Exercices d'application

Exercice 01:

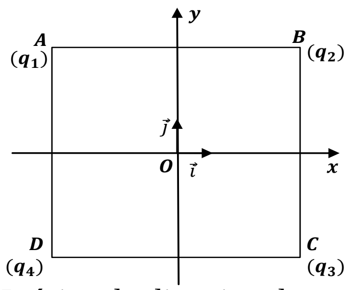
On place quatre charges ponctuelles aux sommets $ABCD$ d'un carré de côté $\boldsymbol{a} = 1m$, et de centre O, origine d'un repère orthonormé Oxy de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

On donne :

$$q_1 = q = 10^{-8}C \qquad q_2 = -2q$$

$$q_3 = 2q \qquad q_4 = -q$$

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 S.I$$



1) Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ au centre O du carré. Préciser la direction, le sens et la norme de $\vec{E}$.

2) Exprimer le potentiel V créé en O par les quartes charges.

3) Exprimer le potentiel sur les parties des axes $x'x$ et $y'y$ intérieures au carré. Quelle est, en particulier, la valeur de V aux points d'intersection de ces axes avec les côtés du carré (I, I' , J et J')?

Exercice 02:

On considère un disque de rayon R, de centre O, portant une densité de charge surfacique $\sigma > 0$.

1) Retrouver, par un calcul direct, le champ $\vec{E}$ créé par le disque en un point M de son axe $z'Oz$ $(OM = z > 0)$ à partir du champ élémentaire $\overrightarrow{dE}$ créé par la charge élémentaire $dq = \sigma\, dS$.

2) Que devient ce champ $\vec{E}$ lorsque le rayon du disque R tend vers l'infini ?

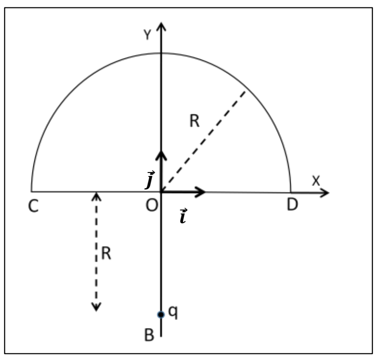
3) On considère un plan infini portant une densité de charge surfacique $\sigma > 0$, percé d'un trou circulaire de centre O et de rayon r.

-Calculer le champ $\vec{E}$ en un point M de l'axe $z'Oz$ du trou.

Exercice 03:

on considère un demi cercle (C, D), (Voir figure) de centre O et de rayon R, uniformément chargé avec une densité linéique de charge constate et positive.

soit q une charge ponctuelle placée en un point B comme indiqué sur la figure , $(OB = R)$



1/a- calculer le potentiel électrostatique $V_1(O)$ créé par le demi cercle chargé (C,D) au point O.

b- Calculer le potentiel électrostatique $V_2(O)$ créé par la charge ponctuelle q au point O.

c- En déduire le potentiel électrostatique total $V(O)$ créé en O.

2/a- Montrer que le champ électrostatique $\vec{E}_1(O)$, créé par la distribution de charge linéique en point O , est de la forme: $\vec{E}_1(O) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{j}$

b- Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}_2(O)$, créé par la charge ponctuelle q au point O.

c- En déduire le champ électrostatique total $\vec{E}(O)$créé au point O.

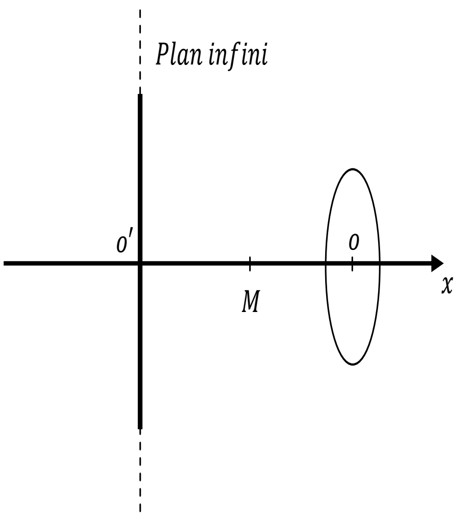
d- Déterminer la relation entre λ et q pour que $\vec{E}(O) = 0$.

<u>Exercice 04:</u>

I- On considère une spire circulaire de centre O et de rayon R, uniformément chargée avec une densité de charge linéique $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda} > 0)$.

a) Sans faire de calcul, donner la direction du champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{M})$ en un point M de l'axe de la spire tel que $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{x}$. justifiez votre réponse.

b) Déterminer le champ électrostatique $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{M})$ et le potentiel $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{M})$ au point M.



II- Soit un fil infini uniformément chargé avec une densité de charge linéique $-\boldsymbol{\lambda}$.

a) En utilisant la symétrie de la distribution, quelle est la distribution du champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{M})$ en un point M situé a une distance r du fil. Justifier votre réponse.

b) Par application du théorème de gauss, déterminer le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{M})$ en un point M.

c) Déduire le potentiel $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{M})$. on donne $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{1}) = \boldsymbol{0}$.

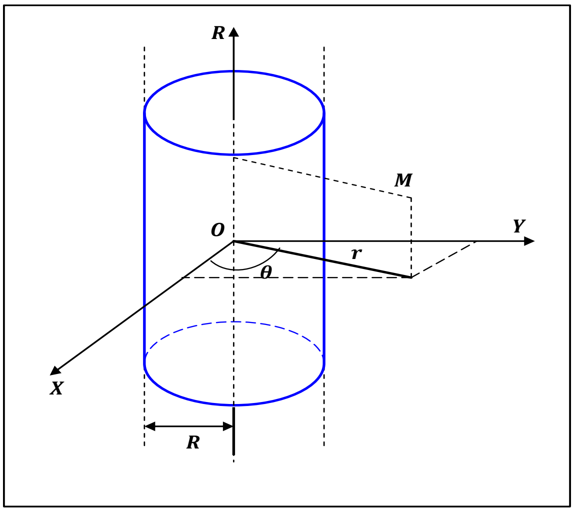
III- On place le fil infini perpendiculairement à l'axe principale de la spire circulaire et à une distance 2a de celle ci (voir figure).

a) Déterminer le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ crée par le fil infini et la spire circulaire au point M tel que M est au milieu de $\boldsymbol{OO'}$.

b) Déterminer le potentiel $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M})$.

Exercice 05:

On considère un cylindre de rayon R, de longueur infinie, chargée uniformément en surface par une densité surfacique $\sigma(\sigma > 0)$. A l'aide du theoreme de Gauss on désire déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ en tout point M de l'espace, créé par cette distribution. M est un point situé à la distance r de l'axe (OZ) du cylindre et repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z). (voir figure)



1) En utilisant les symétries et les invariances, déterminer la direction de $\vec{E}(M)$ et les variables dont il dépend.

2)

a- Définir précisément la surface de Gauss que vous utilisez (en justifiant votre choix).

b- déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace.

3) En déduire le potentiel $V(M)$ pour tous les point M de l'espace ($r < R$ et $r > R$), on prendera comme origine des potentiels ($V = V_0$ en $r = 0$).

4) Tracer les courbes de variations $E(r)$ et $V(r)$ en fonction de r. Conclure.

5) Quelles sont les lignes de champs et les surfaces équipotentielle pour cette distribution de charges.

Exercice 06:

Soit une sphère de centre O et de rayon R, chargée uniformément en volume avec une densité volumique ρ. (figure a)

1)

a- En utilisant les règles de symétrie et d'invariances, montrer que le champ électrique en un point quelconques de l'espace s'écrit sous la forme : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.

b- Déterminer alors le champ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

c- En déduire ensuite le potentiel à l'intérieur et l'extérieur de la sphère, on prendra $V(\infty) = 0$.

2) On place une charge ponctuelle q positive au centre de la sphère (figure b)

a- En utilisant le principe de superposition, déterminer le champ résultant créé par la charge q et la sphère chargée en tout point de l'espace.

b- Déterminer le potentiel produit en tout point de l'espace, par le système formé par q et la sphère chargée.

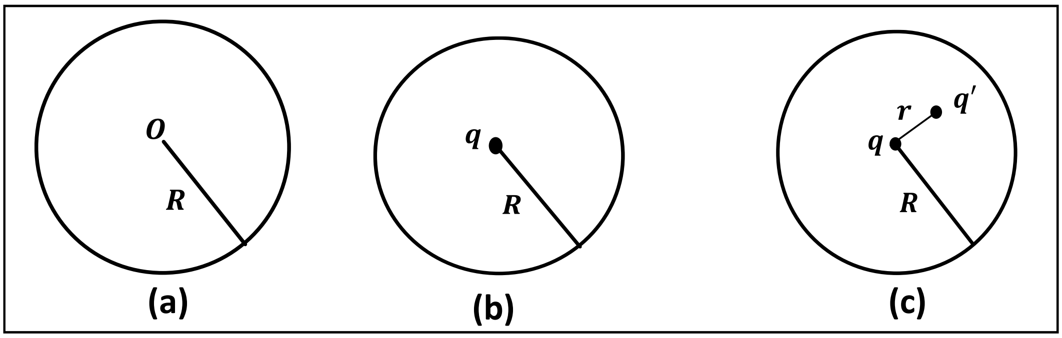
c- pour quelle valeur ρ_0 de ρ, la charge du système formé par q et la sphère chargée est nulle ? On conserve cette valeur pour le reste de l'exercice.

d- Réécrire l'expression du champ résultant en tout point de l'espace, en fonction de q et r.

3) On place une deuxième charge ponctuelle q' positive à l'intérieure de la sphère, à la distance $r \leq R$ du centre. (figure c)

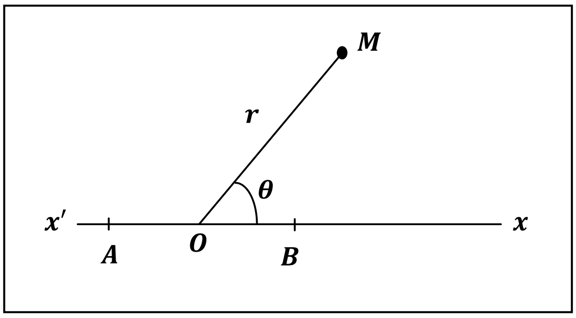
a- Déterminer la force électrostatique résultante exercée sur q', représenter cette force sur un schéma.

b- Pour quelle valeur de r, la charge q' est en équilibre?



Exercice 07:

Dans l'espace où règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$, on considère sur un axe $x'Ox$ parallèle à $\vec{E}$ deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB}$ soit dans le même sens que $\vec{E}$.



1) Quelles sont les surfaces équipotentielles ?

2) Quel est le potentiel en un point *M* de l'espace situé à la distance *r* de *O* et tel que l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \theta$

3) On place les charges -*q* et +*q* respectivement en *A* et *B*.

a) Montrer que le dipôle *AB* est en équilibre stable.

b) Quel est le potentiel résultant en *M* ?

c) Montrer qu'il existe une sphère de centre *O*, sur laquelle ce potentiel reste constant. Calculer numériquement le rayon de cette sphère ?

d) Quelle est la valeur constante de ce potentiel ?

Solution des exercices

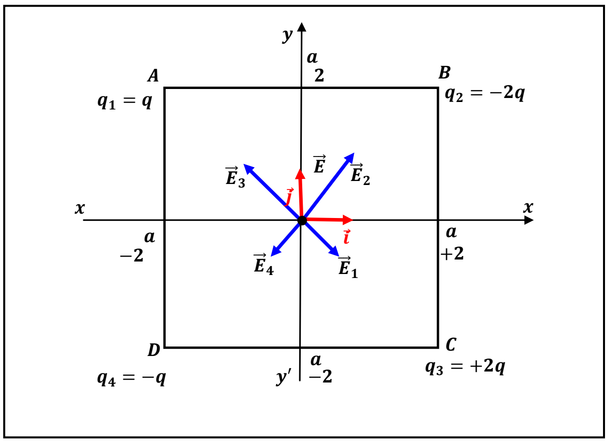
Exercice 01:

1) Détermination du champ $\vec{E}$ en O

Soit $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ et $\vec{E}_4$ les champs crées en O respectivement par les charges q_1, q_2, q_3, q_4.

On a :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$



par raison de symétrie:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_4 = -2E_1 \cos\frac{\pi}{4}\vec{j}$$

$$= -2k.\frac{2q}{a^2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

$$= -\frac{2kq}{a^2}\sqrt{2}\,\vec{j}$$

On a de même:

$$\vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 2\,E_2 \cos\frac{\pi}{4}\vec{j} = 2k\frac{4q}{a^2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{j}$$

$$= 4k\frac{q}{a^2}\,\sqrt{2}\,\vec{j}$$

Soit

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2kq}{a^2}\,\sqrt{2}\,\vec{j}}$$

Le champ résultant $\vec{E}$ est donc:

- Dirigé suivant l'axe $y'Oy$;
- Dans le sens positif de l'axe $y'Oy$;

- De norme $E = \frac{2kq}{a^2}\sqrt{2}$.

A.N: $E = 9.10^9 \times 10^{-8} \times 2\sqrt{2} = \mathbf{254,6\ V.m^{-1}}$

2) Détermination du potentiel V en O

Soient V_1, V_2, V_3 et V_4 les potentiels crées en O respectivement par les charges q_1, q_2, q_3, q_4.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{2kq}{a\sqrt{2}}[1 - 2 + 2 - 1]$$

Soit

$$V = 0$$

3) Variation du potentiel sur les axes $x'Ox$ et $y'Oy$

a) 1^er^ cas: su l'axe $x'Ox$, on a :

$$MA = MD \qquad et \qquad MB = MC$$

$$\Rightarrow \quad V = kq\left[\frac{1}{MA} - \frac{2}{MB} + \frac{2}{MC} - \frac{1}{MD}\right] \;\; d'où \quad V = 0$$

L'axe $x'Ox$ est une équipotentielle $V = 0$

I et I' étant sur l'axe , on a $V(I) = V(I') = 0$

b) 2^er^ cas: su l'axe $y'Oy$, on a :

$$MA = MB \qquad et \qquad MC = MD$$

$$V = kq\left[\frac{1}{MC} - \frac{1}{MA}\right]$$

Soit

$$V = kq\left\{\left[(y-a)^2 + \frac{a^2}{4}\right]^{-\frac{1}{2}} - \left[(y-a^2) + \frac{a^2}{4}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

En deux points symétriques par rapport à O, sur l'axe $y'Oy$, les potentiels sont opposés:

$$V(y) = -V(-y)$$

Si M est en J, on a $JA = \frac{a}{2}$ et $JC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Soit

$$V(J) = kq\left[\frac{2}{a\sqrt{5}} - \frac{2}{a}\right] = \frac{2kq}{a}\left(\frac{\sqrt{5}-5}{5}\right)$$

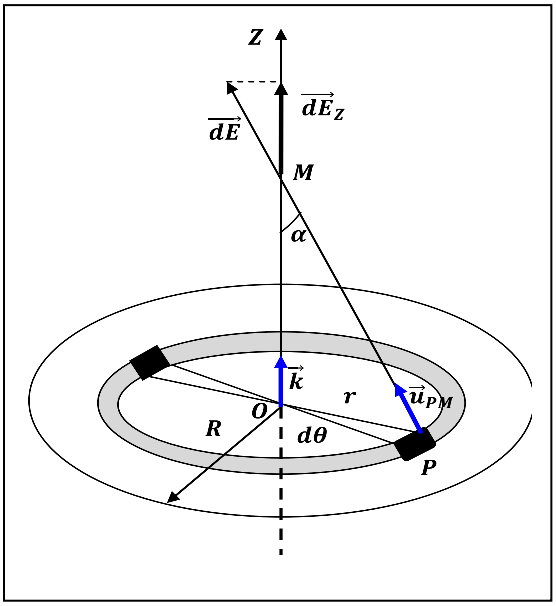
Si M est en J', alors

$$V(J') = -V(J)$$

A.N $\boldsymbol{V(J) = -99,5\ Volts}$ $\boldsymbol{V(J') = 99,5\ Volts}$

<u>Exercice 02:</u>

1) Calcul direct du champ $\vec{E}$



- **Symétrie + invariance**

Tout plan contenant l'axe oz est un plan de symétrie et invariance par rotation autour de oz

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(0,0,z) = E(z)\vec{k}$$

- **Expression du champ crée par dq :**

$$\overrightarrow{dE} = k\frac{dq}{PM^2}\vec{u}_{PM} = k\frac{\sigma dS}{PM^2}\vec{u}_{PM}$$

avec $dS = rdr\, d\theta$ et $PM = \frac{z}{\cos\alpha}$

$$\overrightarrow{dE} = \frac{k\, rdr\, d\theta}{z^2}\sigma\cos^2\alpha\, \vec{u}_{PM}$$

Le champ dE_z créé par la couronne comprise entre les deux rayons r et rdr est:

$$dE_z = \frac{krdr}{z^2}\sigma\cos^3\alpha\int_0^{2\pi} d\theta = k\frac{2\pi rdr}{z^2}\sigma\cos^3\alpha$$

On a pour tous les éléments e la couronne :

$$\tan\alpha = \frac{r}{z} \Longrightarrow \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{dr}{z}$$

$$dE_z = k\frac{2\pi}{z^2}z\,(\tan\alpha)z\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}\ \sigma\cos^3\alpha$$

$$= k2\pi\sigma\sin\alpha\, d\alpha$$

Le champ créé par le disque de rayon R est donc:

$$E_z = k\ 2\pi\sigma\int_0^{\alpha_0}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha_0)$$

finalement

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{(z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\vec{k}}$$

2) Quand R tend vers l'infini , alors

$$\vec{\boldsymbol{E}} \to \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{k}}$$

3) Calcul du champ E en un point de l'axe $z'Oz$ du trou

D'apres le principe de superposition , le champ $\vec{E}$ créé par le plan d'un trou est :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

où $\vec{E}_1$ est le champ créé par le plan infini chargé avec une densité $+\boldsymbol{\sigma}$

et $\vec{E}_2$ est le champ créé par le disque avec une densité $-\boldsymbol{\sigma}$

Le champ est donné par:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} + \left[-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{(z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right]\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}} \quad \frac{\boldsymbol{z}}{(\boldsymbol{z^2}+\boldsymbol{r^2})^{\frac{1}{2}}}\vec{\boldsymbol{k}}}$$

<u>**Exercice 03:**</u>

1/a- calcul du potentiel électrostatique $V_1(O)$ créé par le demi cercle chargé (C,D) au point O.

- **Expression du potentiel $V_1(O)$:**

$$dV_1(O) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Distribution linéique le long de demi cercle : $dq = \lambda dl$

avec $dl = Rd\theta$ (θ varie de 0 à π)

$$\Longrightarrow \quad V_1(O) = \int_0^\pi \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\pi d\theta = \frac{\lambda\pi}{4\pi\varepsilon_0}$$

Finalement

$$\boxed{\boldsymbol{V_1(O)} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{4\varepsilon_0}}}$$

1/b- Calcul du potentiel électrostatique $V_2(O)$ créé par la charge ponctuelle q au point O.

$$\boxed{V_2(O) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

1/c- Le potentiel électrostatique total $V(O)$ créé en O.

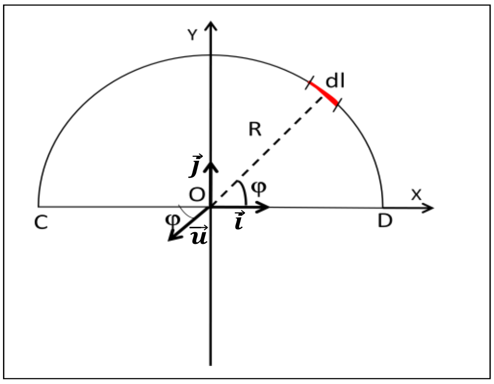
Le potentiel électrostatique total $V(O)$ créé en O est la somme entre le $V_1(O)$ et le $V_2(O)$:

$$V(O) = V_1(O) + V_2(O) = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Soit

$$\boxed{V(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{R} + \lambda\right]}$$

2/a- Le champ électrostatique $\vec{E}_1(O)$ créé par la distribution de charge linéique en point O, est de la forme:



$$d\vec{E}_1(O) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u}$$

avec $dq = \lambda dl$ et $dl = Rd\varphi$

$$d\vec{E}_1(O) = \frac{\lambda R d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u}$$

par projection le vecteur unitaire $\vec{u}$ est donné par:

$$\vec{u} = -\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

Soit

$$d\vec{E}_1(O) = \frac{\lambda R d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2}[-\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\varphi\,\vec{\jmath}]$$

Par intégration

$$\vec{E}_1(O) = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left[\left(\left(\int_0^{\pi} -\cos\varphi\, d\varphi\right)\vec{\imath} + \left(\int_0^{\pi} -\sin\varphi\, d\varphi\right)\vec{\jmath}\right)\right]$$

Finalement

$$\boxed{\vec{E}_1(O) = \frac{-2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\vec{\jmath} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{\jmath}}$$

2/b- Le champ électrostatique $\vec{E}_2(O)$, créé par la charge ponctuelle q au point O.

$$\vec{E}_2(O) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{j}$$

2/c- Le champ électrostatique total $\vec{E}(O)$créé au point O.

Le champ électrostatique total $\vec{E}(O)$ créé au point O est la somme entre le $\vec{E}_1(O)$ et $\vec{E}_2(O)$:

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_1(O) + \vec{E}_2(O)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(O) = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\right)\vec{j}}$$

2/d- La relation entre λ et q pour que $\vec{E}(O) = \vec{0}$.

$$E(O) = 0 \Rightarrow \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 2\,\lambda\,R}$$

<u>Exercice 04:</u>

I) Etude de la spire:

a) La direction du champ électrostatique $\vec{E}_s(M)$:

Par raison de symétrie le champ électrostatique créé par la spire est porté par l'axe (ox).

En effet deux éléments de charge dq de longueur dl centre en P et P' symetrique par rapport a (ox), créent en M deux champs élémentaires $\overrightarrow{dE_s}(M)$ et $\overrightarrow{dE_{s'}}(M)$ dont la resultante est portée par l'axe (ox).

b) Le champ électrostatique $\vec{E}_s(M)$:

$$\overrightarrow{dE_s} = -dE\cos\alpha\,\vec{\imath} = -\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha}{PM^2}\,\vec{\imath}$$

or $dq = \lambda\,dl$ et $\cos\alpha = \frac{x}{PM}$

$$PM^2 = x^2 + R^2 \quad \rightarrow \quad PM = \sqrt{x^2 + R^2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{dE_s} = -\frac{\lambda\,dl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha}{(x^2 + R^2)}\,\vec{\imath} = -\frac{\lambda\,dl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2 + R^2)\sqrt{x^2 + R^2}}\,\vec{\imath}$$

avec $dl = Rd\theta$

soit

$$\overrightarrow{dE_s} = -\frac{\lambda x\ Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\ \vec{\imath}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_s = \int \overrightarrow{dE_s} = \int_0^{2\pi} -\frac{\lambda x\ Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\ \vec{\imath}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_s = -\frac{\lambda x\ R}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta\ \ \vec{\imath}$$

d'où

$$\vec{E}_s = -\frac{\lambda x\ R\ 2\pi}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\ \ \vec{\imath}$$

Finalement

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}}_s = \frac{-\boldsymbol{\lambda x\ R}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}}\ \ \vec{\boldsymbol{\imath}}}$$

- **Le Potentiel électrostatique $V_s(M)$**:

  On a $dV_s = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM}$

avec $dq = \lambda\, dl$, $PM = \sqrt{x^2+R^2}$ et $dl = Rd\theta$

$$\Longrightarrow \quad dV_s = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$\Longrightarrow V_s = \int dV_s = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

Finalement

$$\boxed{\boldsymbol{V_s} = \frac{\boldsymbol{\lambda R}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}}}$$

II) Etude du Fil:

a) La direction du champ électrostatique $\vec{E}_f(M)$:

La distribution admet comme plan de symétrie un plan P_1 passant par M et contient l'axe (yy') et un autre plan P_2 perpendiculaire a l'axe (yy'), o deduit alors que le champ est porté par l'axe de directrion $\vec{U}_r$.

- Le système est invariant par rotation autour du fil
- Le système est invariant par translation parallèle au fil

Le champ ne dépend que de la distance du point M au fil

$$\vec{E}_f(M) = \vec{E}_f(r)\vec{u}_r$$

b) Application du théorème de Gauss:

- $\emptyset = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}_f(M).\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
- Surface de Gauss:

Le champ est radial et constant sur un cylindre, la surface de Gauss convenable sera un cylindre de rayon r et de hauteur h.

$$\emptyset = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}_f(M).\overrightarrow{dS}$$

$$= \iint_{S_{b1}} \vec{E}_f(M).\overrightarrow{dS}_{S_{b1}} + \iint_{S_{b2}} \vec{E}_f(M).\overrightarrow{dS}_{S_{b2}} + \iint_{S_L} \vec{E}_f(M).\overrightarrow{dS}_L$$

$$= \underbrace{\left\{\iint_{S_{b1}} E_f(M).\vec{u}_r.\overrightarrow{dS}_{S_{b1}}\vec{k}\right\}}_{=0} + \underbrace{\left\{\iint_{S_{b2}} E_f(M).\vec{u}_r.\overrightarrow{dS}_{S_{b2}}(-\vec{k})\right\}}_{=0} + \iint_{S_L} E_f(M).\vec{u}_r.\overrightarrow{dS}_L$$

$$= \iint_{S_L} E_f(M).\vec{u}_r.\overrightarrow{dS}_L$$

Le champ est constant sur un cylindre

$$\emptyset = \iint_{S_L} E_f(r).dS_L = E_f(r).S_L = E_f(r).2\pi rh$$

- $Q_{int} = \int -\lambda dl = -\lambda \int_0^h dl = -\lambda h$

Les charges sont disposé sur le segment de longueur h d'où:

$$E_f(r).2\pi rh = -\frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad E_f(r) = -\frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}$$

Finalement

$$\boxed{\vec{E}_f(r) = -\frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\vec{u}_r}$$

- **Le potentiel $V_f(M)$:**

On a $\quad \vec{E}_f(M) = -\overrightarrow{grad}\, V_f(M)$

$$E(r)\,\vec{u}_r = -\frac{dV_f(M)}{dr}\,\vec{u}_r$$

$$\rightarrow \; dV_f(M) = -dE(r)\,dr \;\Longrightarrow\; dV_f(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

d'où

$$V_f(M) = \int dV_f(M) = \int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{V_f(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + cste}$$

On a $V_f(r=1) = 0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + cste \;\Longrightarrow \boldsymbol{cste = 0}$

Finalement

$$\boxed{\boldsymbol{V_f(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,ln\, r}}$$

III) Fil +Spire

a) Le champ électrostatique $\vec{E}$:

On a

$$\vec{E} = \vec{E}_s(M) + \vec{E}_f(M) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = a \\ x = a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\vec{E} = \frac{-\lambda a\, R}{2\varepsilon_0(a^2+R^2)^{3/2}}\vec{\imath} - \frac{\lambda}{2\pi a\varepsilon_0}\vec{u}_r}}$$

b) Le potentiel électrostatique $V(M)$:

On a

$$V(M) = V_s(M) + V_f(M)$$

$$\Longrightarrow V(M) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2+R^2}} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,ln\, a$$

Finalement

$$\boxed{\boldsymbol{V(M) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}} + \frac{ln\, a}{\pi}\right)}}$$

<u>Exercice 05:</u>

1) La direction et le sens du champ électrostatique $\vec{E}(M)$:

- La distribution admet comme plans de symétrie, un plan passant par le point M et contenant l'axe zz' et un plan perpendiculaire à l'axe zz'. En déduit alors que le champ $\vec{E}(M)$ est porté par l'itersection de ces plans, c'est a dire l'axe de direction $\vec{u}_r$

$$\Longrightarrow \vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\vec{u}_r$$

- La distribution est invariante par toute rotation autour de l'axe zz'

$$\vec{E}(M) = E_r(r,z)\vec{u}_r$$

- La distribution est invariante par toute translation selon l'axe zz'

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$$

2.

a) Choix de la surface de Gauss

Le champ $\vec{E}(M) = E_r$ est radial et constant sur un cylindre d'axe zz' et de rayon r, la surface de Gauss convenable sera un cylindre de rayon r et de hauteur h.

b) Le champ $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace

- Le théorème de Gauss:

$$\emptyset = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

avec $\boldsymbol{S_{Gauss} = S_{B1} + S_{B2} + S_L}$

où $\boldsymbol{S_{Gauss}}$: La surface de Gauss

$\boldsymbol{S_{B1}}$: Surface de la 1ère base supérieure du cylindre.

$\boldsymbol{S_{B2}}$: Surface de la 2ère base inférieure du cylindre.

$\boldsymbol{S_L}$: Surface Latérale

Donc

$$\emptyset = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint_{S_{B1}} \vec{E}_f(M).\overrightarrow{dS}_{S_{b1}} + \iint_{S_{B2}} \vec{E}_f(M).\overrightarrow{dS}_{S_{b2}} + \iint_{S_L} \vec{E}_f(M).\overrightarrow{dS}_L$$

or $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$

d'où $\emptyset = \iint_{S_{B1}} E_r(r)\,\vec{u}_r.dS\,\vec{n}_{B1} + \iint_{S_{B2}} E_r(r)\,\vec{u}_r.dS\,\vec{n}_{B2} + \iint_{S_L} E_r(r)\,\vec{u}_r.dS\,\vec{n}_L$

$$\text{avec} \begin{cases} \vec{n}_{B1} = \vec{k} \\ \vec{n}_{B2} = -\vec{k} \\ \vec{n}_L = \vec{u}_r \end{cases} \qquad et \qquad \begin{cases} \vec{u}_r.\vec{k} = 0 \\ \vec{u}_r.\vec{u}_r = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \emptyset = \iint_{S_{Gauss}} E_r(r)\,.dS = E_r(r) \iint dS = E_r(r)\,S_L = E_r(r)\,2\pi rh$$

Car la surface du cylindre est égale $2\pi rh$

$$\Longrightarrow \emptyset = \boldsymbol{E_r(r)\,2\pi rh}$$

- **1er cas: $\boldsymbol{r} < R$ (M à l'intérieur de la surface de Gauss)**

On a un cylindre de rayon R , de Longueur infinie, chargé uniformément en **surface**

Donc $Q_{int} = 0 \implies \emptyset = E_r(r)\,2\pi rh = 0 \implies E_r(r) = 0$

$$\boxed{\boldsymbol{E(M) = 0}}$$

- **2eme cas: $\boldsymbol{r} < R$ (M à l'extérieur de la surface de Gauss)**

Donc $Q_{int} = \iint \sigma\, dS$

Les charges uniformement reparties sur la surface du cylindre donc $\sigma = cste$

d'où $Q_{int} = \sigma \iint dS = \sigma\, 2\pi \boldsymbol{R}h$

alors $\emptyset = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = E(r)\,2\pi Rh \implies \frac{\sigma\, 2\pi \boldsymbol{R}h}{\varepsilon_0} = E(r)\,2\pi Rh \implies E(r) = \frac{\sigma\, R}{\varepsilon_0 r}$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{R}}{\boldsymbol{\varepsilon_0 r}} \vec{\boldsymbol{u}}_r}$$

$$\boxed{\textbf{Finalement} \quad \vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{r} < R \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{R}}{\boldsymbol{\varepsilon_0 r}} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{R} \end{cases}}$$

3) Le potentiel $\boldsymbol{V(M)}$ en tout point de l'espace

On a $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,(V)$

Le gradient en coordonnées cylindriques est:

$$\overrightarrow{grad}\,(V) = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{k}$$

puisque $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de θ et z on a alors:

$$E_r(r)\,\vec{u}_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r \implies dV = -E(r)\,dr$$

- **1er cas: $\boldsymbol{r} < R$**

On $E(r) = 0 \implies dV = 0 \implies V = cste$

D'après les conditions au limites pour $r = 0 \implies V = V_0$

d'où

$$\boxed{\boldsymbol{V(M) = V_0}}$$

On le note

$$\boldsymbol{V_{int}(M) = V_0}$$

- **2eme cas: $\boldsymbol{r \geq R}$**

On a $\vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$ et $dV = -E(r)\,dr$

$$V(M) = \int dV = \int \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\,dr = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r) + cste$$

On le note

$$\boldsymbol{V_{ext}(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r) + cste}$$

Pour déterminer la constante en utilisant le continuité du potentiel pour $\boldsymbol{r = R}$

On a

$$V_{int}(r = R) = V_{ext}(r = R) \implies V_0 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(R) + cste \implies cste = V_0 - \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(R)$$

$$\implies V_{ext}(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r) + V_0 - \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(R)$$

d'où

$$\boxed{\boldsymbol{V_{ext}(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0}}$$

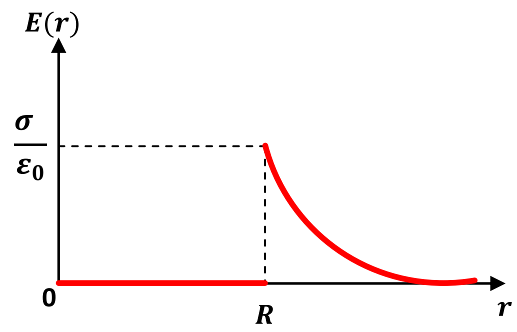
4) Représentation de $\boldsymbol{E(r)}$ et $\boldsymbol{V(r)}$ en fonction de $\boldsymbol{r}$

- **Pour la fonction $\boldsymbol{E(r)}$:**

On a $E(r) = \begin{cases} 0 & si \quad r < R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} & si \quad r \geq R \end{cases}$

Pour $r = R \implies E(r = R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$\lim\limits_{r\to\infty} E(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} = 0$

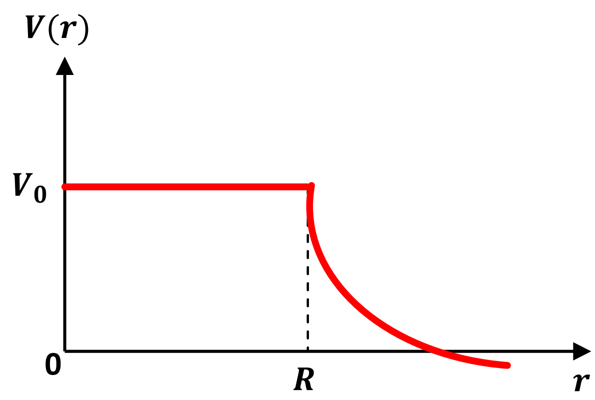


- **Pour la fonction $\boldsymbol{V(r)}$:**

On a $V(r) = \begin{cases} V_0 & si \quad r < R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0 & si \quad r \geq R \end{cases}$

Pour $r = R \implies V(r = R) = V_0$

$\lim\limits_{r\to\infty} V(r) = \lim\limits_{r\to\infty}\left(\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0\right)$



$$= \lim_{r\to\infty} \ln\left(\frac{1}{-\infty}\right) = \lim_{r\to\infty} \ln\left(\frac{1}{-\infty}\right) = \ln(0^-) = -\infty$$

5) Les lignes de champ et les surfaces équipotentielles

- **Lignes de champ:**

Les lignes de champ sont des droites qui partent de la surface du cylindre chargé, leur prolongation passe par l'origine.

- **Les surfaces équipotentielles:**

  $\Longrightarrow V(M) = cste$

  - à l'intérieur $V(M) = cste = V_0$
  - à l'extérieur $V(M) = \frac{\sigma\, R}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0 = C_1 \;\Longrightarrow\; \ln\left(\frac{R}{r}\right) = \frac{\varepsilon_0}{\sigma\, R}\,(C_1 - V_0) = C_2$

$$\ln(R) = \ln(r) - C_2 = C_3 \quad \Longrightarrow \quad r = e^{C_3} = cte$$

- $r = cte \quad \Longrightarrow$ Les surfaces équipotentielles sont des cylindres de même axe que la distribution
-

<u>**Exercice 06:**</u>

1)

a- Symétrie et invariances:

Tout axe passant par le centre de O est un axe de symétrie , le champ est donc porté par OM

$$\Longrightarrow \vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi)$$

ρ étant uniforme $\Longrightarrow$ la charge est invariante par toute rotation autour du centre $O \Longrightarrow E(M)$ est donc indépendant de θ et de φ.

$$\Longrightarrow \vec{E}(M) = \vec{E}(r)\vec{u}_r$$

b- Le champ à l'intérieur et l'extérieur de la sphère:

- **Choix de la surface de Gauss**

La surface de Gauss convenable sera un sphère de centre O et de rayon $r = OM$.

- **Application du Théorème de Gauss:**

$$\emptyset = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\emptyset = E \oiint_{S_{Gauss}} dS = E(r)\, S = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

- **1^er^ cas : à l'intérieur de la sphère ($\boldsymbol{r} < R$)**

$$dq = \rho dV \quad \Rightarrow \quad Q_{int} = \iiint \rho dV \quad \Rightarrow \quad Q_{int} = \rho V_{\text{sphère}}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3}$$

d'où

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\vec{E}(r) = \frac{\rho\, r}{3\, \varepsilon_0}\, \vec{u}_r}}$$

- **2^ème^ cas : à l'extérieur de la sphère ($\boldsymbol{r \geq R}$)**

$$dq = \rho dV \quad \Rightarrow \quad Q_{int} = \iiint \rho dV \quad \Rightarrow \quad Q_{int} = \rho V_{\text{sphère}}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi R^3}$$

d'où

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\vec{E}(r) = \frac{\rho\, R^3}{3\, \varepsilon_0\, r^2}\, \vec{u}_r}}$$

Finalement

$$\begin{cases} \boldsymbol{\vec{E}(r) = \frac{\rho\, r}{3\, \varepsilon_0}\, \vec{u}_r} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{r} < R \\ \boldsymbol{\vec{E}(r) = \frac{\rho\, R^3}{3\, \varepsilon_0\, r^2}\, \vec{u}_r} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{r \geq R} \end{cases}$$

c- le potentiel à l'intérieur et l'extérieur de la sphère

Calculant le potentiel en M à partir de $\vec{E}(M)$:

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M) \Rightarrow \quad \vec{E}(r)\,\vec{u}_r = -\frac{dV}{dr}\,\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow V(M) = -\int \vec{E}(r)\, dr$$

- **1[er] cas : à l'intérieur de la sphère ($\boldsymbol{r} < R$)**

$$E(r) = \frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0} \quad \Rightarrow V(M) = -\int \frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\, dr = -\frac{\rho}{3\,\varepsilon_0}\int r\, dr$$

$$\Rightarrow V(M) = -\frac{\rho\, r^2}{6\,\varepsilon_0} + C_1$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{int}(r) = -\frac{\rho\, r^2}{6\,\varepsilon_0}} + C_1$$

- **2[ème] cas : à l'extérieur de la sphère ($\boldsymbol{r \geq R}$)**

$$E(r) = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2} \Rightarrow V(M) = -\int \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\, dr = -\frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}\, dr$$

$$\Rightarrow V_{ext}(r) = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\; r} + C_2$$

On a $V(\infty = 0) \;\; \Rightarrow C_2 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{V_{ext}(r) = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\; r}}}$$

$C1$ est déduit par la Continuité du potentiel en $r = R$

$$V_{int}(r = R) = V_{ext}(r = R) \;\Rightarrow\; C_1 = \frac{\rho\, R^2}{3\,\varepsilon_0} + \frac{\rho\, R^2}{6\,\varepsilon_0} = \frac{\rho\, R^2}{2\,\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{V_{int}(r) = \frac{\rho}{6\,\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)}}$$

Finalement $\begin{cases} \boldsymbol{V_{int}(r) = \frac{\rho}{6\,\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{r} < R \\ \boldsymbol{V_{ext}(r) = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\; r}} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{r \geq R} \end{cases}$

2. a- Le champ résultant créé par la charge $\boldsymbol{q}$ et la sphère chargée en tout point de l'espace.

Le champ produit en tout point de l'espace est la somme vectorielle des champs produit par la sphère et la charge:

Le champ créé par la charge q est donné par:

$$\vec{E}_q(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$$

d'où

$$\boxed{\begin{cases} \vec{E}(M) = \left(\frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\vec{u}_r & si \quad r < R \\ \vec{E}(M) = \left(\frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{\vec{u}_r}{r^2} & si \quad r \geq R \end{cases}}$$

b- Le potentiel produit en tout point de l'espace, par le système formé par q et la sphère chargée.

Le potentiel produit en tout point de l'espace est la somme vectorielle des champs produit par la sphère et la charge:

Le potentiel créé par la charge q est donné par:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

d'où

$$\boxed{\begin{cases} V(M) = \frac{\rho}{6\,\varepsilon_0}(3R^2 - r^2) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & si \quad r < R \\ V(M) = \left(\frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r} & si \quad r \geq R \end{cases}}$$

c- La valeur de ρ_0 pour que la charge du système formé par q et la sphère chargée est nulle

La charge du système (sphère +q) est nulle si:

$$\rho_0\,\frac{4\pi R^3}{3} + q = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = -\frac{3q}{4\pi R^3}}$$

d- L'expression du champ résultant en tout point de l'espace, en fonction de q et r.

En remplaçant $\rho_0 = -\frac{3q}{4\pi R^3}$ dans l'expression de champ on obtient:

$$\begin{cases} \vec{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{r}{R^3}\right)\vec{u}_r & si \quad r < R \\ \vec{E}(M) = 0 & si \quad r \geq R \end{cases}$$

3)

a- La force électrostatique résultante exercée sur q'.

q' placée à $r \leq R$:

La force $\vec{F}_{/q'}$ subit par q' est donnée par :

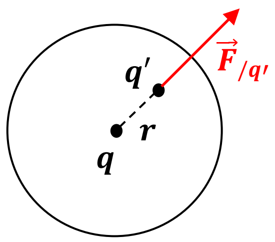
$$\vec{F}_{/q'} = q'\vec{E}(r \leq R)$$

ce qui donne

$$\boxed{\vec{F}_{/q'} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R^3 - r^3}{R^3}\right)\frac{\vec{u}_r}{r^2}}$$

$\vec{F}_{/q'}$ a le même sens que de $\vec{u}_r$

- **Représentation**



b- La valeur de r pour que la charge q' soit en équilibre

pour que la charge q' soit en équilibre il faut que :

$$\vec{F}_{/q'} = 0$$

d'où

$$\boxed{r = R}$$

Exercice 07:

1) Le champ électrostatique $\vec{E}$ étant uniforme et parallèle à AB, les surfaces équipotentielles $V = cste$ sont les plans perpendiculaires à $\vec{E}$ donc à AB.

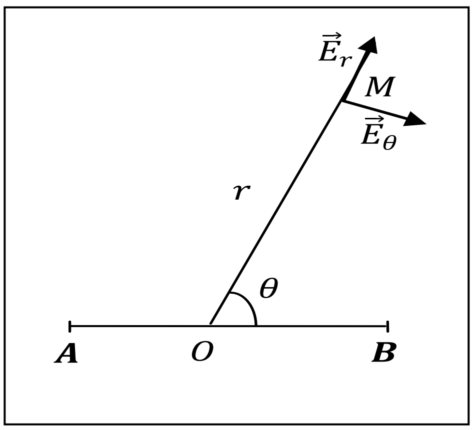
2) Le potentiel $V(M)$

On a $\quad -dV = \vec{E}.\vec{dl}$

avec $\quad \vec{E} = E\cos\theta\,\vec{u}_r - E\sin\theta\,\vec{u}_\theta$

et $\quad \vec{dl} = dr\,\vec{u}_r + r\,\vec{u}_\theta$

$$\Rightarrow -\int_{V(O)}^{V(M)} dV = \int_0^r E\cos\theta\ dr$$



d'où

$$V(O) - V(M) = E_r \cos\theta$$

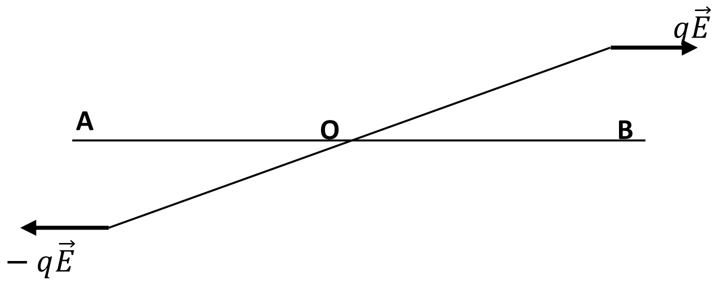
$$\Longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{V(M) = V(O) - E_r \cos\theta}}$$

3)

a- Le dipôle est soumis à un couple de forces de moment:

$$\Gamma = \vec{P} \wedge \vec{E} = q\overrightarrow{AB} \wedge \vec{E} = \vec{0} \qquad (car\ \overrightarrow{AB}//\vec{E})$$

Le dipôle est donc en équilibre ; l'équilibre est stable car , lorsqu'on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de forces $(q\vec{E}, -q\vec{E})$ tend à l y ramener.



b) Le potentiel résultant en M:

Le potentiel résultant en M est :

$$V_M = V_{dipole} + V_{champ\ E}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{V_M = \frac{kP\cos\theta}{r^2} + V_0 - E_r \cos\theta}}$$

c) Surface équipotentielle:

$$\frac{kP\cos\theta}{r^2} - E_r \cos\theta = cste$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\theta\left(\frac{kP}{r^2} - E_r\right) = cste$$

pour que la relation ci dessus soit valable quelle que soit la valeur de θ, il faut que la constante soit nulle, ce qui donne:

- $\boldsymbol{\cos\theta = 0}$: Le plan médiateur de AB est une équipotentielle de potentiel V_0.
- $r^3 = \frac{kP}{E} : r = \left(\frac{kP}{E}\right)^{1/3}$ ce qui correspond à une sphère de centre O et de rayon r.

A.N: $$\boxed{\boldsymbol{r = \left(\frac{9\times10^9\times10^{-9}}{72}\right) = 0.5\ m}}$$

d) Sur la sphère le potentiel V est constant et égal à V_0.