254,6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

2) Détermination du potentiel V en O :

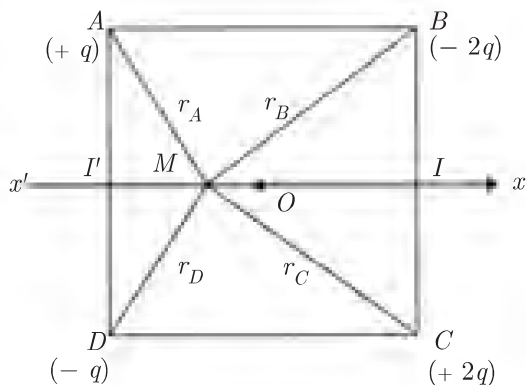
Soient V_1, V_2, V_3 et V_4 les potentiels créés par les charges q_1, q_2, q_3 et q_4 en O .

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{2Kq}{a\sqrt{2}} [1 - 2 + 2 - 1]$$

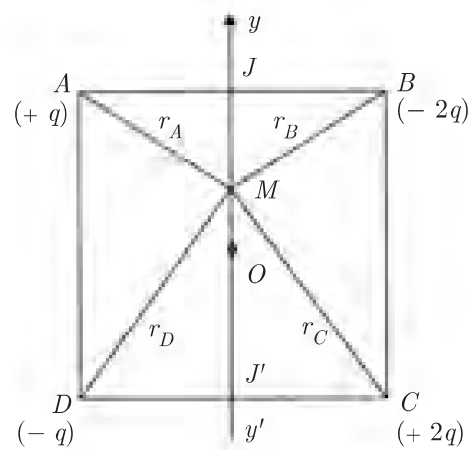
soit :

$$V = 0$$

3) Variation du potentiel sur les axes $x'Ox$ et $y'Oy$



Cas a



Cas b

a) Sur l'axe $x'Ox$, on a :

$$MA = MD \quad \text{et} \quad MB = MC$$

$$V = Kq \left[\frac{1}{MA} - \frac{2}{MB} + \frac{2}{MC} - \frac{1}{MD} \right] \quad \text{d'où} \quad V = 0$$

L'axe $x'Ox$ est une équipotentielle $V = 0$

I et I' étant sur l'axe, on a $V(I) = V(I') = 0$.

b) Sur l'axe $y'Oy$, on a : $MA = MB$ et $MC = MD$

$$V = Kq \left[\frac{1}{MC} - \frac{1}{MA} \right]$$

soit :

$$V = Kq \left\{ \left[(y-a)^2 + \frac{a^2}{4} \right]^{-\frac{1}{2}} - \left[(y-a^2) + \frac{a^2}{4} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

En deux points symétriques par rapport à O , sur l'axe $y'Oy$, les potentiels sont opposés :

$$V(y) = -V(-y)$$

Si M est en J , on a $JA = \frac{a}{2}$ et $JC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, soit :

$$V(J) = Kq \left[\frac{2}{a\sqrt{5}} - \frac{2}{a} \right] = \frac{2Kq}{a} \left(\frac{\sqrt{5}-5}{5} \right)$$

Si M est en J' , alors $V(J') = -V(J)$.

A.N. : $V(J) = -99,5$ volts $V(J') = 99,5$ volts

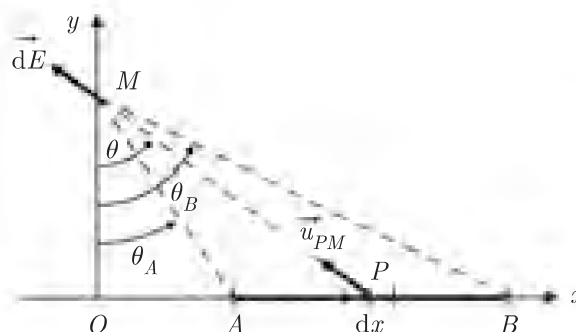
2.2. 1) Calcul du champ \vec{E} en M .

Soit $d\vec{E}$ le champ créé par un élément de fil de longueur dx autour de P .

$$d\vec{E} = K \frac{\lambda dx}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

Dans le triangle PMO , on a :

$$\tan \theta = \frac{x}{y} \implies \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{dx}{y}$$



et
$$y = PM \cos \theta \implies \vec{dE} = \frac{K \lambda d\theta}{y} \vec{u}_{PM}$$

$$\vec{dE} \begin{cases} dE_x = -\frac{K \lambda}{y} \sin \theta d\theta \implies E_x = -\frac{K \lambda}{y} \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sin \theta d\theta \\ dE_y = \frac{K \lambda}{y} \cos \theta d\theta \implies E_y = -\frac{K \lambda}{y} \int_{\theta_A}^{\theta_B} \cos \theta d\theta \end{cases}$$

En posant $\theta_A = (\vec{MO}, \vec{MA}), \quad \theta_B = (\vec{MO}, \vec{MB})$

$$\begin{cases} E_x = \frac{K \lambda}{y} (\cos \theta_B - \cos \theta_A) = \frac{K \lambda}{y} \left(\frac{y}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x_A^2 + y^2}} \right) \\ E_y = \frac{K \lambda}{y} (\sin \theta_B - \sin \theta_A) = \frac{K \lambda}{y} \left(\frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} - \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y^2}} \right) \end{cases}$$

2) Cas particuliers

a) M sur le plan médiateur de AB

$$x_A = -x_B \implies \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \frac{2K \lambda}{y} \frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} \end{cases}$$

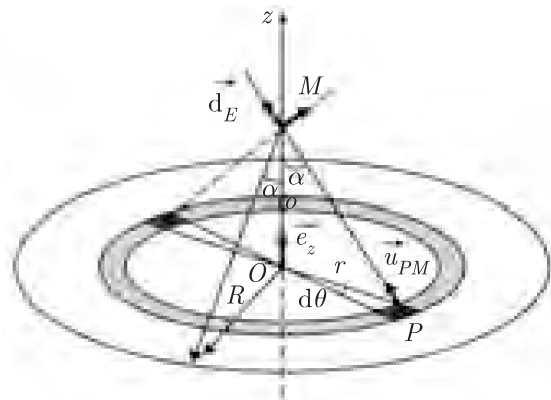
b) Le fil a une longueur infinie :

$$\left. \begin{array}{l} x_A \longrightarrow -\infty \\ x_B \longrightarrow +\infty \end{array} \right\} \implies \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \frac{2K \lambda}{y} \end{cases}$$

2.3. 1) Tout plan contenant Oz est un plan de symétrie, donc sur l'axe $\vec{E} // \vec{Oz}$.

Le champ créé par un élément de surface dS est :

$$\vec{d^2E} = K \frac{\sigma dS}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$



avec
$$dS = dr r d\theta \quad \text{et} \quad PM = \frac{z}{\cos \alpha}$$

$$\vec{d^2E} = \frac{Kr dr d\theta}{z^2} \sigma \cos^2 \alpha$$

Le champ dE_z créé par la couronne comprise entre les deux rayons r et $r + dr$ est :

$$dE_z = \frac{Kr dr}{z^2} \sigma \cos^3 \alpha \int_0^{2\pi} d\theta = K \frac{2\pi r dr}{z^2} \sigma \cos^3 \alpha$$

On a, pour tous les éléments de la couronne :

$$\tan \alpha = \frac{r}{z} \implies \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{dr}{z}$$

$$\begin{aligned} dE_z &= K \frac{2\pi}{z^2} z (\tan \alpha) z \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \sigma \cos^3 \alpha \\ &= K 2\pi \sigma \sin \alpha d\alpha \end{aligned}$$

Le champ E_z créé par le disque de rayon R est donc :

$$E_z = K 2\pi \sigma \int_0^{\alpha_0} \sin \alpha d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_0)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \right) \vec{e}_z$$

2) Quand R tend vers l'infini, alors :

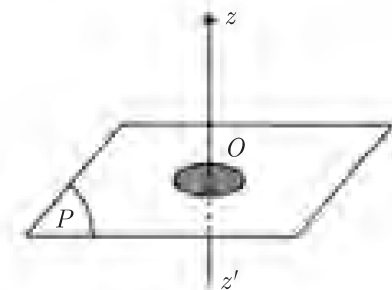
$$\vec{E} \longrightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

3) D'après le principe de superposition, le champ \vec{E} créé par le plan percé d'un trou est :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

où \vec{E}_1 est le champ créé par le plan infini chargé avec une densité $+\sigma$,

\vec{E}_2 est le champ créé par le disque chargé avec une densité $-\sigma$,



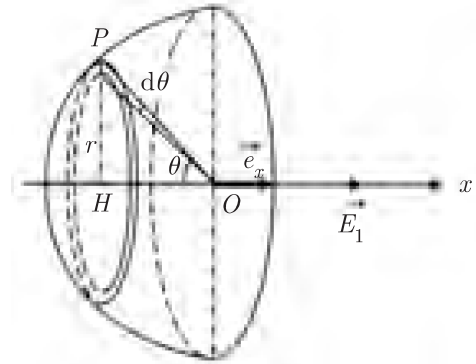
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} + \left[-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \right) \right] \vec{e}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \vec{e}_z$$

2.4. 1) Cas d'une distribution surfacique hémisphérique

Par symétrie, le champ \vec{E}_1 produit par l'hémisphère, portant une densité surfacique $\sigma > 0$, a le sens du vecteur unitaire \vec{e}_x porté par l'axe Ox .

On pose : $OP = R$
 $PH = R \sin \theta$



La charge élémentaire σdS , prise sur la couronne de rayon HP , contribue au champ total par :

$$dE_1 = K \frac{\sigma dS}{R^2} \cos \theta \quad \text{avec} \quad dS = 2\pi R \sin \theta R d\theta$$

$$\begin{aligned} dE_1 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R^2}{R^2} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\sigma}{4\epsilon_0} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \sin 2\theta d\theta \end{aligned}$$

$$E_1 = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = \frac{\sigma}{8\epsilon_0} [-\cos 2\theta]_0^{\pi/2}$$

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \vec{e}_x}$$

2) Cas d'une distribution volumique hémisphérique

Pour trouver la correspondance entre les densités de charge surfacique et volumique, on écrit que la charge $2\pi r^2 \sigma$ portée par la distribution surfacique précédente est maintenant portée par la demi-coquille de rayon r , d'épaisseur dr , donc de volume $d\tau = 2\pi r^2 dr$, soit

$$2\pi r^2 \sigma \longmapsto 2\pi r^2 dr \rho \quad \text{et} \quad \sigma = \rho dr$$

Champ créé par cette coquille au point O :

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \vec{e}_x \quad \longmapsto \quad \vec{dE}_2 = \frac{\rho dr}{4\epsilon_0} \vec{e}_x$$

On en déduit pour le champ total :

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho}{4\epsilon_0} \int_0^R dr \vec{e}_x = \frac{\rho R}{4\epsilon_0} \vec{e}_x$$

3) Calcul direct

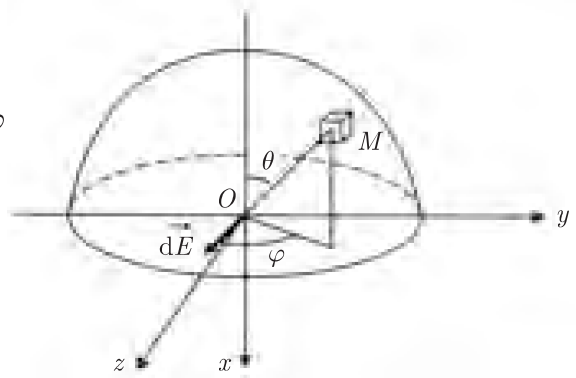
$$\vec{dE} = K \frac{dq}{r^2} \vec{u}_{OM} \implies dE_x = \frac{R dq \cos \theta}{r^2}$$

$d\tau$ étant l'élément de volume autour de M , on a :

$$dq = \rho d\tau$$

avec $d\tau = r \sin \theta d\varphi r d\theta dr$

$$\begin{aligned} dq &= \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ E_X &= K \rho \int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= K \rho R 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta \\ &= K \rho R \pi \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2} = K \rho R \pi \end{aligned}$$



Par raison de symétrie, \vec{E} est dirigé suivant $O\vec{x}$. En effet, tout plan contenant Ox est plan de symétrie pour la distribution de charge :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{4\epsilon_0} R \vec{e}_x$$

Le champ électrique d'une distribution sphérique uniforme (sphère complète) au centre O est nul par symétrie, que la distribution soit surfacique ou volumique.

2.5. A) 1) La distribution de charges est équivalente à un dipôle :

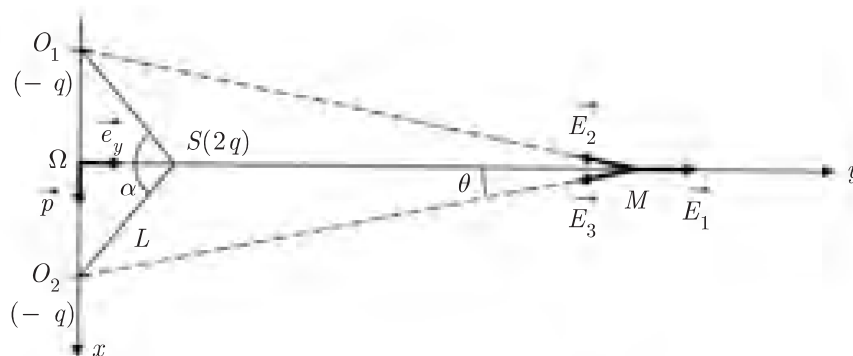
$$- \Sigma q = 0$$

– le barycentre des charges positives est en S et celui des charges négatives en Ω .

$$2) \vec{p} = 2q \vec{\Omega S}$$

$$p = 2q \Omega S = 2q L \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$A.N. : p = 2 \times 0,29 \cdot 10^{-19} \times 1,432 \cdot 10^{-10} \times \frac{1}{2} = 0,415 \cdot 10^{-29} \text{ C.m. ;}$$



B) 1) Soit \vec{E}_1 le champ créé par l'atome de soufre et \vec{E}_2, \vec{E}_3 les champs créés par les deux atomes d'oxygène.

$$\vec{E}_1 = \frac{2Kq}{SM^2} \vec{e}_y \quad \vec{E}_2 = -\frac{Kq}{O_1M^2} \vec{u}_{O_1M} \quad \vec{E}_3 = -\frac{Kq}{O_2M^2} \vec{u}_{O_2M}$$

$$O_1M = O_2M$$

\vec{E}_2 et \vec{E}_3 sont donc symétriques par rapport à Ωy .

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + (\vec{E}_2 + \vec{E}_3) = \frac{2Kq}{SM^2} \vec{e}_y - \frac{2Kq}{O_1M^2} \cos \theta \vec{e}_y$$

Or
$$SM^2 = (\Omega M - \Omega S)^2 = \Omega M^2 \left(1 - \frac{\Omega S}{\Omega M}\right)^2$$

et
$$O_1M^2 = \Omega M^2 \left[1 + \left(\frac{\Omega O_1}{\Omega M}\right)^2\right]$$

Le point M étant situé à grande distance de Ω , on peut poser :

$$\frac{\Omega S}{\Omega M} = \varepsilon_1 \ll 1 \quad \frac{\Omega O_1}{\Omega M} = \varepsilon_2 \ll 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{SM^2} \simeq \frac{1}{\Omega M^2} (1 + 2\varepsilon_1) \\ \frac{1}{O_1M^2} \simeq \frac{1}{\Omega M^2} (1 - \varepsilon_2^2) \\ \cos \theta \simeq 1 - \frac{\varepsilon_2^2}{2} \end{array} \right.$$

$$\vec{E}_M \simeq \frac{2Kq}{\Omega M^2} \vec{e}_y \left[1 + 2\varepsilon_1 - 1 + \frac{3}{2}\varepsilon_2^2\right] \text{ soit :}$$

$$\boxed{\vec{E}_M = \frac{2Kq}{\Omega M^2} \left(2\varepsilon_1 + \frac{3}{2}\varepsilon_2^2\right) \vec{e}_y}$$

A.N. :
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{40} \quad \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{3}}{40}$$

$$E_M = 3,18 \cdot 10^6 (1 + 0,056) = 3,35 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

2) Le champ créé par le dipôle $(-2q, +2q)$ dont les charges sont placées en Ω et en S est :

$$\begin{aligned} \vec{E}'_M &= 2Kq \left[\frac{1}{SM^2} - \frac{1}{\Omega M^2} \right] \vec{e}_y \\ &= \frac{2Kq}{\Omega M^2} [1 + 2\varepsilon_1 - 1] \vec{e}_y = \frac{2Kq}{\Omega M^2} 2\varepsilon_1 \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\vec{E}'_M = \frac{4Kq}{\Omega M^2} \varepsilon_1 \vec{e}_y$$

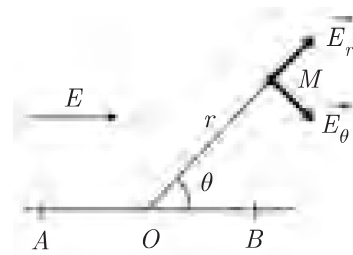
A.N. : $\vec{E}'_M = 3,18 \cdot 10^6 \text{ Vm}^{-1}$

3) À la distance $\Omega M = 20L$, l'erreur relative effectuée en utilisant l'approximation dipolaire est :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_M - E'_M}{E_M} \simeq \frac{3\varepsilon_2^2}{2 \times 2\varepsilon_1} = 0,056$$

L'approximation dipolaire sera meilleure pour une distance ΩM bien supérieure à $20L$.

2.6. 1) Le champ électrique \vec{E} étant uniforme et parallèle à AB , les surfaces équipotentielles $V = \text{cte}$ sont les plans perpendiculaires à \vec{E} , donc à AB (voir paragraphe 3).



2) $-dV = \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ ou
 $\vec{E} = E \cos \theta \vec{u}_r - E \sin \theta \vec{u}_\theta$

et $d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$

$$-\int_{V(O)}^{V(M)} dV = \int_0^r E \cos \theta dr$$

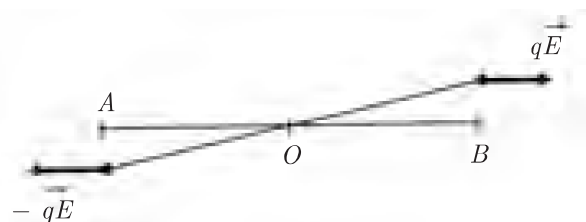
D'où $V(O) - V(M) = +Er \cos \theta$

$$V(M) = V(O) - Er \cos \theta$$

3) a) Le dipôle est soumis à un couple de forces de moment :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} = q \vec{AB} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{car } \vec{AB} // \vec{E})$$

Le dipôle est donc en équilibre ; l'équilibre est stable car, lorsqu'on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de forces $(q\vec{E}, -q\vec{E})$ tend à l'y ramener.



b) Le potentiel résultant en M est :

$$V_M = V_{\text{dipôle}} + V_{\text{champ } E}$$

$$V_M = \frac{Kp \cos \theta}{r^2} + V_0 - Er \cos \theta$$

c) Surface équipotentielle :

$$\frac{Kp \cos \theta}{r^2} - Er \cos \theta = \text{Cte}$$

$$\cos \theta \left(\frac{Kp}{r^2} - Er \right) = \text{Cte}$$

Pour que la relation ci-dessus soit valable quelle que soit la valeur de θ , il faut que la constante soit nulle, ce qui donne :

• $\cos \theta = 0$: le plan médiateur de AB est une équipotentielle de potentiel V_0 .

• $r^3 = \frac{Kp}{E}$: $r = \left(\frac{Kp}{E} \right)^{1/3}$ ce qui correspond à une sphère de centre O et de rayon r .

$$A.N. : \quad r = \left(\frac{9 \times 10^9 \times 10^{-9}}{72} \right)^{1/3} = 0,5 \text{ m}$$

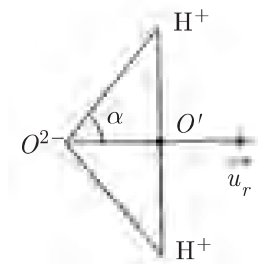
d) Sur la sphère le potentiel V est constant et égal à V_0 .

2.7. A) Moment dipolaire de la molécule H_2O :

$$\vec{p}_A = 2|e| \overrightarrow{OO'} = 2|e| OH \cos \alpha \cdot \vec{u}_r$$

$$A.N. : \quad \cos \alpha = \cos 52^\circ = 0,615$$

$$p_A = 2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^{-10} \times 0,615 = 19,68 \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$$



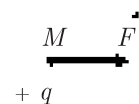
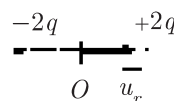
B) 1) Force exercée par la molécule A sur la

charge $+q$ placée en M : $\vec{F} = q \cdot \vec{E}_A$

Sur l'axe du dipôle, on a :

$$\vec{E}_A = E_A \vec{u}_r = 2K \frac{p_A}{r^3} \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{q 2K p_A \vec{u}_r}{r^3}$$



La charge q étant positive, la force \vec{F} est répulsive.

2) a) Énergie potentielle du dipôle placé en M :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -(p\vec{u}_r) \cdot \left(2Kp_A \frac{\vec{u}_r}{r^3} \right) = -\frac{2Kp_A p}{r^3}$$

b) Force à laquelle est soumis le dipôle placé en M :

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r = -6K \frac{p_A p}{r^4} \vec{u}_r \quad (\text{attractive})$$

3) a) Énergie potentielle du dipôle induit.

Comme $\vec{p} = \beta \vec{E}$, on a :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\beta E^2 = -\frac{\beta K^2 4 p_A^2}{r^6} = -\frac{4\beta K^2 p_A^2}{r^6}$$

b) Force à laquelle est soumis le dipôle induit :

$$\boxed{\vec{F} = -\beta K^2 \frac{24 p_A^2}{r^7} \vec{u}_r} \quad (\text{attractive})$$

4) L'allure de la courbe de l'énergie potentielle qui est en $-\frac{1}{r^3}$ (2^e question) ou en $-\frac{1}{r^6}$ (3^e question) montre que dans les deux cas la position d'équilibre est l'infini ; le dipôle induit est attiré par le premier dipôle.

Pour rendre compte de la stabilité du système de molécules, il faut introduire, dans l'énergie potentielle, un terme de répulsion à courte distance.

