

PARTIE I - ELECTROSTATIQUE

PARTIE I - ELECTROSTATIQUE

INTRODUCTION A L'ELECTROSTATIQUE

Les phénomènes électrostatiques ont été découverts au 6^{ème} siècle avant notre ère, en frottant de l'ambre jaune avec un tissu. C'est cette résine naturelle, au nom grec «*êlektron*», qui est à l'origine du nom «*électron*». On distingua ensuite les corps isolants de ceux conducteurs de l'électricité, puis on mit en évidence une nouvelle caractéristique de la matière, **sa charge électrique** ; on montra alors l'existence de deux catégories de charges électriques, qualifiées l'une positive et l'autre négative. Ces charges sont présentes dans la matière neutre, mais en nombre égal.

La forme de l'interaction électrostatique, entre deux charges ponctuelles au repos a été établie au 19^{ème} siècle par le physicien français Charles Augustin de Coulomb, un siècle après que Newton eut proposé la loi d'interaction gravitationnelle entre deux masses ponctuelles.

Nous avons étudié, en mécanique, l'interaction gravitationnelle qui intervient entre deux corps caractérisés par leurs masses. Nous allons considérer, dans cette partie de ce cours, une autre interaction, l'interaction électrique, qui fait intervenir le concept de charge électrique.

L'électrostatique est la partie de l'électricité qui ne fait intervenir que des charges fixes¹.

Comparée à la gravitation, l'interaction électrostatique a impressionné les physiciens par ses effets spectaculaires. Elle apparaît comme l'une des deux composantes de l'interaction électromagnétique.

Aujourd'hui, elle joue un rôle majeur en physique puisqu'elle gouverne l'ensemble des liaisons atomiques, moléculaires et cristallines et intervient aussi dans le noyau constitué de neutrons et de protons.

¹ Les charges sont fixes dans le référentiel lié à l'observateur.

I - Charges électriques

1- Définition

La charge électrique d'une particule est une grandeur scalaire (algébrique) qui caractérise les actions électromagnétiques subies ou exercée par la particule.

La charge électrique joue dans l'interaction électrostatique le même rôle que joue la masse (scalaire positive) dans l'interaction gravitationnelle.

2- Structure de la matière

La vision moderne de la matière décrit celle-ci comme étant constituée d'atomes. Ceux-ci sont eux-mêmes constitués d'un noyau (découvert en 1911 par Rutherford) autour duquel « gravite » une sorte de nuage composé d'électrons et portant l'essentiel de la masse. Ces électrons se repoussent les uns des autres mais restent confinés autour du noyau car cette dernière possède une charge électrique positive qui les attirent. On attribue cette charge positive à des particules appelées **protons**. Cependant, le noyau atomique ne pourrait rester stable s'il n'était composé que de protons : ceux-ci ont en effet tendance à se repousser mutuellement. Il existe donc une autre sorte de particules, les **neutrons** (découverts en 1932 par Chadwick) portant une charge électrique nulle. Les particules constituant le noyau atomique sont appelées les **nucléons**.

Dans le tableau de Mendeleev tout élément chimique X est représenté par la notation A_ZX . Le nombre A est appelé le nombre de masse : c'est le nombre total de nucléons (protons et neutrons). Le nombre Z est appelé le nombre atomique et est le nombre total de protons constituant le noyau. La charge électrique nucléaire totale est donc $Q = +Ze$, le cortège électronique possédant alors une charge totale $Q = -Ze$, assurant ainsi la neutralité électrique d'un atome.

Il apparait clair que, les particules élémentaires, constituants de la matière, se caractérisent par : Masse, charges (électrons, proton), spin ...

Les valeurs des charges électriques et des masses des constituants atomiques, dans le Système International, sont représenté dans le tableau ci-dessous:

	Charge	Masse
Electrons	$- e = - 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Protons	$+ e = + 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$1.672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutrons	0	$1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Comme on peut le remarquer, même une charge de l'ordre du Coulomb (ce qui est énorme), correspondant à environ 10^{18} électrons, ne produit qu'un accroissement de poids de l'ordre de 10^{-12} kg : c'est effectivement imperceptible.

Si les électrons sont bien des particules quasi-ponctuelles, les neutrons et les protons en revanche ont une taille non nulle (inférieure à 10^{-15} m). Il s'avère qu'ils sont eux-mêmes constitués de **quarks**, qui sont aujourd'hui, avec les électrons, les vraies briques

élémentaires de la matière. Les protons ainsi que les neutrons forment ainsi une classe de particules appelée les **baryons**.

Tout corps contient à la fois des charges positives et des charges négatives.

Dans un corps neutre les charges positives et les charges négatives se compensent, c'est-à-dire que la charge totale est nulle.

a- Si un électron est arraché (ou rajouté) à un atome, on a un **ion**. On note bien que l'atome est neutre.

b- à l'échelle macroscopique, la "charge électrique" portée par un corps correspond à un **défaut** ou un **excès** d'électrons.

c- Les charges mobiles sont, le plus souvent, des électrons.

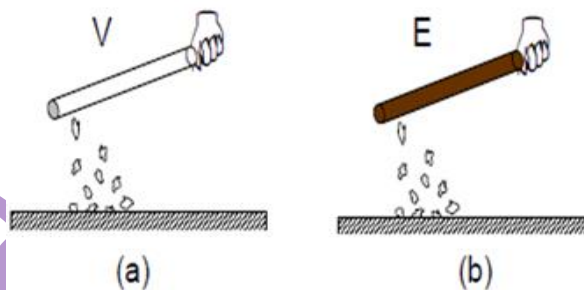
3- Phénomènes d'électrisation de la matière

3- 1- Electrification par frottement ou par friction (triboélectricité)

a- Observation et expérience : Mise en évidence du phénomène

- Une tige en verre bien sèche, frottée à l'aide d'un morceau de drap en soie ou en laine, tenue à la main, attire de petits morceaux de papier¹ (**figure .1. a**). On dit que le verre a été *électrisé*, ce phénomène est appelé *électrisation* et la discipline de la physique qui traite de tels phénomènes est *l'électricité statique*.

- On obtient le même résultat si on remplace la tige en verre par un bâton d'ébonite² et si on répète la même opération (**figure .1. b**).



Figures. 1

¹ Les morceaux de papier peuvent être remplacés par de la cendre ou une substance très légère.

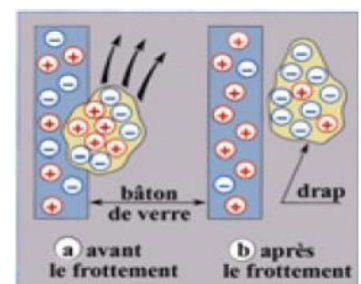
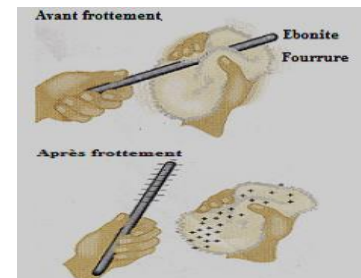
² Ebonite : caoutchouc durci par mélange avec du soufre.

b- Conclusion & Interprétation

Un corps peut être électrisé par frottement

Un corps électrisé par frottement peut acquies la propriété d'attirer des corps légers.

Par frottement d'un corps par un morceau de drap par exemple, il y a transfert d'électrons de l'un vers l'autre : le bâton de verre perd des électrons de drap, ce qui le charge



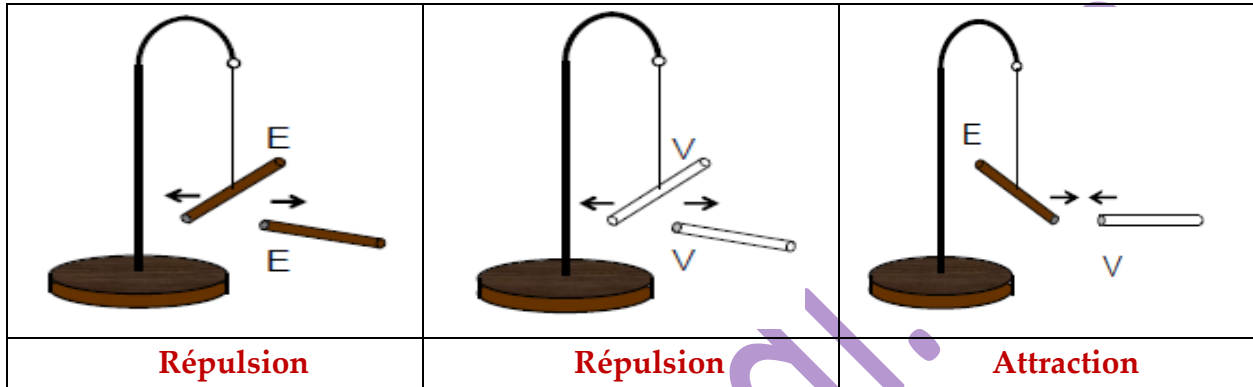
positivement par défaut d'électrons, alors que le drap se charge négativement par excès d'électrons.

Au contraire pour un morceau d'ébonite qui se charge positivement.

Lorsqu'on frotte deux corps l'un contre l'autre, l'un arrache des électrons à l'autre. Le corps qui possède un excès d'électrons est chargé négativement. Le corps qui a perdu des électrons est chargé positivement.

c- Les deux types de charges électriques

a- Expérience



Figures .2 Répulsion et attraction entre corps électrisés

E : Ebonite

V : Verre

Si on électrise une baguette en ébonite par frottement contre un peau de chat et que l'on approche successivement d'autres baguettes électrisés, on s'aperçoit que la baguette repousse les baguettes en ébonite et attire les baguettes en verre.

De même, si on électrise une baguette en verre par frottement contre un morceau de soie et que l'on approche successivement d'autres baguettes électrisés, on s'aperçoit que la baguette attire les baguettes en ébonite et repousse les baguettes en verre.

b- Conclusion : On peut donc en déduire qu'il existe deux sortes d'électricité :

La première apparaît dans le verre : c'est *l'électricité vitreuse* à laquelle on a attribué arbitrairement un *signe positif*.

La seconde se manifeste dans l'ébonite et d'autres résines : c'est *l'électricité résineuse* ; on lui a attribué un *signe négatif*.

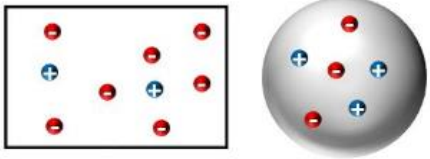
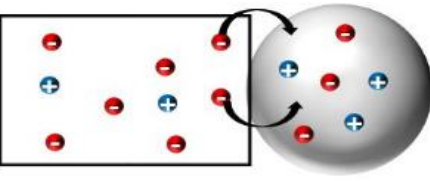
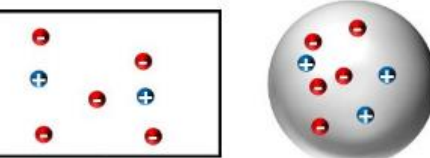
c- Convention : Par convention, l'électricité qui apparaît sur le bâton de verre est notée positivement (+) et celle qui apparaît sur le bâton d'ébonite est notée négativement (-).

- ☀ Deux corps chargés d'électricité de même signe se repoussent ;
- ☀ Deux corps chargés d'électricité de signe contraires s'attirent.

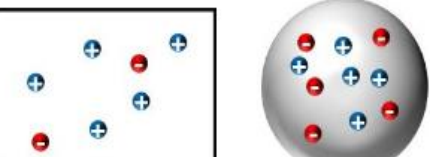
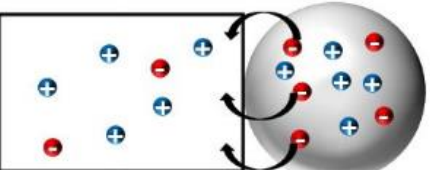
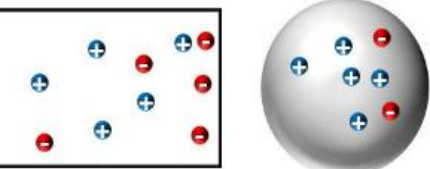
3- 2- Electrification par contact (par conduction)

L'électrification par conduction est le phénomène électrostatique par lequel des charges électriques se déplacent d'une substance vers une autre lorsqu'elles sont mises en contact l'une avec l'autre.

Une deuxième façon d'électriser un objet est de lui transférer par conduction un surplus de charges appartenant à un autre matériau ou encore d'attirer certaines charges à partir d'une autre substance déjà chargée.

<p>Première étape : On approche un objet chargé électriquement de la sphère métallique qui doit être chargée.</p>	
<p>Deuxième étape : Dans un matériel contenant un surplus de charges négatives, une répulsion existe entre les charges en excès. Donc, quand le matériel chargé touche à la sphère, cette répulsion fait en sorte que ce surplus de charges négatives sera réparti dans le matériel chargé ainsi que dans la sphère.</p>	
<p>Troisième étape : lorsqu'on cesse de faire un contact entre les deux objets, la sphère métallique gardera le surplus de charges. Elle aura donc, dans cette situation, une charge négative.</p>	

Si l'objet que l'on approche est chargé positivement, il y a tout de même un déplacement des charges négatives afin de rétablir un équilibre électrique.

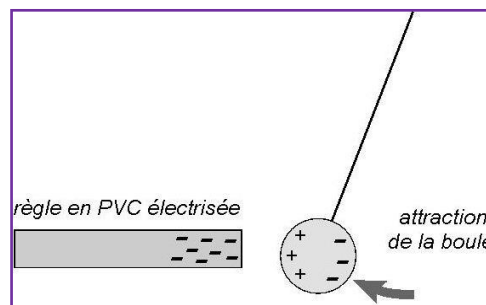
<p>Première étape : On approche un objet chargé électriquement de la sphère métallique qui doit être chargée.</p>	
<p>Deuxième étape : L'objet chargé positivement attire les charges négatives présentes dans la sphère. Les électrons seront transférés de la sphère vers l'objet rectangulaire.</p>	
<p>Troisième étape : lorsqu'on cesse de faire un contact entre les deux objets, la sphère métallique gardera le surplus de charges. Elle aura donc, dans cette situation, une charge positive à la fin du processus.</p>	

Ce n'est que lorsqu'un objet a été chargé positivement ou négativement que l'on observera de l'attraction ou de la répulsion entre les objets, ce qui est en fait la conséquence du phénomène d'électrostatique.

3-3- Electrification par influence (à distance ou par induction)

a- Expérience : On frotte une règle en PVC (matière plastique) avec une fourrure de chat. La règle est ensuite approchée d'un pendule électrostatique. Celui-ci est constitué d'une boule en métal suspendue par un fil non conducteur électriquement. La boule, initialement à la verticale, se déplace alors vers la règle. Car il se crée une dissymétrie dans

la répartition, permettant une attraction, alors que globalement la boule est restée électriquement neutre.



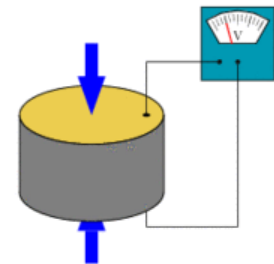
b- Interprétation : En frottant la règle avec la fourrure de chat, elle est électrisée négativement. Quand on approche la règle de la boule. On parle **d'électrisation par influence**.

L'électrisation par influence correspond à une dissymétrie de la répartition des électrons dans un corps sous l'influence d'un autre corps chargé.

3- 4- Electrification par compression (piézoélectricité)

La **piézoélectricité** (du grec *πιέζειν*, *piezein* : presser, appuyer) est la propriété que possèdent certains corps de se polariser électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique et réciproquement de se déformer lorsqu'on leur applique un champ électrique.

Les deux effets sont indissociables. Le premier est appelé effet piézoélectrique *direct*; le second effet piézoélectrique *inverse*. Cette propriété trouve un très grand nombre d'applications dans l'industrie et la vie quotidienne. Une application parmi les plus familières est l'allume-gaz. Dans un allume-gaz, la pression exercée produit une tension électrique qui se décharge brutalement sous forme d'étincelles: c'est une application de l'effet direct. De manière plus générale, l'effet direct peut être mis à profit dans la réalisation de capteurs (capteur de pression...) tandis que l'effet inverse permet de réaliser des actionneurs de précision (injecteurs à commande piézoélectrique en automobile, nanomanipulateur...).



Les matériaux piézoélectriques sont très nombreux. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé aujourd'hui dans les montres pour créer des impulsions d'horloge. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT (**Titano - Zirconate de Plomb**) qui sont le plus largement utilisées aujourd'hui dans l'industrie.

3- 5- Electrification par chauffage (pyroélectricité)

La **pyroélectricité** est la propriété d'un matériau dans lequel un changement de température entraîne une variation de polarisation électrique. Cette variation de polarisation crée une différence de potentiel temporaire, celle-ci disparaissant après le temps de relaxation diélectrique. Cette variation peut générer un courant électrique, ce qui rend ces matériaux utiles pour la détection de radiations ou la production d'électricité. Ils sont tout particulièrement utilisés dans certains détecteurs infrarouges. L'effet

pyroélectrique ne doit pas être confondu avec l'effet thermoélectrique, où un gradient de température fixé donne naissance à une tension permanente. Les cristaux pyroélectriques forment un sous ensemble des cristaux piézoélectriques: 10 des 20 classes cristallines piézoélectriques sont aussi pyroélectriques.

4 – La conservation et l'invariance de la charge électrique

Le principe de conservation de la charge est l'un des principes fondamentaux de conservation qui sont la base de la physique, tels que la conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement, du moment cinétique, ...

La charge totale d'un système n'est pas modifiée par suite du mouvement des charges.

La loi de conservation de la charge est valable en relativité, c'est-à-dire même si la charge se déplace à une vitesse proche de celle de la lumière. On dit que la charge électrique est une grandeur qui est conservée : c'est **un invariant relativiste**.

Des expériences ont permis de montrer que la valeur de la charge d'un électron ne dépend pas de sa vitesse : la valeur est donc la même pour un observateur en mouvement par rapport à la charge. Ce n'est pas le cas de toutes les grandeurs physiques : Par exemple: l'énergie est conservée mais n'est pas un invariant relativiste.

5 - Quantification de la charge

A l'échelle microscopique, l'expérience (Millikan, 1913) montre que la charge électrique varie de façon discontinue et se présente par unité sous forme de quantité bien déterminée. On dit qu'elle est quantifiée. Sa valeur est un multiple entier d'une charge qu'on peut prendre comme charge élémentaire, notée **e**. C'est la valeur absolue de la charge de l'électron $e = 1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ($1 \text{ C} = 6,25 \cdot 10^{18} e$)

Toute charge **Q** est un multiple entier de la charge de l'électron : $Q = \pm n \cdot e$

L'unité de la charge est le coulomb C dans le SI (MKSA) : c'est la quantité de charge transportée par un courant de 1 Ampère pendant 1 seconde ($Q = I t$).

Il faut $6,25 \cdot 10^{18}$ électrons pour obtenir une charge de -1 C et $6,25 \cdot 10^{18}$ protons pour obtenir une charge de 1 C .

C'est un nombre élevé de particules. Dans la pratique, on utilise le mC et le μC . Notons, qu'à l'échelle macroscopique (grand nombre de charge élémentaires) la nature discontinue de la charge n'a plus de sens : la charge électrique paraît être une grandeur susceptible de variation continue.

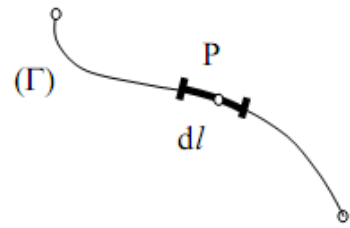
6- Répartition des charges : différentes distributions de charges

6. 1- charges ponctuelles : dimensions négligeables par rapport aux distances entre les charges.

6. 2- Distributions continues de charges – Densité de charges : A l'échelle macroscopique, le nombre de charges élémentaires est si important que la nature discontinue de la charge n'a plus de sens; il en est de même pour la masse puisqu'il ne

nous est pas possible de déceler les protons et les électrons à l'échelle macroscopique. Ceci nous permet de considérer que la répartition de charges dans la matière est continue.

a- distribution linéique : Si la charge Q est répartie sur un fil de longueur L , on définit une densité linéique de charges $\lambda(P)$, à partir de la charge dq portée par un élément dl du fil, entourant le point P :



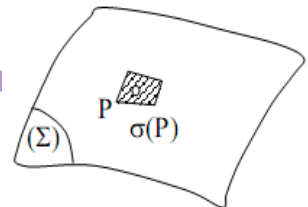
$$dq = \lambda dl \quad \text{avec} \quad \lambda \text{ en C/m}$$

La charge totale du fil est donnée par l'intégrale curviligne :

$$Q = \int_{(\Gamma)} dq = \int_{(\Gamma)} \lambda dl, \quad \text{si } \lambda = \text{cste}, \text{ alors } Q = \lambda L$$

λ : Densité de charges linéique (C.m⁻¹)

b- distribution surfacique : Lorsque la charge Q est répartie sur une surface S , on définit une densité surfacique de charges $\sigma(P)$ à partir de la charge dq portée par un élément de surface dS , entourant le point P :



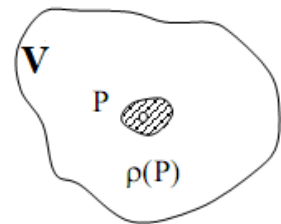
$$dq = \sigma ds \quad \text{avec} \quad \sigma \text{ en C/m}^2.$$

Dans ce cas, la charge totale d'une surface (S) est donnée par l'intégrale sur la surface :

$$Q = \iint_{(\Sigma)} dq = \iint_{(\Sigma)} \sigma ds, \quad \text{si } \sigma = \text{cste}, \text{ alors } Q = \sigma S$$

σ : Densité de charges surfaciques (C.m⁻²)

iii- distribution volumique : Lorsque la charge Q est répartie sur un volume V , on définit une densité volumique de charges $\rho(P)$ à partir de la charge dq contenue dans un élément de volume $d\tau$ entourant le point P :



$$dq = \rho d\tau \quad \text{avec} \quad \rho \text{ en C/m}^3$$

La charge totale Q dans le volume V s'obtient à partir de l'intégrale de volume :

$$Q = \iiint_{(V)} dq = \iiint_{(V)} \rho d\tau, \quad \text{si } \rho = \text{cste}, \text{ alors } Q = \rho V$$

ρ : densité de charges surfaciques (C.m⁻³)

La densité de charges $\rho(P)$ est une fonction de point scalaire qui peut subir de grandes variations d'un point à l'autre de la distribution. En effet, la charge est nulle dans l'espace vide entre un noyau et un électron et prend une valeur différente de zéro en un point situé sur le noyau ou l'électron. En conséquence $\rho(P)$ pourrait avoir des valeurs très différentes suivant le choix du volume élémentaire $d\tau$. Pour que la définition de $\rho(P)$ ait un sens, c'est à dire qu'elle soit indépendante de la forme exacte de $d\tau$, il faut considérer un élément de volume $d\tau$ qui soit grand par rapport aux dimensions atomiques, mais très petit par

rapport aux dimensions de la distribution de charges. Celle-ci correspond alors à un système macroscopique et $\rho(P)$ pourra être considéré comme une densité volumique de charges, moyennée sur le volume $d\tau$. Cette description est valable tant que l'on s'intéresse à une description macroscopique (en opposition à microscopique) du système de charges.

7- Les divers états de la matière

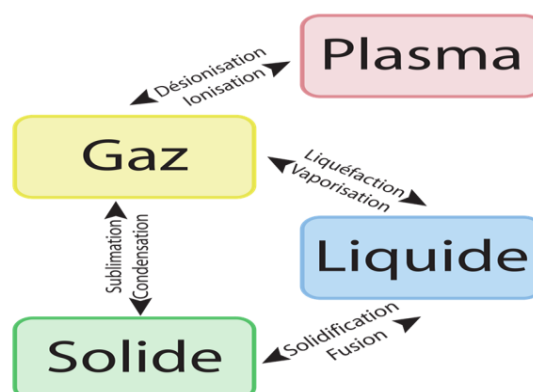
La cohésion de la matière est due à l'interaction entre ses constituants, interaction mettant en jeu une énergie de liaison. Or, chaque constituant (atome ou molécule) possède lui-même de l'énergie cinétique liée à sa température (énergie d'agitation thermique). La rigidité d'un état particulier de la matière dépend donc de l'importance relative de ces deux énergies (cinétique et liaison).

Si l'on prend un **gaz** constitué d'atomes (ou de molécules) neutres, alors l'interaction entre deux constituants est assez faible : elle ne se produit que lorsqu'ils sont assez proches pour qu'il y ait répulsion entre les électrons périphériques. Ainsi, chaque atome est relativement libre de se déplacer dans l'espace, au gré des « collisions » avec d'autres atomes.

Si l'on refroidit ce gaz, certaines liaisons électrostatiques qui étaient négligeables auparavant peuvent devenir opérantes et l'on obtient alors un **liquide**. Si l'on chauffe ce gaz, de l'énergie est fournie à ses constituants, les molécules se brisent et, si l'on continue à chauffer, on peut même libérer un ou plusieurs électrons périphériques des atomes, produisant ainsi un gaz d'ions ou **plasma**.

Dans un **solide** au contraire, les liaisons entre chaque atome sont beaucoup plus fortes et les atomes ne bougent quasiment pas, formant un cristal. La force de cette cohésion dépend beaucoup d'un solide à l'autre. Ainsi, elle est très puissante si les atomes mettent en commun leur cortège électronique (liaison covalente comme pour le diamant et liaison métallique, comme pour le Cuivre) et beaucoup plus faible si les cortèges électroniques de chaque atome restent intouchés (liaison ionique, comme pour le sel).

Enfin, **la matière molle** (caoutchouc, plastiques, textiles, mousses) possède une hiérarchie du point de vue de sa cohésion : elle est constituée d'éléments « solides » (macromolécules liées par des liaisons covalentes) interagissant entre eux par des liaisons ioniques (électrostatiques).



8- Matériaux isolants et matériaux conducteurs

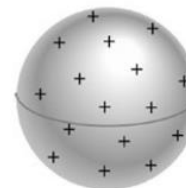
Dans la matière, les charges électriques peuvent être « libres » (ou quasiment), ou alors « liées » (électron lié à un ion, particule chargée adsorbée, etc.). On distingue au point de vue du comportement électrique trois états de la matière: conducteur (ou métallique), semi-conducteur et isolant (ou diélectrique), dont la présentation relève du cadre d'un cours de physique du solide.

✦ **Isolant** ou diélectrique : les électrons sont fortement liés aux atomes, il n'y a pas des électrons libres. Lorsque une charge électrique est créée, elle ne peut pas se déplacer (bois, verre, papier ...).



Isolant: - charges à mobilité réduite;
- localisées en zone de production
- Ex.: bois, plastiques, air,

✦ **Conducteur** (liaison métallique) : toute charge créée sur un matériau se répartit sur la surface. Les électrons libres permettent le déplacement de cette charge.



Conducteur: - charges mobiles
- se répartissent uniforme
(répulsion mutuelle)
- ex.: métaux

Remarque : Les gaz sont formés de molécules neutres, ce sont des isolants. Les gaz ionisés sont conducteurs.

✦ **Semi -conducteur**

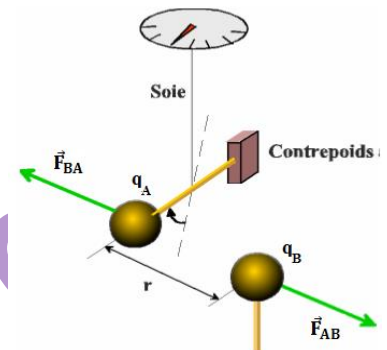
II- interactions électrostatiques: Loi de coulomb (Principe fondamentale de l'électrostatique)

Nous commencerons par l'analyse d'interaction électrostatique dans le cas de charges ponctuelles; ce n'est donc qu'une idéalisation mathématique d'un système physique. La généralisation de ces notions au cas d'une distribution continue de charges sera faite par la suite.

1- Mise en évidence : Expérience de Coulomb (1736 – 1806)

C'est en 1785, que le physicien français Charles Augustin Coulomb établit expérimentalement la loi donnant la force existant entre deux charges électriques.

Pour mesurer les forces, Coulomb se servit d'une balance de torsion dans laquelle un dispositif en forme de haltère constitué d'une petite sphère métallique de charge q_A et d'un contrepoids est suspendu à un fil de soie (voir figure).



Lorsqu'on approche de la sphère suspendue une autre sphère de charge q_B , la force de répulsion existant entre les deux sphères provoque la rotation de l'haltère et une torsion du fil de soie. A l'équilibre, la distance entre les deux sphères est r et la force exercée par le fil tordu compense exactement la force électrique F existant entre les deux sphères. La mesure de l'angle de torsion permet dès lors de déduire la valeur de la force électrique.

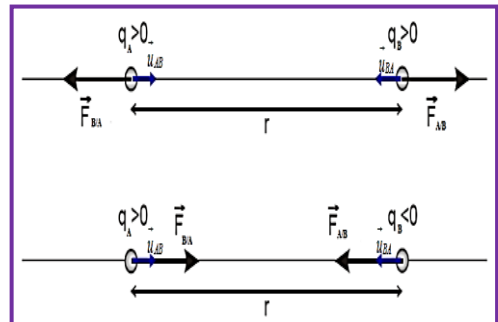
En faisant varier séparément la distance r et les charges q_A et q_B portées par les deux sphères, Coulomb a observé que la force électrique est proportionnelle à chacune des charges q_A et q_B et inversement proportionnelle au carré de la distance entre elles, ce qui se résume par :

$$F_{AB} \propto q_A$$

$$F_{BA} \propto q_B$$

$$F_{AB} F_{BA} \propto \frac{1}{r^2}$$

En d'autres termes : $\|\vec{F}_{AB}\| = F_{AB} = k \frac{|q_A \times q_B|}{r^2}$



Où k est une constante de proportionnalité qui dépend du choix d'unité. Dans le SI, k prend la valeur suivante :

$$\text{Avec } k \approx 9.10^9 \text{ (SI)}(\text{Nm}^2\text{C}^{-2})$$

Pour des raisons qui sortent du cadre de ce cours, cette constante est souvent écrite en fonction d'une autre constante ϵ_0 , qui est appelée permittivité du vide; elle est définie par la relation suivante : $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

Ce qui permet de calculer sa valeur en fonction de celle de k . La permittivité du vide vaut :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} = \frac{1}{4\pi k} \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ (SI)}(\text{C}^2/\text{Nm}^2)$$

ϵ_0 : Constante universelle appelée constante diélectrique ou permittivité électrique du vide.

Dans ses expériences Charles Auguste de Coulomb en 1785 a mise en évidence :

- a- La force est radiale, c'est à dire dirigée selon la droite qui joint les deux charges ;
- b- Elle est proportionnelle au produit des charges : attractive si elles sont de signe opposé, répulsive sinon;
- c- Enfin, cette force varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux charges.

On remarquera l'analogie qui existe entre la loi de Coulomb et la loi de la gravitation universelle. Les charges électriques jouent ici le rôle des masses.

L'expression de la force de coulomb donne le module de la force qui existe entre deux charges électriques. Le vecteur force électrique est dirigé suivant la droite qui relie les charges q_A et q_B , vers l'autre charge si les charges sont de signes opposés, dans le sens contraire si les charges sont de même signe (voir figure).

a- Charges de signes opposés : $q_A \times q_B < 0 \rightarrow$ attraction

b- Charges de même signe : $q_A \times q_B > 0 \rightarrow$ répulsion

En accord avec la troisième loi de Newton, on a : $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

où \vec{F}_{AB} est la force exercée par q_B sur q_A et \vec{F}_{BA} , la force exercée par q_A sur q_B .

La loi de Coulomb peut s'exprimer sous forme vectorielle de la manière suivante :

$$\vec{F}_{AB} = K \frac{q_A \times q_B}{r^2} \vec{u}_{AB} \quad \text{avec } r = \|\overline{AB}\| \quad \text{et } \vec{u}_{AB} \text{ est le vecteur unitaire } \overline{AB}.$$

2- Enoncé de la loi de Coulomb

Comme on vient de le voir, deux particules (ou corps) chargées sont en interaction. On appelle force de Coulomb la force qui s'exerce entre deux charges fixes q_A et q_B séparées par une distance r , on modélise l'effet de q_A et q_B comme suit:

$$\vec{F}_{AB} = k \frac{q_A \times q_B}{r^2} \vec{u}_{AB} \quad \text{avec } r = \|\overline{AB}\| \quad \text{et } \vec{u}_{AB} \text{ est le vecteur unitaire } \overline{AB}.$$

L'intensité de la force :

$$\|\vec{F}_{AB}\| = F_{AB} = k \frac{|q_A \times q_B|}{r^2}, \quad \text{Avec } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9.10^9 \text{ (SI)(Nm}^2\text{C}^{-2}\text{)}$$

$$\text{Ou } \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ (SI)}$$

D'après le principe de l'action et de la réaction, on modélise l'effet de q_B et q_A comme suit:

$$\vec{F}_{BA} = k \frac{q_A \times q_B}{r^2} \vec{u}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

On note que : $\vec{u}_{BA} = -\vec{u}_{AB}$

3- Validité de la loi de Coulomb

La loi de Coulomb est valable pour des charges au repos où à la limite en mouvement relatif lent, sinon apparition des forces électromagnétiques. Elle est aussi valable dans le vide et approximativement dans l'air.

La loi de Coulomb reste valable pour les très grandes distances dans le domaine microscopique ; jusqu'à 10^{-15} m, ordre de grandeur des dimensions du noyau atomique.

Cette loi n'est pas valable pour des distances inférieures à 10^{-15} m (dimension du noyau atomique). Dans ce dernier cas ($r < 10^{-15}$ m), il sera nécessaire de faire appel à la mécanique quantique pour l'étude du comportement des particules sous l'effet des forces coulombiennes.

Dans d'autres milieux linéaires homogènes et isotropes (l.h.i.), l'interaction électrostatique est bien décrite par la loi de Coulomb à condition de remplacer ϵ_0 par une constante ϵ différente qui tient compte de l'influence du milieu (ses caractéristiques électriques). ϵ s'appelle la permittivité diélectrique du milieu et l'on pose dans ce cas $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ où ϵ_r est la permittivité diélectrique relative du milieu (quantité sans dimension).

4- Analogie avec l'interaction de gravitation

Deux points matériels de masse m_A et m_B , placés respectivement en M_A et M_B exercent l'un sur l'autre une force de gravitation ; la force $\vec{F}_{AB}(g)$ exercée par m_A sur m_B est :

$$\vec{F}_{AB}(g) = -G \frac{m_A \times m_B}{r^2} \vec{u}_{AB}$$

Où G est la constante de gravitation universelle.

La force de gravitation à la même formulation mathématique que la force électrostatique : elle est portée par la droite qui joint les masses m_A et m_B et inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare les deux masses, mais elle est toujours attractive.

D'après le cours de mécanique du point, la force de gravitation joue un rôle fondamental dans la mécanique des objets macroscopiques et dans la dynamique céleste. Cependant, à l'échelle atomique et subatomique, la force de gravitation est négligeable.

Comparaison de la force électrostatique à la force d'attraction universelle

A titre d'exemple, comparons la force de gravitation qui s'exerce entre l'électron et le proton d'un atome d'hydrogène à la force électrostatique s'exerçant entre eux. La distance r qui sépare l'électron de masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg du proton de masse $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg est environ $5 \cdot 10^{-11}$ m.

$$\|\vec{F}_e\| = F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{(5 \times 10^{-11})^2} = 9 \times 10^{-8} \text{ N}$$

$$\|\vec{F}_g\| = F_g = G \frac{m_e \times m_p}{r^2} = 6.7 \times 10^{-11} \frac{(9.11 \times 10^{-31}) \times (1.7 \times 10^{-27})}{(5 \times 10^{-11})^2} = 4 \times 10^{-47} \text{ N}$$

Avec $G = 6.67 \times 10^{-11}$ (SI)

$$\frac{F_e}{F_g} = 2.25 \times 10^{39} \quad \Leftrightarrow \quad F_e = 2.25 \times 10^{39} F_g$$

La force électrostatique est 10^{39} fois supérieure à la force de gravitation. On peut alors s'étonner du fait que dans notre vie quotidienne, nous ne ressentons pas de manifestations de ces forces énormes d'origine électrique.

5- Principe de superposition (Force électrostatique exercée par un ensemble de charges sur une charge q)

Considérons trois charges ponctuelles q_1 , q_2 et q fixées respectivement en P_1 , P_2 et M (Figure 2).

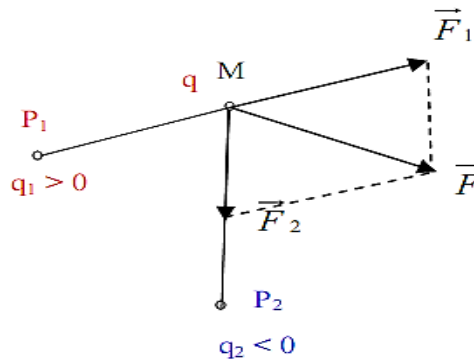


Figure 2

Quelle est la force \vec{F} que subit la charge q placée en présence des charges q_1 et q_2 ?

La loi de Coulomb permet de calculer la force \vec{F}_1 subie par la charge q lorsqu'elle est uniquement en présence de q_1 . On peut de la même manière calculer \vec{F}_2 , force subie par q lorsque seule q_2 est en présence de la charge q .

L'expérience montre que la force \vec{F} subit par q lorsqu'elle est en présence des deux charges q_1 et q_2 est la somme vectorielle des forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{q q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{P_1M}\|^2} \vec{u}_1 + \frac{q q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{P_2M}\|^2} \vec{u}_2 = \frac{q q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P_1M}}{\|\vec{P_1M}\|^3} + \frac{q q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P_2M}}{\|\vec{P_2M}\|^3}$$

Avec $\vec{u}_1 = \frac{\vec{P_1M}}{\|\vec{P_1M}\|}$ et $\vec{u}_2 = \frac{\vec{P_2M}}{\|\vec{P_2M}\|}$

Ce résultat est vérifié quel que soit le nombre de charges en présence. La force \vec{F} subie une charge q placée en M , en présence de n charges $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ fixes en $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$ est la somme vectorielle des forces dues à l'interaction de chacune des charges avec q , calculées séparément :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = q \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{\|\vec{P_iM}\|^2} = q \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P_iM}}{\|\vec{P_iM}\|^3} \quad (***)$$

Cette expression exprime le principe de superposition. La force totale \vec{F} due à un ensemble de charges est la somme vectorielle de l'effet de chaque charge prise individuellement. Ce qui suppose que la force s'exerçant entre deux charges n'est pas modifiée par la présence d'une troisième charge. Il y a donc indépendance des effets : la solution est simplement la somme des solutions calculées pour chaque couple de charges. Il en résulte que les équations de l'électrostatique sont des équations linéaires.

Cependant, il ne faut pas en déduire que c'est un principe général en physique. En effet, le principe de superposition ne s'applique pas toujours; par exemple, dans le domaine atomique ou subatomique, des effets quantiques de nature électromagnétique, non linéaires peuvent apparaître.

I- Champ électrostatique dans le vide

1- Définition d'un champ crée par une charge ponctuelle

Considérons la force électrostatique \vec{F} tel que :

$$\vec{F} = \frac{q q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{q q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{PM}\|^2} \vec{u}$$

Divisons cette expression par la charge q' .

Nous obtenons une grandeur vectorielle qui dépend de la charge q et de la position du point M : cette grandeur est appelée le champ électrostatique $\vec{E}(M)$, crée au point M par q fixée en P .

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{PM}\|^2} \vec{u} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u}$$

avec $\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|}$ et $r = \|\vec{PM}\|$

Si $q' > 0$: \vec{E} et \vec{F} ont même direction et même sens ;

Si $q' < 0$: \vec{E} et \vec{F} ont même direction et de sens opposés.

\vec{E} est le champs électrostatique crée par la charge ponctuelle q (= Charge source)

Si $r \rightarrow \infty$, $\vec{E} \rightarrow 0$

Si $r \rightarrow 0$, la charge n'est plus considéré ponctuelle.

- 📌 La direction de \vec{E} : droite passant par la charge source et le point M .
- 📌 Le sens de \vec{E} dépend de q ;
- 📌 Le champ crée par une charge ponctuelle est radial.

$q > 0 \Rightarrow \vec{E}$ centrifuge (s'éloigne de q)	$q < 0 \Rightarrow \vec{E}$ centripète (dirige vers q)

Remarque : le champ électrique diminue en fonction de r . Tous les points à la surface de la sphère centrée sur la charge ponctuelle ont même valeur du champ. Ils constituent une ligne équipotentielle (nous reviendrons sur cette notion).

2- Distribution de charges ponctuelles : Principe de superposition

i- Champ électrique crée par deux charges ponctuelles

Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 placées respectivement en M_1 et M_2 distants de r_1 et r_2 d'un point M . Au point M considéré, on place le champ \vec{E}_1 crée par q_1 , et le champ

créé par \vec{E}_2 . Le champ résultant est donné par la somme vectorielle des champs qui se superposent : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

Exemples de calcul : (Deux charges ponctuelles identiques $q_1 < 0$)

Le champ électrique en M est donc la superposition ou la somme du champ créée par la charge q_1 en A et de celui créée par q_1 en B :

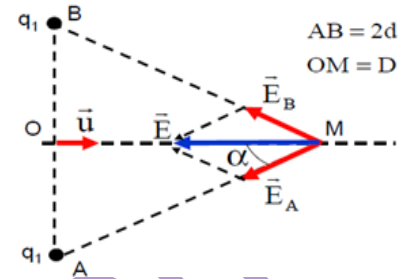
$$\vec{E}_A(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{\|\vec{AM}\|^2} \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|} \quad \text{et} \quad \vec{E}_B(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{\|\vec{BM}\|^2} \frac{\vec{BM}}{\|\vec{BM}\|}$$

$$\Rightarrow \|\vec{E}\| = 2 \|\vec{E}_A(M)\| \cos\alpha$$

$$\|\vec{E}_A(M)\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|}{(D^2+d^2)} = \|\vec{E}_B(M)\| \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{D}{\sqrt{(D^2+d^2)}}$$

$$\Rightarrow \|\vec{E}\| = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|}{(D^2+d^2)} \frac{D}{\sqrt{(D^2+d^2)}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|D}{(D^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|D}{(D^2+d^2)^{3/2}} \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$$



ii- Action d'un système $q_1, q_2, q_3, \dots, q_i, \dots, q_n$ sur une charge q_0 en M

Considérons la force \vec{F} définie par (***) et on la divise par la charge q_0 .

Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$, créé au point M par le système de chargées $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ fixées en $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$, dépend de la structure des n charges et de la position du point M . il s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}}{q} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P_iM}}{\|\vec{P_iM}\|^3} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{\|\vec{r}_i\|^2}$$

$$\vec{u}_i = \frac{\vec{P_iM}}{\|\vec{P_iM}\|} \quad \text{et} \quad \vec{r}_i = \|\vec{P_iM}\|$$

Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ qui résulte de \vec{F} est la somme vectorielle des champs $\vec{E}_i(M)$ créés par les charges q_i :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i(M)$$

Où $\vec{E}_i(M)$ est le champ créé en M par la charge q_i ponctuelle placée en P_i (**Figure 3**)

$$\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P_iM}}{\|\vec{P_iM}\|^3} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{\|\vec{r}_i\|^2}$$

Nous venons de définir une grandeur vectorielle, fonction du point M , caractéristique du système de charges $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$, sources du champ \vec{E} (**Figure 3**).

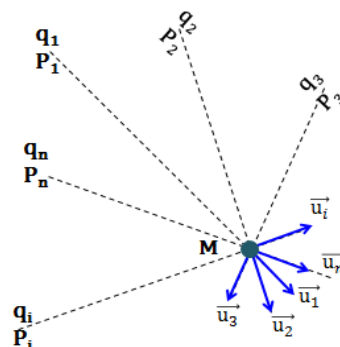


Figure 3

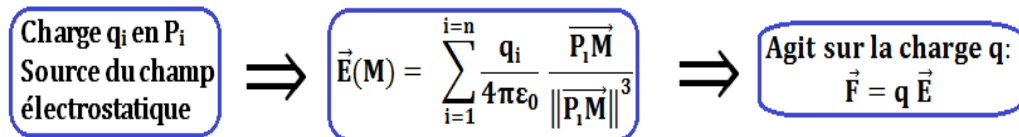
Remarque : Le champ ne dépend que des sources, et pas de la charge au point M ;

L'introduction du champ \vec{E} aboutit à une nouvelle description de l'interaction électrostatique. Nous avons remplacé l'action à distance contenue dans la loi de Coulomb par la notion de champ électrostatique, grandeur locale.

Au lieu de considérer les charges q_i et q en présence interagissant par l'intermédiaire de la force de Coulomb :

$$\text{Charge } q_i \text{ en } P_i \Rightarrow \text{Charge } q \text{ soumise à } \vec{F} = q \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}_i\vec{M}}{\|\vec{P}_i\vec{M}\|^3}$$

On exprime le champ \vec{E}_i créé par la charge q_i dans tout l'espace entourant cette charge. Ce champ existe indépendamment du fait qu'il existe ou non une autre charge q en présence de la charge q_i , source du champ \vec{E}_i . La force \vec{F} subie par q placée en M résulte de l'existence en ce point d'un champ électrostatique :



Remarque :

Le champ $\vec{E}(M)$ présente deux caractéristiques :

- La première réside dans le fait que $\vec{E}(M)$ est de la forme $f(r)\vec{u}_r$, propriété que nous exploiterons dans le calcul de la circulation de E et qui conduira à la définition du potentiel électrostatique.
- La deuxième caractéristique est la forme de $f(r)$, en $1/r^2$, propriété que nous exploiterons dans le calcul du flux de \vec{E} et qui conduira au théorème de Gauss. Les résultats que nous obtiendrons seront valables pour tout champ de la forme $f(r)\vec{u}_r = \frac{\vec{u}_r}{r^2}$, en particulier le champ de gravitation.

iii) Exercice d'application

Soit un carré ABCD et O son centre. La charge $q = 1 \mu\text{C}$ placée en A crée en O le champ électrostatique $E_0 = 2.10^3 \text{ V/m}$. Déterminer le champ électrostatique créé en O lorsqu'on place en A, B, C et D la même charge $q = 1 \mu\text{C}$.

3- Champ électrostatique créé par une distribution de charges continue

Nous savons déterminer le champ électrostatique créé par une distribution de charges ponctuelles :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}_i\vec{M}}{\|\vec{P}_i\vec{M}\|^3} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{\|\vec{r}_i\|^2}$$

Comment calculer le champ créé par une distribution continue ?

Pour calculer le champ créé par une distribution de charges, la distribution de charges peut être découpée en éléments de volume ou de surface ou de courbe qui portent une charge élémentaire dq . Chacune de ces charges élémentaires crée un champ électrostatique

appelé élémentaire. Le champ crée par toute la distribution est, par application du principe de superposition, la somme des charges élémentaires créées par les charges dq.

3- 1- Cas d'une distribution de charges linéique

On considère une portion de courbe $\Gamma = AB$ portant une densité linéique de charge λ .

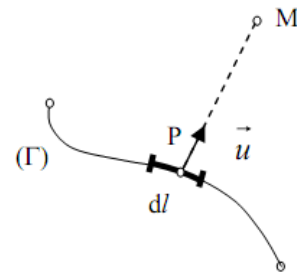
Un élément dl entourant un point P porte une charge :

$$dq = \lambda \times dl$$

Cette charge crée en M un champ donné par les expressions suivantes :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)dl}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)dl}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

Avec $\vec{PM} = \|\vec{PM}\|\vec{u} = r \vec{u}$



D'où le champ total $\vec{E}(M)$ créé en M par toute la distribution linéique de charge s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda(P)dl}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda(P)dl}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

Cette dernière relation n'est valable que si le fil est de dimension finie.

Remarque

On peut montrer que le champ $\vec{E}(M)$ ne sont pas définis en un point M situé sur le fil chargé.

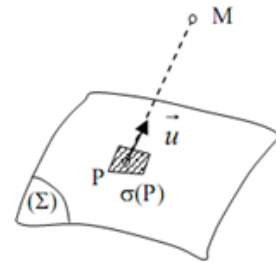
3- 2- Cas d'une distribution de charges surfacique

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges, on considère une charge dq portée par un élément de surface dS.

Le champ crée en M par dq sont donnés par :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)ds}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)ds}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

Avec $\vec{PM} = \|\vec{PM}\|\vec{u} = r \vec{u}$



D'où le champ total $\vec{E}(M)$ créé par les charges réparties sur la surface Σ :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Sigma)} \frac{dq}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{\sigma(P)ds}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{\sigma(P)ds}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

Cette relation suppose que la distribution de charges s'étend sur une surface de dimension fini. Dans le cas contraire, on choisira comme origine des potentiels un point à distance finie.

Remarque

Le champ \vec{E} n'est pas défini sur une surface chargée. Il subit une discontinuité à la traversée de la face chargée.

3- 3- Cas d'une distribution de charges volumique

Soit une distribution volumique de charges contenue dans le volume V ; $\rho(P)$ est la densité volumique de charges en un point P du volume V.

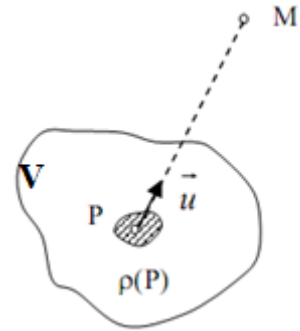
La charge contenue dans l'élément de volume entourant le point P est :

$$dq = \rho(P)d\tau$$

Cette charge crée en M un champ $d\vec{E}$ comme le ferait une charge ponctuelle dq placée en P:

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)d\tau}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)d\tau}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

Avec $\vec{PM} = \|\vec{PM}\|\vec{u} = r \vec{u}$



D'après le principe de superposition, le champ total $\vec{E}(M)$ créé par la distribution est la somme des contributions $d\vec{E}(M)$:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{dq}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P)d\tau}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P)d\tau}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

Il faut donc calculer une intégrale de volume pour obtenir le champ $\vec{E}(M)$.

Remarque

On peut montrer que le champ \vec{E} est défini en un point M intérieur à la distribution de charges.

II - Potentiel électrostatique dans le vide

1 – Introduction

Le potentiel électrostatique $V(M)$ associé au champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est une fonction scalaire contrairement à $\vec{E}(M)$.

Nous verrons, dans beaucoup de cas, que le potentiel sera un intermédiaire commode dans le calcul du champ vectoriel $\vec{E}(M)$. Le potentiel se rattache physiquement à la notion d'énergie potentielle, d'où son appellation.

2- Circulation du champ électrostatique : le potentiel électrostatique

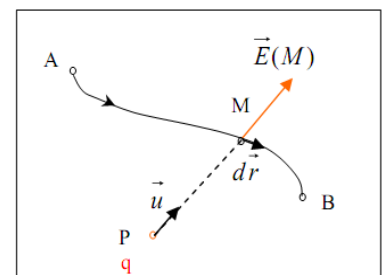
2- 1 – Potentiel électrostatique

a- Cas d'une seule charge ponctuelle : Considérons une charge ponctuelle q (>0) fixée en P et un point M de l'espace :

La charge ponctuelle q fixée en P crée en tout point M de l'espace un champ électrostatique donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2}$$

Avec $\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|}$: vecteur unitaire dirigé de P vers M.



La circulation élémentaire dC du champ \vec{E} correspondant à un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ du point M sur la courbe AB est :

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

Or, $d\vec{r} = d(\overline{PM}) = d(r\vec{u}) = dr \vec{u} + r d\vec{u} \Rightarrow \vec{u} \cdot d\vec{r} = \vec{u} \cdot (dr \vec{u} + r d\vec{u}) = dr + r \vec{u} \cdot d\vec{u}$

Donc $d\vec{r} \cdot \vec{u} = dr$ sachant que $\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$

La circulation élémentaire dC s'écrit alors : $dC = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -d(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r})$

Posons alors, $dC = \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV(r)$

V est le potentiel électrostatique $V(M)$ crée par la charge q fixée en M : $V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \text{cste}$

Le potentiel électrostatique est un scalaire défini à une constante près. On choisit en général la valeur de la constante de telle sorte que le potentiel soit nul lorsque le point M est infiniment éloigné de la charge :

$V(r \rightarrow \infty) = 0$. Dans ce cas, la constante est nulle et le potentiel s'écrit :

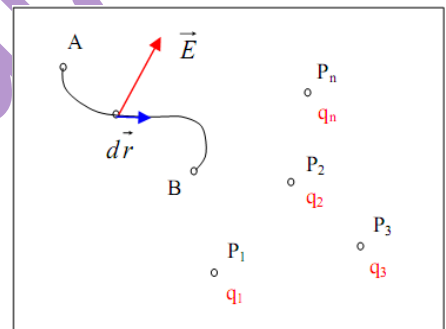
$$V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

L'unité du potentiel électrostatique dans le système MKSA est le **Volt (V)**.

L'unité du champ électrostatique est le Volt par mètre (V/m).

b- Cas d'une distribution de n charges ponctuelles :

Soient n charges ponctuelles $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ fixés aux points $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$. Soit M un point de l'espace.



Calculons la circulation élémentaire dC_i du champ \vec{E}_i créée par la charge q_i seule :

$$dC_i = \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -dV_i(r)$$

Avec : $\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P_iM}}{\|\vec{P_iM}\|^3} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2}$ et $\vec{P_iM} = r_i \vec{u}_i$

Ainsi, le potentiel électrostatique $V_i(M)$ dû à la charge q_i :

$$V_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} \quad \text{Avec } r_i = \|\vec{P_iM}\|$$

Le potentiel $V(M)$ dû à l'ensemble de n charges est la somme des potentiels en application du principe de superposition :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{i=n} V_i(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

Dans cette relation, nous avons choisi la constante nulle pour chaque potentiel V_i créée par la charge q_i ; ceci n'est pas valable que si les charges q_i sont réparties dans un volume fini.

Remarque : $\vec{E}(P_i)$ et $V(P_i)$ ne sont pas définis aux points P_i (points où se trouvent les charges).

2. 2 – Relation entre champ et potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique a été défini à partir de la circulation élémentaire du champ \vec{E} :

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV \quad \text{Or, } dV = \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot d\vec{r}$$

D'où la relation entre \vec{E} et V : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}V}$: **Relation locale**

Par l'intermédiaire de cette relation locale, on peut déterminer l'une de ces deux grandeurs à partir de l'autre.

Cette relation implique des conditions de continuité et de dérivabilité sur la fonction $V(M)$.

Le champ électrostatique \vec{E} dérive du potentiel scalaire V .

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}V}$, est le gradient du champ scalaire V et constitue un champ de vecteurs défini partout. Ses composantes dans un système de coordonnées donné sont obtenues très simplement.

Par exemple, en coordonnées cartésiennes on a :

$$d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \text{ et } dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

Conclusion

Le champ électrostatique peut être caractérisé simplement à l'aide du potentiel électrostatique. Cette grandeur scalaire est souvent plus simple à déterminer que le champ électrostatique. Cette appellation sera justifiée par l'interprétation de cette fonction en terme d'énergie potentielle d'une charge soumise aux effets d'un champ électrostatique.

2. 3 – Propriétés

La circulation C_{AB} du champ \vec{E} le long du contour AB est :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

La circulation du champ de vecteur \vec{E} , le long de AB , est donc égale à la différence de potentiel $V_A - V_B$. Ainsi, la connaissance de \vec{E} ne définit que la différence de potentiel.

Pour avoir le potentiel en un point, il faudra définir une origine arbitraire des potentiels. Il est commode de choisir le potentiel nul à l'infini quand la distribution de charges est limitée à un domaine fini.

La circulation du champ de vecteur \vec{E} , le long de AB est indépendante de la forme du contour AB ; elle ne dépend pas du chemin suivi (la circulation élémentaire dC est différentielle totale exacte).

En conséquence la circulation de \vec{E} est nulle le long de tout contour fermé. Le champ \vec{E} est un champ de vecteurs à circulation conservative qui dérive d'une fonction scalaire appelée potentiel électrostatique. En résumé :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B) \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Avec $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \text{cste}$

Remarques

Le potentiel V est défini à une constante près. Lorsqu’il n’y a pas de charges à l’infini, on choisit la constante nulle, c.à.d que l’action des charges tend vers zéro lorsque r tend vers l’infini.

Physiquement, c’est la différence de potentiel entre deux points qui a un sens et qui est mesurable.

V croît des charges – aux charges + (sens de croissance de V opposé à \vec{E})

Les surfaces de potentiel constant sont appelées **équipotentielles**

De la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(r)$ on peut calculer \vec{E} connaissant V : on a

- En coordonnées cartésiennes : $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

- En coordonnées cylindriques : $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$, $E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$, $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

Les champs et les potentiels électriques ont été exprimés dans le cas où les charges sont dans **le vide**. On a utilisé la constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ (SI), ϵ_0 est la permittivité du vide.

Dans le cas où on a de la matière à la place du vide on remplace ϵ_0 par ϵ ; donc la constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ change de valeur mais la structure des formules reste la même.

3- Potentiel crée par une distribution continue de charges

Nous savons déterminer le potentiel électrostatique crée par une distribution de charges ponctuelles :

$$V(M) = \sum_{i=1}^n V_i(M) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

Comment calculer le potentiel crée par une distribution continue ?

La distribution de charges peut être découpée en éléments de volume ou de surface ou de courbe qui portent une charge élémentaire dq . Chacune de ces charges élémentaires crée un potentiel électrostatique appelé élémentaires. Le potentiel crée par toute la distribution est, par application du principe de superposition, la somme des potentiels élémentaires créés par les charges dq .

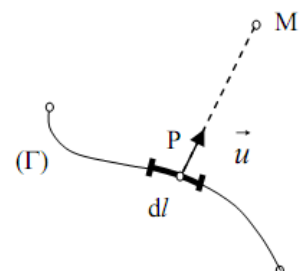
3.1 - Distribution linéique

On considère une portion de courbe $\Gamma = AB$ portant une densité linéique de charge λ .

Un élément dl entourant un point P porte une charge :

$$dq = \lambda dl$$

Cette charge crée en M un champ et un potentiel donné par les expressions suivantes :



$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)dl}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)dl}{\|\vec{PM}\|}$$

Avec $\|\vec{PM}\| = r$

D'où le potentiel $V(M)$ créés en M par toute la distribution linéique de charge s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda(P)dl}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda(P)dl}{\|\vec{PM}\|}$$

Cette relation n'est valable que si le fil est de dimension finie.

Remarque

On peut montrer que le potentiel $V(M)$ ne sont pas définis en un point M situé sur le fil chargé.

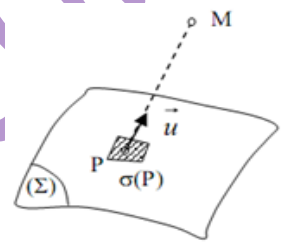
3.2 - Distribution surfacique

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges, on considère une charge dq portée par un élément de surface dS .

Le potentiel créés en M par dq sont donnés par :

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)ds}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)ds}{\|\vec{PM}\|}$$

Avec $\|\vec{PM}\| = r$



D'où le potentiel $V(M)$ créés par les charges réparties sur la surface Σ :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{\sigma(P)ds}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{\sigma(P)ds}{\|\vec{PM}\|}$$

Cette relation suppose que la distribution de charges s'étend sur une surface de dimension fini. Dans le cas contraire, on choisira comme origine des potentiels un point à distance finie.

Remarque

On peut montrer que le potentiel est défini sur la surface chargée et continue à la traversée de la surface chargée. Il n'en est pas de même pour le champ \vec{E} qui n'est pas défini sur une surface chargée. Il subit une discontinuité à la traversée de la face chargée.

3.3 - Distribution volumique

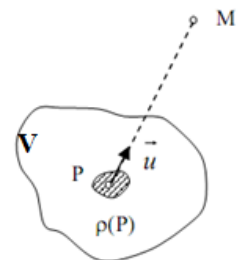
Soit une distribution volumique de charges contenue dans le volume v ; $\rho(P)$ est la densité volumique de charges en un point P du volume v .

La charge contenue dans l'élément de volume entourant le point P est : $dq = \rho(P)d\tau$

Cette charge crée en M un potentiel dV comme le ferait une charge ponctuelle dq placée en P :

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)d\tau}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)d\tau}{\|\vec{PM}\|}$$

Avec $\|\vec{PM}\| = r$



D'après le principe de superposition, le potentiel est obtenu à partir de l'intégrale de volume :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho(P)d\tau}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho(P)d\tau}{\|\vec{PM}\|}$$

Cette relation suppose que l'on a choisi le potentiel nul à l'infini, donc que la distribution de charges s'étend sur un volume fini. Si ce n'est pas le cas, il faut choisir une autre origine des potentiels.

Remarque

On peut montrer que le potentiel V et le champ \vec{E} sont définis en un point M intérieur à la distribution de charges.

4- Différence de potentiel électrique = tension électrique

Lorsqu'une charge se déplace d'un point initial A de potentiel $V_i = V_A$ vers un point final B de potentiel $V_f = V_B$, alors la **différence de potentiel** entre le point final et le point initial est : $\Delta V = V_f - V_i$

Une différence de potentiel est encore appelée **tension électrique**.

La **tension entre A et B** est notée : $U_{AB} = V_A - V_B$.

On a évidemment : $U_{AB} = V_A - V_B = -U_{BA}$

Souvent on parle de la **tension électrique aux bornes d'un appareil électrique** : il s'agit alors de la différence de potentiel prise positivement : $V = |\Delta V| > 0$.

Sur les schémas, les tensions sont représentées par **des flèches allant du potentiel moins élevé vers le potentiel plus élevé**.

III – Topographie d'un champ électrostatique

1- Lignes de champs (spectre électrique) :

Une ligne de champ ou une ligne de force est une courbe dont la tangente en tout point à la direction du vecteur champ en ce point. La ligne de champ est orientée par continuité avec le vecteur champ.

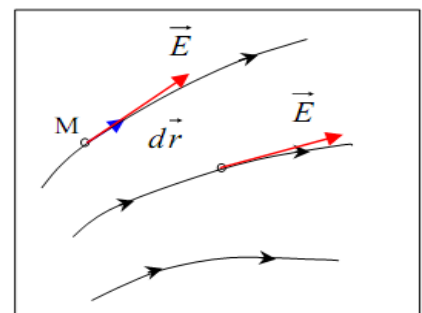
Pour avoir une idée sur l'allure du champ \vec{E} , on trace les lignes de champ, c'est-à-dire les courbes tangentes en chaque point au vecteur \vec{E} défini en ce point. Ces courbes sont orientées par convention dans le sens du vecteur \vec{E} .

Soit M un point d'une ligne de champ et $d\vec{r}$ le vecteur déplacement élémentaire sur une ligne de champ.

Puisque \vec{E} et $d\vec{r}$ sont colinéaires, on a : $d\vec{r} \wedge \vec{E} = \vec{0}$

Cette relation permet d'obtenir les équations des lignes de champ. Dans le système de coordonnées cartésiennes, posons :

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} \quad \text{et} \quad d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$



Ce qui conduit d'après $d\vec{r} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x & E_y & E_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} \vec{0}$

à : $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$

Dans le système de coordonnées sphériques:

$$d\vec{r} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\phi \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} & 0 & 0 \\ dr & r d\theta & r \sin\theta d\phi \end{vmatrix} \vec{0}$$

On trouve $\frac{\sin\theta}{r} d\phi = 0$ soit $\phi = cste$ et $\frac{d\theta}{r} = 0$ soit $\theta = cste$

$\phi = cste$: C'est l'équation d'un demi plan (le méridien) formant un angle $\phi = Cte$ avec l'axe des x.

$\theta = cste$: C'est l'équation d'un cône d'axe Oz et de demi angle au sommet $\theta = Cte$.

On trace les deux surfaces de coordonnées $\phi = \phi_0$ et $\theta = \theta_0$: Leurs intersection donne **une ligne de champ**

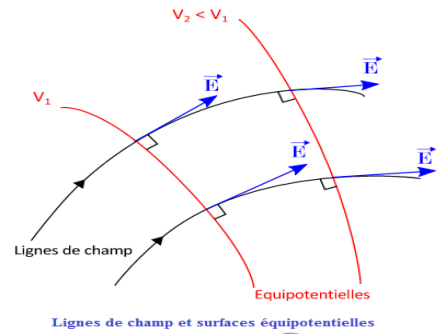
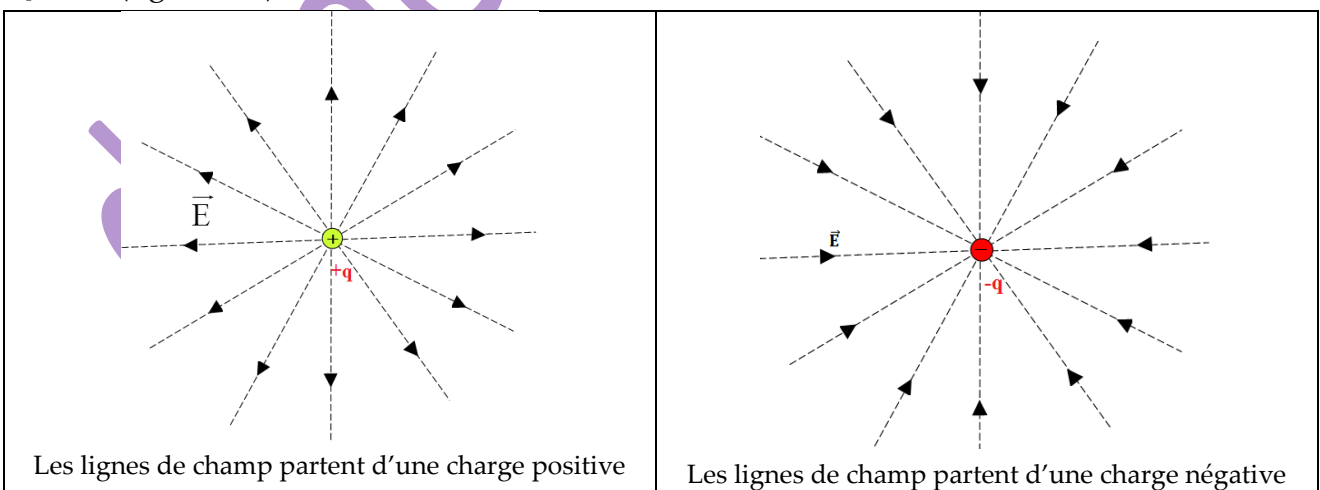
Les lignes de champ d'une charge ponctuelle sont des demi-droites formant un faisceau de sommet O.

NB1: On peut matérialiser les lignes de champ par les grains de semoule!

NB2 : Lorsqu'on a un système de plusieurs charges, on ne peut pas obtenir les lignes de champ par superposition des lignes du champ de chacune des charges. Il faut calculer le champ total \vec{E} et ensuite tracer les lignes de champ.

Exemple de lignes de champ

Soit une charge ponctuelle en O. les lignes du champ crée par la charge ponctuelle sont des demi-droites concourantes en O, divergentes si $q > 0$ (figure 4-a) et convergentes si $q < 0$ (figure 4-b).

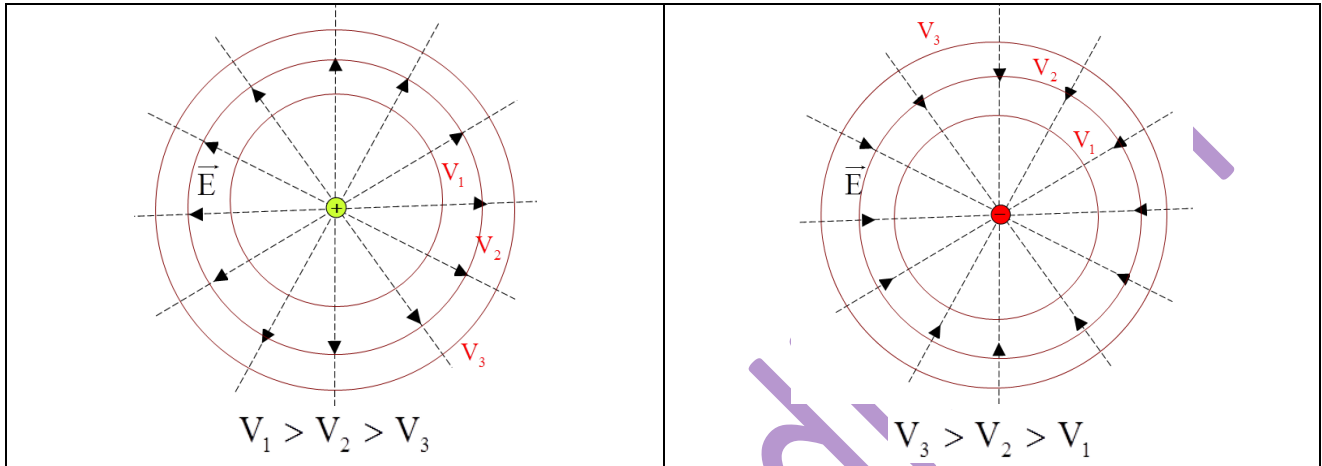


- Deux lignes de champ ne peuvent se croiser : la figure 4 montre que les lignes de champ commencent (figure 4-a) ou s'arrêtent (figure 4-b) sur les charges qui sont des points singuliers.

2- surfaces équipotentielles

C'est l'ensemble des points M pour lesquels le potentiel est constante: $V(x, y, z) = cte$.

$$V = cste \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = cste \rightarrow r = cste$$



Le champ \vec{E} est dirigé vers les potentiels décroissants.

Les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées en O , point où se trouve la charge.

D'après la relation $\vec{E} = -\text{grad}V$, le champ \vec{E} est normal aux surfaces équipotentielles et dirigé vers les potentiels décroissants.

Nous avons représenté sur la figure précédente les surfaces équipotentielles et les lignes du champ E créée par une charge ponctuelle positive.

La direction de \vec{E} , c'est-à-dire du gradient de V est la direction de la normale aux surfaces équipotentielles, celle où V varie le plus rapidement ; il est clair que pour passer de la valeur V_1 à la valeur V_2 , le chemin le plus court est le segment AB .

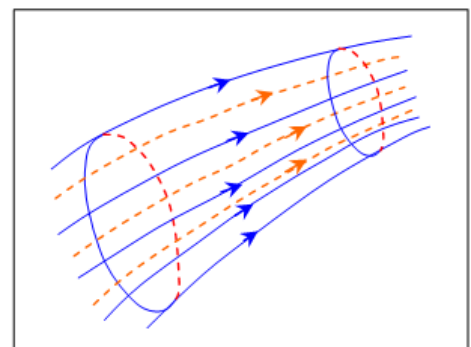
Remarque 1 : Les surfaces équipotentielles sont en tous points orthogonales aux lignes de champ.

Le long d'une ligne de champ, le champ \vec{E} est dirigé suivant les potentiels décroissants.

3- Tube de champ

C'est l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

Remarque: Lorsqu'on a un système de plusieurs charges, on ne peut pas obtenir les lignes de champ par superposition des lignes du champ de chacune des charges. Il faut calculer le champ total \vec{E} et ensuite tracer les lignes de champ.



I - Introduction

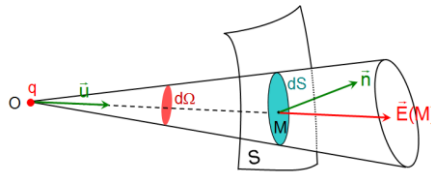
Dans le calcul de la circulation du champ électrostatique \vec{E} , nous avons utilisé le fait que \vec{E} est de la forme $f(r)\vec{u}_r$ et nous avons en déduit la relation entre le champ \vec{E} et le potentiel V . Nous allons maintenant déduire une équation du champ \vec{E} qui dépend spécifiquement du fait que $f(r)$ est en $1/r^2$. Les développements qui suivent s'appliquent donc aux champ de la forme $\frac{\vec{u}_r}{r^2}$.

II - Flux du champ électrostatique

1 - Cas d'une charge ponctuelle

1-1- Flux élémentaire

Soit une charge ponctuelle $q > 0$ placée en O et M un point de l'espace.



Le champ $\vec{E}(M)$ créé par q en M est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} \quad \text{et} \quad r = \|\vec{OM}\|$$

Soit dS un élément de surface entourant le point M ; orientons la surface dS . Le flux élémentaire de \vec{E} à travers la surface orientée est :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

$$\Rightarrow d\Phi_{\vec{E}/S} = d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot \vec{dS}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (1)$$

Où $d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot \vec{dS}}{r^2} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} dS = \frac{dS \cdot \cos\theta}{r^2}$ angle solide élémentaire sous lequel du point O on voit la surface élémentaire. Le signe de $d\Omega$ dépend de l'orientation de la surface :

$$\begin{aligned} \star d\Omega > 0 & \quad \text{si} \quad \alpha = \vec{u} \cdot \vec{n} < \frac{\pi}{2} \\ \star d\Omega < 0 & \quad \text{si} \quad \alpha = \vec{u} \cdot \vec{n} > \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Avec $\theta = (\vec{u}, \vec{n})$

Définition : L'angle solide est l'angle sous lequel on "voit" une surface quelconque S à partir d'un point O .

$$\text{L'élément de cet angle est donné par l'intégrale : } d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot \vec{dS}}{r^2} = \frac{dS \cdot \cos\theta}{r^2}$$

1-2- Flux sortant à travers une surface fermée

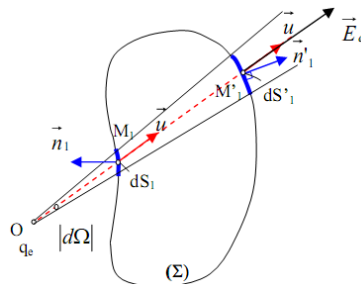
Soit une surface fermée Σ . On se propose de calculer le flux du champ électrostatique \vec{E} créé par une charge ponctuelle q à travers la surface fermée Σ . Plus précisément on s'intéresse au flux sortant, donc on a choisi d'orienter le vecteur \vec{n} dans le sens de la normale sortante à Σ . Deux cas seront envisagés :

- le cas où la charge q est située à l'extérieure de la surface Σ .
- et celui où la charge q est située à l'intérieur de la surface Σ .

Nous désignons par l'indice i les charges situées à l'intérieur de Σ et par l'indice e les charges extérieures à Σ . Soit \vec{E}_i le champ créé par q_i et \vec{E}_e le champ créé par q_e .

1^{er} Cas : La charge est située à l'extérieur de Σ

Nous pouvons calculer le flux sortant de la surface fermée Σ (Voir figure suivante) à partir des flux élémentaires. En effet, traçons un cône élémentaire de sommet O (où se trouve la charge extérieur à Σ , q_e) et d'angle solide $|d\Omega|$. Ce cône découpe sur la surface Σ deux surfaces élémentaires dS_1 en M_1 et dS'_1 en M'_1 . Soient \vec{n}_1 et \vec{n}'_1 les vecteurs sortant des surfaces dS_1 et dS'_1 . L'angle solide sous lequel du point O on voit les surfaces élémentaires orientées dS_1 et dS'_1 , a la même valeur absolue, mais de signes opposés à cause de l'orientation du vecteur normal \vec{n} par rapport à \vec{n} (Voir figure) :



$$d\Omega_1 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}_1}{r_1^2} dS_1 = -d\Omega'_1 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}'_1}{r_1'^2} dS'_1 \quad (2)$$

* Si on considère le flux du champ \vec{E} créé par la charge q_e située en O , sortant des surfaces dS_1 et dS'_1 , d'après (1) et (2), on obtient : $d\Phi_1 + d\Phi'_1 = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_1 + \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} d\Omega'_1$

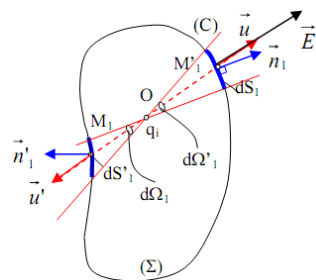
* Pour obtenir le flux de \vec{E} sortant de la surface Σ , $\Phi_e = \oiint_{\Sigma} \vec{E}_e \cdot \vec{dS}$, on peut balayer toute la surface Σ à l'aide de cônes élémentaires tels que celui de la figure ci-dessus. Chacun de ces cônes intercepte sur la surface Σ une paire de surfaces élémentaires dS_1 et dS'_1 telles que leur contribution au flux total, $d\Phi_1 + d\Phi'_1 = 0$.

On en conclut que le flux du champ électrostatique crée par une charge ponctuelle située à l'extérieur d'une surface fermée Σ , sortant de la surface Σ est nul :

$$\Phi_e = \oiint_{\Sigma} \vec{E}_e \cdot \vec{dS} = 0$$

2^{ème} Cas : La charge est située à l'intérieur de Σ

Soit (C) le cône élémentaire de sommet O et d'angle solide $d\Omega_1$ (Voir figure).



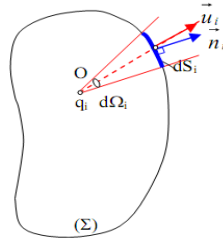
Dans ce cas, l'angle solide sous lequel du point O on voit dS_1 est égal à l'angle solide sous lequel de O on voit dS'_1 :

$$d\Phi_1 = d\Phi'_1$$

D'où
$$d\Phi_1 = d\Phi'_1 = d\Phi_i$$

Ainsi, la paire de surface élémentaire dS_1 et dS_1' découpées par un cône élémentaire de sommet O (ou se trouve la charge q_i) donne une contribution $d\Phi_1 + d\Phi_1'$ au flux total, non nulle.

Le flux élémentaire $d\Phi_i$ crée par \vec{E}_i à travers une surface élémentaire dS_i (figure ci-dessous) est donnée par :



$$d\phi_i = \vec{E}_i \cdot \vec{dS}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_i$$

Le flux total sortant de Σ est la somme des flux élémentaires $d\Phi_i$:

$$\Phi_i = \iint_{\Sigma} d\phi_i = \iint_{\Sigma} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\Sigma} d\Omega_i$$

$\oiint_{\Sigma} d\Omega_i$ est l'angle solide sous lequel du point O, on voit la surface fermée Σ ; Ω_i est donc l'angle solide sous lequel du point O on voit tout l'espace : $\Omega_i = 4\pi$

D'où
$$\Phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle située à l'intérieur d'une surface fermée Σ , sortant de la surface Σ est égal à :

$$\Phi_i = \oiint_{\Sigma} \vec{E}_i \cdot \vec{dS} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Ainsi, le flux total du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle est :

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_i = \Phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Cette relation relie le flux à travers une surface fermée (Σ) et les échanges à l'intérieure de cette surface.

2 - Cas de n charges ponctuelles

Considérons n_i charges à l'intérieure d'une surface fermée (Σ) et n_e charges situées à l'extérieure de cette surface. Le champ \vec{E} créé par les n charges ($n = n_i + n_e$) est la somme vectorielle des champs créés par chacune des charges :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i + \sum_{e=1}^{e=n} \vec{E}_e$$

Le flux du champ \vec{E} sortant de la surface Σ est :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint_{\Sigma} \left(\sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i + \sum_{e=1}^{e=n} \vec{E}_e \right) \cdot \vec{dS} = \sum_{i=1}^{i=n} \Phi_i + \sum_{e=1}^{e=n} \Phi_e$$

D'après (3) et (4), on a : $\Phi_i = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$ et $\Phi_e = 0$

D'où
$$\Phi = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$
 avec $Q_{int} = \sum_{i=1}^{i=n} q_{int}$

Le flux sortant de la surface fermée Σ est égal à la somme, divisée par ϵ_0 , des charges intérieures à la surface Σ :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

avec, Q_{int} : charge totale intérieure à Σ

Ce résultat constitue le théorème de Gauss.

3 - Cas d'une distribution continue de charge

On peut écrire le théorème de Gauss dans le cas où la distribution de charges est continue et décrite par une densité volumique de charges ρ . La charge totale intérieure à Σ , c'est à dire contenue dans le volume v limité par la surface fermée Σ est : $\sum q_{int} = \iiint \rho \cdot d\tau$

Où v est le volume délimitée par (Σ).

Dans ce cas le théorème de Gauss s'écrit, v étant le volume limité par la surface (Σ) :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\iiint \rho \cdot d\tau}{\epsilon_0}$$

C'est l'expression du théorème de Gauss sous la forme intégrale.

4 - Validité du théorème de Gauss

Précisons que ce théorème est obtenu à partir de la loi de Coulomb (loi fondamentale de l'électrostatique). Ce théorème reste valable quand les charges sont en mouvement.

Le théorème de Gauss est une conséquence :

- a- de la loi en $1/r^2$ régissant les interactions entre les charges électriques
- b- du caractère central des forces électrostatiques
- c- du principe de superposition

Nous présentons dans le tableau ci-dessous la formulation du théorème de Gauss pour le champ électrostatique.

Sources du champ	Charges
Champ crée en M par une charge source ponctuelle placée en P_i	$\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}_iM}{\ \vec{P}_iM\ ^2}$
Flux élémentaire	$d\Phi_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_i$
Théorème de Gauss	$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$ où $\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau} \rho d\tau$

Cependant, ce théorème est également valable pour tous les champs de vecteurs de la forme $\frac{\vec{u}_r}{r^2}$, en particulier pour le champ de gravitation \vec{g} .

III- Symétries de distributions de charges : Règles de symétrie

1 - Symétrie et invariance de la distribution de charge et caractérisation du champ et du potentiel

On rappelle que le calcul du champ électrostatique E , crée par une distribution de charge de densité volumique ρ peut être mené, soit à partir :

- de la loi de Coulomb : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \frac{\rho d\tau}{r^2} \vec{u}_r$
- du potentiel V : $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \frac{\rho d\tau}{r}$

Avec, $\vec{E} = -\text{grad } V$ ou $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

où τ est le volume de la distribution de charge, et C est un contour fermé.

- du théorème de Gauss sous sa forme intégrale: $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$

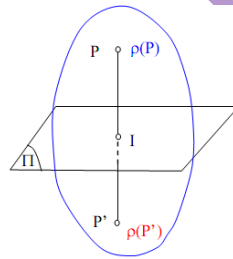
Où \vec{n} est la normale à la surface fermée englobant la charge q.

1-1- Symétries des sources (causes) et des effets créés : Principe de Curie

Les effets présentent les mêmes symétries que leurs causes. Les éléments de symétrie des causes (distributions D ou sources) doivent donc se retrouver dans les effets (\vec{E} et V) produits.

a- Distribution de charge présentant un plan de symétrie pair (Π)

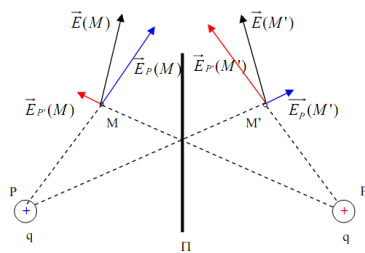
On dit qu'une distribution de charge (D) est symétrique par rapport à un plan Π, si pour deux points P et P' symétriques par rapport à Π, on a (figure 5) : $\rho'(P') = \rho(P)$.



Pour illustrer ce cas, nous prenons deux charges identiques q placées en P et P', où P' est le symétrique de M par rapport au plan Π.

Soit M' le symétrique du point M par rapport au plan Π. On peut constater sur la figure 6 que le champ en M' est le symétrique du champ en M :

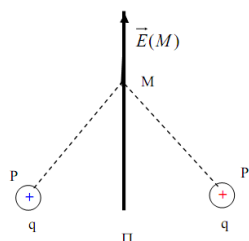
$\vec{E}(M') = \text{sym } \vec{E}(M)$ et $V(M') = \text{sym}V(M)$



On remarque que les composantes du champ parallèles au plan de symétrie \vec{E}_{\parallel} sont conservées alors que celles perpendiculaires au plan \vec{E}_{\perp} sont inversées :

$\vec{E}_{\parallel}(M') = \vec{E}_{\parallel}(M)$ et $\vec{E}_{\perp}(M') = -\vec{E}_{\perp}(M)$

En particulier, en un point du plan de symétrie (M = M') on a (figure 7):



$$\vec{E}_\perp(M) = \vec{0} \text{ d'où } \vec{E}(M) = \vec{E}_\parallel(M) + \vec{E}_\perp(M) = \vec{E}_\parallel(M)$$

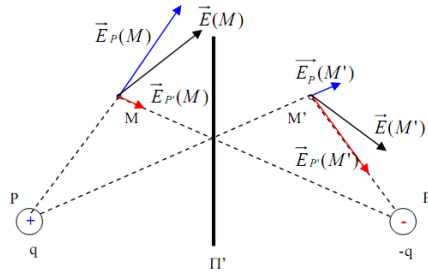
Le champ électrique est contenu dans le plan de symétrie paire. D'une façon générale tout vecteur polaire est contenu dans le plan de symétrie paire (figure 7).

b- Distribution de charge présentant un plan de symétrie impair (Π')

Une distribution de charge possède un plan de symétrie impaire Π' , si pour deux points P et P' symétriques par rapport à Π' , on a

$$\rho'(P') = -\rho(P)$$

Pour illustrer ce cas, nous prenons deux charges q et -q placées en P et P', où P' est le symétrique de M par rapport au plan Π' .



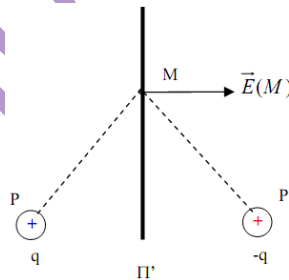
Soit M' un point symétrique de M par rapport à Π' , On peut constater sur la figure 8 que le champ en M' est l'opposé du symétrique du champ en M :

$$\vec{E}(M') = -\text{sym } \vec{E}(M) \quad \text{et} \quad V(M') = -\text{sym}V(M)$$

A l'inverse du cas précédent, on remarque sur la figure 8 que les composantes du champ parallèles au plan de symétrie impair Π' sont opposées alors que celles perpendiculaires au plan sont conservées :

$$\vec{E}_\parallel(M') = -\vec{E}_\parallel(M) \quad \text{et} \quad \vec{E}_\perp(M') = \vec{E}_\perp(M)$$

Si M appartient au plan de symétrie impaire ($M = M'$), on aura (figure 9) :



On a donc, $\vec{E}_\parallel(M) = \vec{0}$ d'où $\vec{E}(M) = \vec{E}_\parallel(M) + \vec{E}_\perp(M) = \vec{E}_\perp(M)$

Tout vecteur polaire est perpendiculaire à un plan de symétrie impaire.

c- Conséquences

Lors d'une opération de symétrie appliquée à la distribution de charges (D), le champ électrostatique \vec{E} subit la même opération. On dit que le vecteur champ électrique est un vecteur polaire ou "vrai" vecteur. Ce vecteur a les mêmes propriétés de symétrie que ses sources.

Les plans de symétrie nous permettent souvent de trouver la direction du champ en un point M. Pour trouver la direction du champ \vec{E} en un point M, il suffit de trouver :

* Soit deux plans de symétrie passant par M. Le champ \vec{E} appartenant à ces deux plans. Il est donc porté par la droite formée par leur intersection.

* Soit un plan de symétrie impair passant par M. La direction du champ \vec{E} au point M est donnée par la normale au plan de symétrie impaire.

Les plans de symétrie permettent d'obtenir les composantes du champ \vec{E} .

1- 2 - Invariance de la distribution de charge

a- Invariance par translation le long d'un axe

Les variables dont dépendent ces composantes sont obtenues en étudiant les invariances de la distribution de charges.

Dans la plupart des cas nous utilisons des distributions idéalisées, par exemple pour calculer le champ \vec{E} crée par un fil en un point M de l'espace homogène et isotrope, très proche du fil, on peut considérer que le fil est infini. Considérons l'exemple d'un fil rectiligne caractérisé par une densité linéique λ uniforme.

Si on translate le fil parallèlement à lui-même d'un vecteur \vec{T} , la nouvelle distribution D' coïncide avec D (puisque le fil est considéré infini et la distribution de charge est uniforme). (figure 10-a).

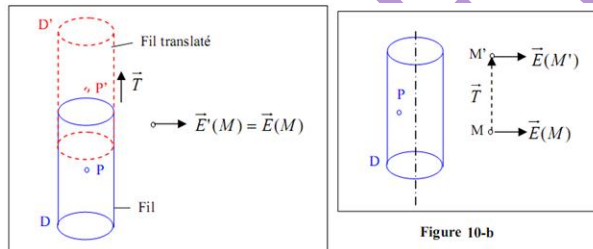


Figure 10-a

Figure 10-b

On a : $\lambda'(P) = \lambda(P)$

D'après le principe de Curie, le champ $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$ sont inchangés en un point M quelconque de l'espace homogène et isotrope :

$$\vec{E}'(M) = \vec{E}(M)$$

Pour un autre point quelconque M' tel que: $\overline{MM'} = \vec{T}$

on a aussi (10-b) : $\vec{E}'(M') = \vec{E}(M')$

Comme une opération de translation ne modifie pas le vecteur \vec{E}' , il vient :

$$\vec{E}(M') = \vec{T}(\vec{E}(M)) = \vec{E}(M)$$

On obtient finalement : $\vec{E}(M') = \vec{E}(M)$ et $V(M') = V(M)$

Si une distribution de charge admet une symétrie de translation, les grandeurs physiques ne dépendent pas de la variable décrivant axe de translation. Si par exemple, on repère le point M par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) et que $\vec{T} = z_0 \vec{u}_z$ (annexe 1), les relations précédentes de \vec{E} et V s'écrivent

$$\vec{E}(x, y, z + z_0) = \vec{E}(x, y, z) \quad \text{et} \quad V(x, y, z + z_0) = V(x, y, z)$$

Ces relations doivent être invariantes quelque soit z_0 :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y) \quad \text{et} \quad V(M) = V(x, y)$$

L'existence de cet élément de translation a permis de limiter le nombre de variables indépendantes (x, y, z) aux deux coordonnées x et y.

b- Invariance par rotation autour d'un axe

Considérons une répartition de charge D de densité volumique uniforme ρ présentant un axe de révolution, c'est à dire si on fait subir à cette distribution une rotation d'angle θ autour de cet axe, la nouvelle distribution D' coïncide avec la précédente (la distribution reste invariante) (figure 11-a).

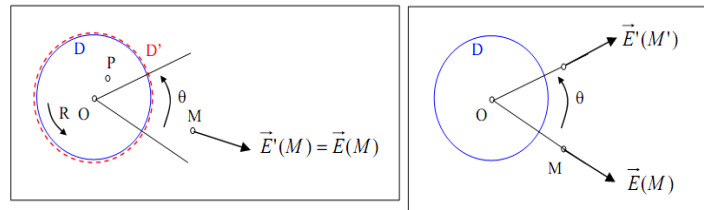


Figure 11-a

Figure 11-b

On a : $\rho'(P) = \rho(P)$

D'après le principe de Curie, cette opération de symétrie pour D l'est aussi en un point M de l'espace homogène et isotrope, pour \vec{E} .

Si on considère un point M' quelconque obtenu par rotation du point M d'un angle θ on aura (figure11-b) :

$$E'(M') = E(M')$$

Si nous choisissons les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) (annexe 1) et Oz l'axe de symétrie de rotation de la distribution le potentiel et le champ électriques ne doivent pas dépendre de θ car le système est invariant lors de la rotation :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(\rho, z) \quad \text{et} \quad V(M) = V(\rho, z)$$

On voit que l'existence d'un axe de révolution et le choix approprié du système de coordonnées, ont permis de limiter le nombre de variables indépendantes dont dépendent \vec{E} et V (ici à deux ρ et z).

2 - Conclusion

Le théorème de Gauss établit une relation entre le flux du champ électrique à travers une surface fermée et la charge à l'intérieur de cette surface. Cette relation a les propriétés suivantes :

- elle reflète les propriétés générales des champs électriques et ne se limite pas aux champs électrostatiques (contrairement à la loi de Coulomb);
- elle permet de déterminer plus simplement l'expression du champ électrostatique créé par les distributions de charges qui présentent une symétrie appropriée (sphérique, cylindrique, plan, etc.).

Exemples d'application du théorème de Gauss

Exemple 1: Calcul de \vec{E} créé par une sphère chargée, en un point M.

- Etude de la symétrie : une sphère chargée uniformément présente une symétrie sphérique, \vec{E} est radial et ne dépend que de r .

- Choix de la surface de Gauss : On choisit la surface d'une sphère de centre O et de rayon $r = \|\vec{OM}\|$.

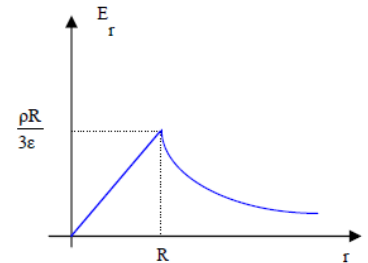
- Calcul du flux :

$$\phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S E \cdot dS = E \iint_S dS = ES = E \cdot 4\pi r^2$$

- Théorème de Gauss : $\phi(\vec{E}) = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$

1^{er} cas : $r < R : \sum q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$

2^{ème} cas : $r > R : \sum q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = Q \rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$



Remarque : le champ est continu à la traversée de la surface de la sphère chargée en volume : $\vec{E}(r = R^-) = \vec{E}(r = R^+)$.

Exemple 2: Calcul de \vec{E} créé par une couche de charges comprise entre deux sphères concentriques.

- La distribution présente la symétrie sphérique \vec{E} est radiale, elle ne dépend que de r .

- Surface de Gauss : On choisit la surface S de la sphère de centre O et de rayon $r = \|\vec{OM}\|$.

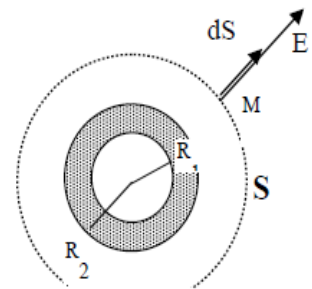
- Calcul du flux : $\phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S E \cdot dS = E \iint_S dS = ES = E \cdot 4\pi r^2$

- Théorème de Gauss : $\phi(\vec{E}) = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$

1^{er} cas : $r < R_1 : \sum q_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$.

2^{ème} cas : $r > R_2 : \sum q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3) = Q \rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

3^{ème} cas : $R_2 < r < R_1 : \sum q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3) = Q \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ en R_1 et en R_2 il y'a continuité du champ \vec{E} .

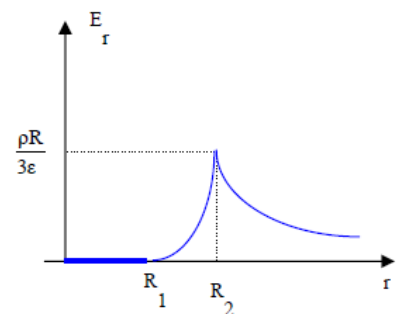


Remarque :

Si on néglige l'épaisseur de la couche de charges, elle devient chargée en surface : $R_2 - R_1 \rightarrow 0, R_2 \approx R_1 = R$

Pour $r < R \rightarrow \vec{E} = \vec{0}$, pour $r > R \rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

Dans ce cas \vec{E} présente une discontinuité qui vient du fait que l'on néglige l'épaisseur de la couche.



Autres exemples

Exemple 3: Calcul de \vec{E} créé par une sphère chargée en surface.

Exemple 4: Calcul de \vec{E} créé par un cylindre infini chargé en volume.

Exemple 5: Calcul de \vec{E} créé par un plan chargé de dimensions infinies.

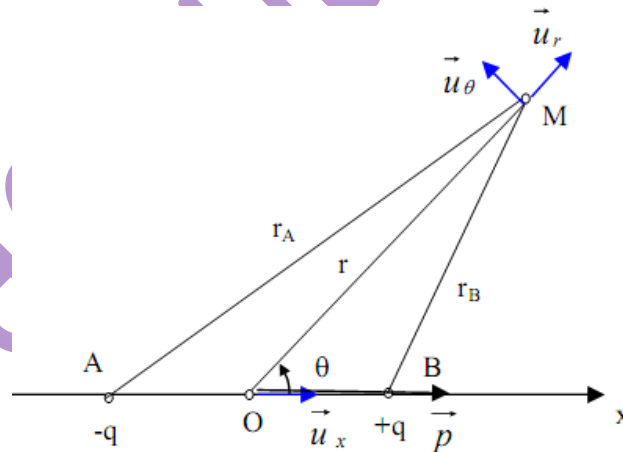
I- Introduction

Un dipôle électrostatique se définit par une répartition particulière de charges électriques telles que le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec celui des charges négatives (le système est globalement neutre). Le dipôle le plus simple est donc un couple de deux charges de signe opposé distantes d'une longueur "a" non nulle. Cette notion est principalement utilisée en électromagnétisme et par suite en chimie où certaines liaisons entre molécules peuvent être expliquées en modélisant ces molécules par un dipôle (liaison hydrogène par exemple). En physique, on s'intéresse au champ électrostatique $\vec{E}(r)$ créé en un point r éloigné du dipôle (on parle alors de dipôle actif). Mais on peut aussi étudier le comportement du dipôle lorsqu'il est placé dans un champ extérieur (on parle alors de dipôle passif).

II- Potentiel et champ électrostatiques créés par un dipôle isolé

1- Définition

Le dipôle électrostatique est l'ensemble de deux charges électriques égales et de signes contraires (-q) et (+q) ($q > 0$), (figure 1). Ces deux charges sont fixées respectivement en deux points A et B séparées d'une distance ($a = \|\vec{AB}\|$). On se propose d'étudier les caractéristiques du champ et du potentiel électrostatique créés par ces deux charges en un point M très éloignés des charges : ($a \ll r = \|\vec{OM}\|$): approximation dipolaire.



2- - Moment dipolaires électriques

Soient deux charges ponctuelles -q, +q fixées respectivement en A et B ($q > 0$). Le moment dipolaire électrique (ou moment du dipôle) est une grandeur vectorielle définie par (figure 1):

$$\vec{p} = -q \vec{OA} + q \vec{OB} = q \vec{AB}$$

En désignant par a la distance séparant A et B, la norme du moment dipolaire vaut :

$$p = \|\vec{p}\| = q a$$

Le moment dipolaire décrit la charge et sa géométrie. Il permet de caractériser le dipôle. Son unité dans le système International (SI) est le Coulomb-mètre (C m).

3 - Calcul du potentiel électrostatique

Soient deux charges ponctuelles $-q$, $+q$ fixées respectivement en A et B (figure 1) distant de (a). Considérons un point M très éloigné des charges, ce qui revient à considérer la distance a très inférieure à celle qui sépare M de l'une ou l'autre charge (la distance a est agrandie pour des raisons de clarté).

La position de M est repéré dans le système des coordonnées polaires (r, θ). Nous choisissons de prendre pour axe (Ox), la droite qui joint les deux charges tel que l'origine O soit au milieu du segment AB qui joint les charges (Ox es l'axe de révolution de la distribution).

D'après le principe de superposition, le potentiel V(M) créé par le dipôle en un point M repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) est donnée par :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

avec,

$$* r_B = \|\overrightarrow{BM}\|$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}$$

$$r_B^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2 = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{BO}^2 + 2 \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}^2$$

$$\text{Où } \|\overrightarrow{OM}\| = r \quad ; \quad \|\overrightarrow{OB}\| = \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{a}{2} r \cos(\pi - \theta) = -\frac{a}{2} r \cos\theta$$

On a :

$$r_B^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2 = r^2 - ar \cos\theta + \frac{a^2}{4} = r^2 \left(1 - \frac{a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)$$

$$* r_A = \|\overrightarrow{AM}\|$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$$

$$r_A^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{AO}^2 + 2 \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}^2$$

$$\text{Où } \|\overrightarrow{OA}\| = \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{a}{2} r \cos\theta$$

Ainsi,

$$r_A^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 = r^2 + ar \cos\theta + \frac{a^2}{4} = r^2 \left(1 + \frac{a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)$$

Nous avons donc,

$$r_A = \|\overrightarrow{AM}\| = r \left(1 + \frac{a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad r_A^{-1} = r^{-1} \left(1 + \frac{a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-1/2}$$

$$r_B = \|\overrightarrow{BM}\| = r \left(1 - \frac{a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad r_B^{-1} = r^{-1} \left(1 - \frac{a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-1/2}$$

Puisque $a/r \ll 1$, on a : $a^2/(4r^2) \ll a/r$, on peut négliger les termes en $(a/r)^2$ devant le terme en (a/r) :

$$r_A^{-1} = r^{-1} \left(1 + \frac{a}{r} \cos\theta \right)^{-1/2}$$

$$r_B^{-1} = r^{-1} \left(1 - \frac{a}{r} \cos\theta \right)^{-1/2}$$

Etant donné que $a \ll r$, on peut développer r_A^{-1} et r_B^{-1} en puissance de (a/r) et ne retenir que le terme du premier ordre $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \dots$

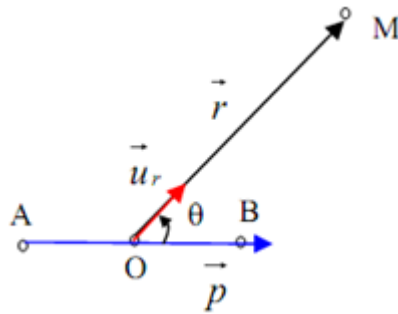
$$r_A^{-1} = r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos\theta \right) \quad \text{et} \quad r_B^{-1} = r^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos\theta \right)$$

$$\text{D'où : } r_B^{-1} - r_A^{-1} = r^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos\theta \right) - r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos\theta \right) = \frac{a}{r^2} \cos\theta$$

Le potentiel $V(M)$ est donc donné par :

$$V(M) = \frac{qa \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Soit $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position du point M par rapport au point O (milieu de [A, B]) et \vec{p} le moment dipolaire (figure 2).



On a : $\vec{p} \cdot \vec{r} = p r \cos\theta$

Le potentiel $V(M)$ s'écrit donc :

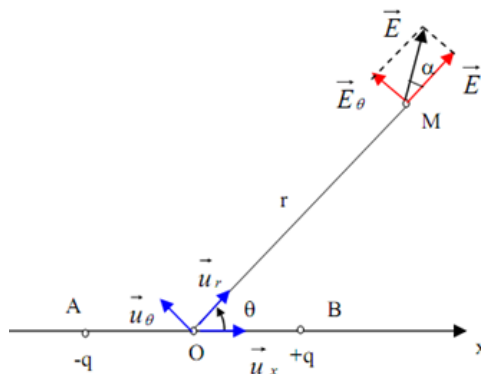
$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{3}$$

Cette expression qui fait intervenir un produit scalaire est indépendante de tout système de coordonnées. Il faut remarquer que la décroissance du potentiel en créant par un dipôle ($1/r^2$) est plus rapide que dans le cas d'une charge ponctuelle qui est en ($1/r$).

4- Calcul du champ électrostatique

4- 1- Composantes du champ en coordonnées polaires

Le dipôle présente une symétrie de révolution autour de (AB). Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est donc contenu dans le plan (M, AB) (figure 3).



D'après le principe de superposition, le champ en M est donné par :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta \quad (\vec{E}_z = \vec{0})$$

Pour calculer les composantes du champ, utilisons la relation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Avec $\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$ et $V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Les composantes du champ dérivant du potentiel $V(M)$ s'écrivent dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}_r = - \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta = \frac{2p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
\vec{E}_r	$\vec{E}_1 = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r$	$\vec{E}_r = \vec{0}$	$\vec{E}_3 = \vec{E}_r = \vec{E}_1$	$\vec{E}_r = \vec{0}$
\vec{E}_θ	$\vec{E}_\theta = \vec{0}$	$\vec{E}_2 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$ $\vec{E}_2 = \frac{\vec{E}_1}{2}$	$\vec{E}_\theta = \vec{0}$	$\vec{E}_4 = \vec{E}_2$

Il faut remarquer que la décroissance du champ en $(1/r^3)$ créés par un dipôle est plus rapide que dans le cas d'une charge ponctuelle qui est en $(1/r^2)$.

Le module de $\vec{E}(M)$ est :

$$\|\vec{E}(M)\| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}$$

Soit α l'angle que fait \vec{E} avec la radiale : $\alpha = (\vec{E}, \vec{u}_r)$

$$\text{tg} \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\text{tg} \theta}{2}$$

Notons que les composantes cartésiennes du champ suivant Ox et Oy (du plan AMB) s'écrivent :

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + \frac{2p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2 \theta - 1) \vec{i} + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\sin \theta \cos \theta) \vec{j}$$

4- 2- Formulation globale du champ \vec{E}

Nous pouvons exprimer \vec{E} uniquement en fonction de \vec{p} et de \vec{r} en calculant le gradient de $V(M)$:

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V(M) = -\vec{\text{grad}} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{r}) - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{r^3} \right)$$

Or,

En posant : $\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}$ et $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$

$$\vec{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{\text{grad}}(p_x x + p_y y + p_z z) = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} = \vec{p}$$

$$\vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3}{r^5} \vec{r}$$

D'où l'expression intrinsèque de \vec{E} en fonction de \vec{p} et de \vec{r} :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \quad (5)$$

Les effets électriques \vec{E} et V produits par le dipôle sont entièrement déterminés par son moment dipolaire \vec{p} . Il faut remarquer que la décroissance du potentiel en $(1/r^2)$ et du champ en $(1/r^3)$ créés par un dipôle est plus rapide que dans le cas d'une charge ponctuelle.

Notons que les composantes cartésiennes du champ suivant Ox et Oy (du plan AMB) peuvent être également obtenues en écrivant :

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = p r \cos \theta ; \vec{r} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} \text{ et } \vec{p} = p \vec{i}$$

Ce qui donne d'après l'expression intrinsèque du champ indépendante du système de coordonnées :

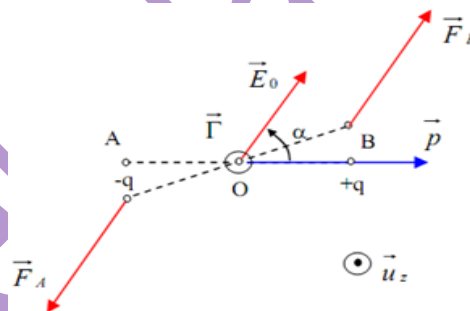
$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3p r \cos \theta}{r^5} (r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}) - \frac{p}{r^3} \vec{i} \right]$$

On retrouve donc les composantes calculer à partir des composantes polaires du champ :

$$\vec{E}_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \text{ et } \vec{E}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \sin \theta \cos \theta) \vec{j}$$

5 - Action d'un champ extérieur uniforme sur un dipôle

Considérons un dipôle A(-q) et B(+q) de moment \vec{p} placé dans un champ uniforme \vec{E}_0 et tel que $\alpha = (\vec{p}, \vec{E}_0)$ (figure 4).



5-1- Forces et moment du couple exercés par un dipôle

Chacune des charges subit une force donnée par :

$$\vec{F}_A = -q\vec{E}_0 \text{ et } \vec{F}_B = q\vec{E}_0$$

Puisque le champ extérieur est uniforme, la résultante des forces est évidemment nulle (on ne tiendra pas compte de la force exercée par q sur -q et réciproquement) :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$$

Par contre, le dipôle subit un couple de force (\vec{F}_A et \vec{F}_B) dont le moment est :

$$\vec{\Gamma} = \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B = \vec{OA} \wedge (-\vec{F}_B) + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B = \vec{AB} \wedge \vec{F}_B = q\vec{AB} \wedge \vec{E}_0$$

Ce qui donne :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0 = \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{E}_0\| \sin \alpha \vec{u}_z \quad (6)$$

avec, \vec{u}_z est un vecteur unitaire de la direction (z/z) du repère (Oxyz). $\vec{\Gamma}$ est un vecteur perpendiculaire au plan formé par \vec{p} et \vec{E}_0 .

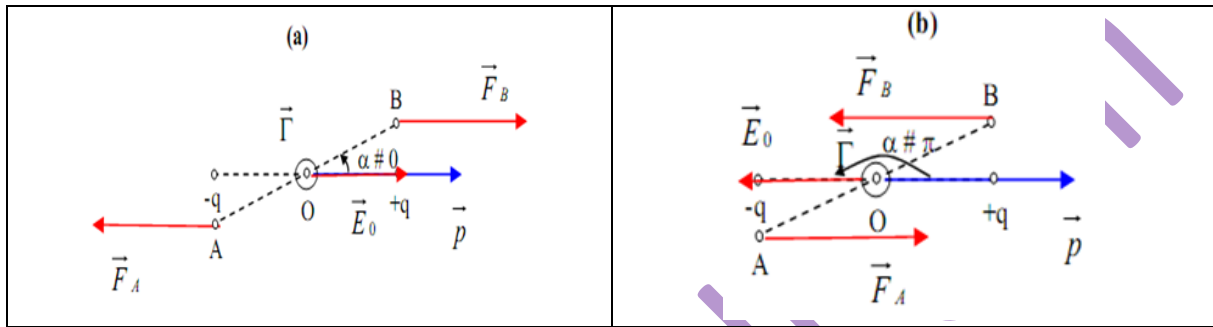
Si on libère le dipôle, il tend sous l'action de $\vec{\Gamma}$ à tourner pour atteindre une position d'équilibre ($\vec{\Gamma} = \vec{0}$) dans laquelle \vec{p} et \vec{E}_0 sont colinéaires : $\alpha = (\vec{p}, \vec{E}_0) = 0$ ou π .

- Pour $\alpha = 0$ (\vec{p} a le même sens que \vec{E}_0).

Si on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de force tend à le ramener à cette position (figure 5-a). L'équilibre est stable.

- Pour $\alpha = \pi$ (\vec{p} est antiparallèle à \vec{E}_0).

Si on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de force tend à l'éloigner de cette position (figure 5-b). L'équilibre est instable.



Ainsi, l'action mécanique principale d'un champ uniforme est qu'il tend à orienter le dipôle suivant les lignes du champ \vec{E}_0 .

5- 2- Energie potentielle d'interaction du dipôle

C'est l'énergie nécessaire pour amener + q et - q de l'infini à leur position en B et A.

Les charges - q et + q fixées en A et B ont des énergies potentielles égales à -q ($V'_A - 0$) et q ($V'_B - 0$). Ainsi, l'énergie potentielle d'interaction W associé au champ extérieur \vec{E}_0 est : $W = q (V'_B - V'_A)$

Soit V' le potentiel dont dérive le champ \vec{E}_0 .

$$dV' = -\vec{E}_0 \cdot d\vec{r}$$

$$V'_A - V'_B = - \int_A^B dV' = \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{r} = E_0 \cos\alpha \int_A^B dr = E_0 \cos\alpha a = \vec{E}_0 \cdot \vec{AB}$$

Ainsi,

$$W = - \vec{p} \cdot \vec{E}_0 = -p E_0 \cos\alpha \quad (7)$$

Cette expression représente l'énergie d'interaction du dipôle associée au champ \vec{E}_0 et n'a rien à voir avec l'énergie interne du dipôle (énergie nécessaire pour amener une charge de l'infini à une distance a de l'autre). Nous retrouvons les positions d'équilibre :

- Pour $0 = \alpha$ (\vec{p} a le même sens que \vec{E}_0) : $W = - p E_0$

L'énergie potentielle est minimale et l'équilibre est stable.

- Pour $\pi = \alpha$ (\vec{p} est antiparallèle à \vec{E}_0), $W = p E_0$

L'énergie potentielle est maximale et l'équilibre instable.

6- Conclusion

Le champ créé par un dipôle dans le cadre de l'approximation dipolaire est proportionnel à $1/r^3$ et le potentiel à $1/r^2$, alors que pour une charge ponctuelle, le champ créé est proportionnel à $1/r^2$ et le potentiel à $1/r$.

I- Conducteurs isolés

1- Notion d'équilibre électrostatique

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés uniquement aux charges électriques et à leurs effets. Que se passe-t-il pour un corps conducteur dans lequel les charges sont libres de se déplacer?

Prenons une baguette en plastique et frottons-la. On sait qu'elle devient électrisée parce qu'elle devient alors capable d'attirer de petits bouts de papier. Si on la met en contact avec une autre baguette, alors cette deuxième devient également électrisée, c'est à dire atteint un certain degré d'électrisation. Au moment du contact des deux baguettes, des charges électriques passent de l'une à l'autre, modifiant ainsi le nombre de charges contenues dans chacune des baguettes, jusqu'à ce qu'un équilibre soit atteint. Comment définir un tel équilibre ?

Définition : *l'équilibre électrostatique d'un conducteur est atteint lorsqu'aucune charge électrique ne se déplace plus à l'intérieur du conducteur.*

Du point de vue de chaque charge élémentaire, cela signifie que le champ électrostatique total auquel elle est soumise est nul.

Comme le champ dérive d'un potentiel, cela implique qu'un conducteur à l'équilibre électrostatique est équipotentiel.

Remarques :

a- Si le conducteur est chargé, le champ électrostatique total est (principe de superposition) la somme du champ extérieur et du champ créé par la distribution de charges contenues dans le conducteur. Cela signifie que les charges s'arrangent (se déplacent) de telle sorte que le champ qu'elles créent compense exactement, en tout point du conducteur, le champ extérieur.

b- Nous voyons apparaître ici une analogie possible avec la thermodynamique :

Equilibre électrostatique \Leftrightarrow Equilibre thermodynamique

Potentiel électrostatique \Leftrightarrow Température

Charges électriques \Leftrightarrow Chaleur

En effet, à l'équilibre thermodynamique, deux corps de températures initialement différentes mis en contact, acquièrent la même température finale en échangeant de la chaleur (du plus chaud vers le plus froid).

Dans ce cours, tous les conducteurs seront considérés à l'équilibre électrostatique.

2- Quelques propriétés des conducteurs en équilibre

2- 1- Lignes de champ

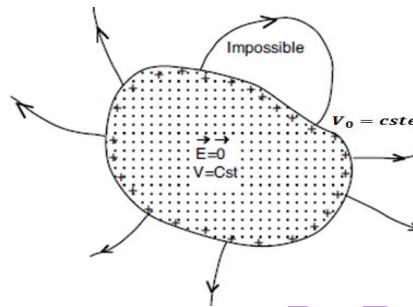
Nous avons vu que, à l'intérieur d'un conducteur (chargé ou non) le champ électrostatique total est nul. Mais ce n'est pas forcément le cas à l'extérieur, en particulier si

le conducteur est chargé. Puisqu'un conducteur à l'équilibre est équipotentiel, cela entraîne alors que, sa surface étant au même potentiel, le champ électrostatique est normal à la surface d'un conducteur.

Par ailleurs, aucune ligne de champ ne peut « revenir » vers le conducteur. En effet, la circulation du champ le long de cette ligne impose

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si les points A et B appartiennent au même conducteur, alors la circulation doit être nulle, ce qui est impossible le long d'une ligne de champ (où, par définition \vec{E} est parallèle à $d\vec{l}$).



2- 2- Distribution des charges

Si un conducteur est chargé, où se trouvent les charges non compensées? Supposons qu'elles soient distribuées avec une distribution volumique ρ . Prenons un volume quelconque V situé à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique. En vertu du théorème de Gauss, on a

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = 0$$

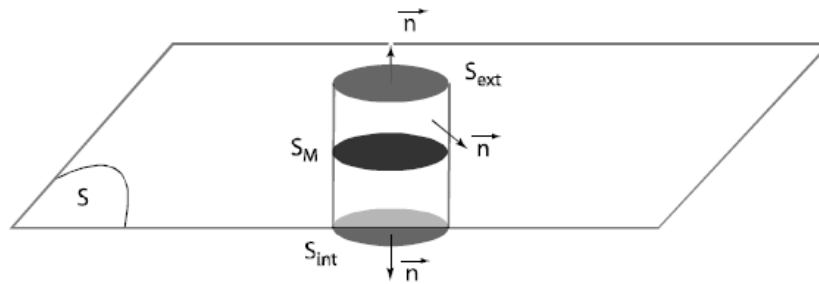
puisque le champ \vec{E} est nul partout. Cela signifie que $\rho = 0$ (autant de charges + que de charges -) et donc, qu'à l'équilibre, aucune charge non compensée ne peut se trouver dans le volume occupé par le conducteur. Toutes les charges non compensées se trouvent donc nécessairement localisées à la surface du conducteur.

Ce résultat peut se comprendre par l'effet de répulsion que celles-ci exercent les unes sur les autres. A l'équilibre, les charges tendent donc à se trouver aussi éloignées les unes des autres qu'il est possible de le faire.

2- 3- Théorème de Coulomb

En un point M infiniment voisin de la surface S d'un conducteur, le champ électrostatique \vec{E} est normal à S . Considérons une petite surface S_{ext} parallèle à la surface S du conducteur. On peut ensuite construire une surface fermée Σ en y adjoignant une surface rentrant à l'intérieur du conducteur S_{int} ainsi qu'une surface latérale S_L . En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée, on obtient

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oiint_{S_{ext}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oiint_{S_{int}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_{ext}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E S_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S_M} \sigma dS = \frac{\sigma S_M}{\epsilon_0}$$



où S_M est la surface dessinée par le tube de flux passant par S_{ext} , donc $S_M = S_{ext}$ (on peut choisir ces surfaces aussi petites que l'on veut).

Théorème : le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur de densité surfacique σ vaut

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire normal au conducteur et dirigé vers l'extérieur.

Lorsque le champ au voisinage d'un conducteur dépasse une certaine limite, une étincelle est observée : le milieu entourant le conducteur devient alors conducteur. Ce champ maximal, de l'ordre de 3 MégaV/m dans l'air, est appelé *champ disruptif*. Il correspond à l'ionisation des particules du milieu (molécules dans le cas de l'air).

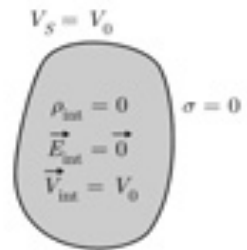
Deux cas peuvent se présenter suivant que le corps est neutre ou chargé.

a- Corps conducteur neutre

- On a :

- $\vec{E}_{int} = \vec{0} \Rightarrow V_{int} = cste = V_0$
- $\rho_{int} = 0$ (en volume) $\sigma = 0$ (en surface)

- Le volume occupé par la matière conductrice est un volume équipotentiel, et la surface qui le limite est au même potentiel.



- $\vec{grad}V_{int} = \vec{0} \Rightarrow \Delta V_{int} = 0$

L'équation de Laplace, valable dans l'espace vide où $\rho = 0$, est donc applicable aux conducteurs en équilibre.

- À l'extérieur du corps, le théorème de Gauss entraîne que $\vec{E}_{ext} = \vec{0}$.

b- Corps conducteur chargé

La condition d'équilibre des porteurs de charge entraîne toujours :

$\vec{E}_{int} = \vec{0}$ d'où $\rho_i = \epsilon_0 \text{div } \vec{E} = \vec{0}$ d'une part et $V_{int} = cste = V_0$ d'autre part.

La charge ne peut se répartir que sur la surface, celle-ci est une surface équipotentielle.

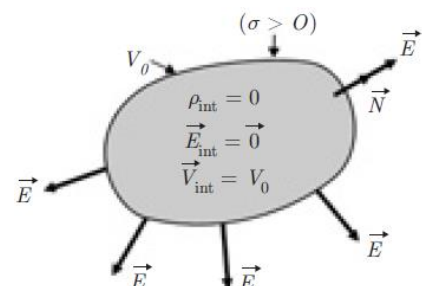
Les conditions de passage du champ \vec{E} à travers la surface donnent :

- $\vec{E}_{Text} = \vec{E}_{Tint} = \vec{0}$

Par conséquent, au voisinage de la surface, \vec{E} ne peut être que normal à la surface.

- $(\vec{E}_{ext} - \vec{E}_{int})\vec{N} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

où \vec{N} est le vecteur unitaire de la normale sortante.



Comme $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$, on a : $\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}$

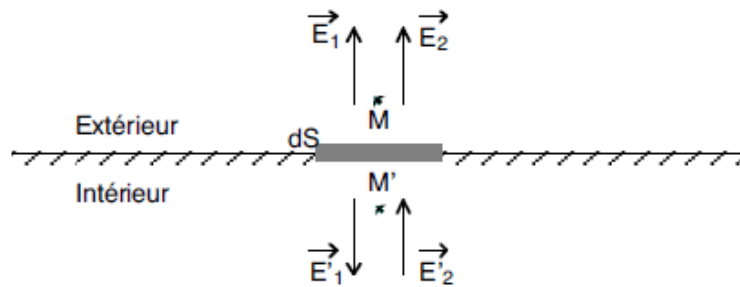
Si $\sigma > 0$, le champ est dirigé vers l'extérieur ;

Si $\sigma < 0$, il est dirigé vers l'intérieur.

Cette relation, qui traduit que les lignes de champ sont normales à la surface du conducteur, constitue le *théorème de Coulomb*.

2- 4- Pression électrostatique

Soient deux points M et M' infiniment proches de la surface d'un conducteur de densité surfacique σ , M situé à l'extérieur tandis que M' est situé à l'intérieur. Considérons maintenant une surface élémentaire dS située entre ces deux points. Soit \vec{E}_1 le champ créé en M par les charges situées sur dS et \vec{E}_2 le champ créé en M par toutes les autres charges situées à la surface du conducteur. Soient \vec{E}'_1 et \vec{E}'_2 les champs respectifs en M'.



On a alors les trois propriétés suivantes

a- $\vec{E}_2(M) = \vec{E}_2(M')$ car M et M' sont infiniment proches.

b- $\vec{E}'_2 = -\vec{E}'_1$ car le champ électrostatique à l'intérieur du conducteur est nul.

c- $\vec{E}_1(M) = -\vec{E}_1(M')$ car \vec{E}_1 est symétrique par rapport à dS, considérée comme un plan puisque M et M' peuvent être infiniment rapprochés.

Grâce à ces trois propriétés, on en déduit que $\vec{E}_2 = \vec{E}_1$, c'est à dire que la contribution de l'ensemble du conducteur est égale à celle de la charge située à proximité immédiate. Comme le champ total vaut $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ (théorème de Coulomb), on en déduit que le champ créé par l'ensemble du conducteur (à l'exclusion des charges situées en dS) au voisinage du point M est $\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$.

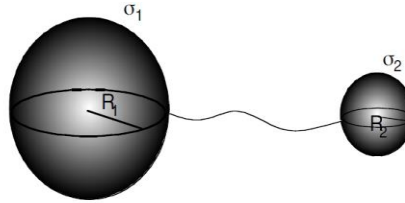
Autrement dit, la force électrostatique $d\vec{F}$ subie par cette charge $dq = \sigma dS$ de la part de l'ensemble des autres charges du conducteur vaut

$$d\vec{F} = q\vec{E}_2 = \sigma dS \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{n} dS$$

Quel que soit le signe de σ , la force est normale et toujours dirigée vers l'extérieur du conducteur. Cette propriété est caractéristique d'une pression, force par unité de surface. Ainsi, la pression électrostatique subie en tout point d'un conducteur vaut $p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$. Cette pression est en général trop faible pour arracher les charges de la surface du conducteur. Mais elle peut déformer ou déplacer celui-ci, les charges communiquant au solide la force électrostatique qu'elles subissent.

2- 5- Pouvoir des pointes

Cette expression décrit le fait expérimental que, à proximité d'une pointe, le champ électrostatique est toujours très intense. En vertu du théorème de Coulomb, cela signifie que la densité surfacique de charges est, au voisinage d'une pointe, très élevée.



On peut aborder ce phénomène avec deux sphères chargées de rayons différents, reliées par un fil conducteur et placées loin l'une de l'autre. On peut donc considérer que chaque sphère est isolée mais qu'elle partage le même potentiel V . Cela implique alors

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_1} \frac{\sigma_1 dS}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_2} \frac{\sigma_2 dS}{R_2} \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Donc, plus l'une des sphères aura un rayon petit et plus sa densité de charges sera élevée. Tout se passe comme si les charges « préféraient » les zones à forte courbure. A priori, cela semble en contradiction avec l'idée naïve que les charges non compensées ont tendance à se repousser mutuellement. Le résultat ci-dessus nous montre l'effet d'une pointe (accumulation de charges), mais ne nous offre aucune explication de ce phénomène. Qu'est ce qui, physiquement, a permis une « accumulation » de charges sur une pointe ?

Prenons une sphère chargée placée seule dans l'espace. Se repoussant mutuellement, les charges vont produire une distribution surfacique uniforme. Maintenant, si l'on fait un creux (zone concave), les charges situées au fond du creux « voient » non seulement le champ électrostatique créé par les charges immédiatement voisines, mais également celui créé par les charges situées sur les bords du creux. Ainsi, au fond du creux, le champ total est plus fort et repousse les charges vers l'extérieur, vidant ainsi le creux de charges. Faisons maintenant une pointe (zone convexe). Là, le phénomène contraire se produit. Quand une charge se retrouve, sous l'effet répulsif des autres charges, repoussée vers la pointe, le champ qu'elle-même crée devient moins important (puisqu'elle est éloignée des autres charges) vis-à-vis des charges restées sur la partie uniforme de la sphère. Cela permet ainsi à une autre charge de prendre sa place : cette nouvelle charge se déplace donc et se retrouve elle-même repoussée sur la pointe. Le conducteur atteint l'équilibre électrostatique lorsque le champ répulsif créé par toutes les charges accumulées au niveau de la pointe compense celui créé par les charges restées sur le « corps » du conducteur.

3- Capacité d'un conducteur isolé

Nous avons vu qu'il était possible de faire une analogie entre la température d'un corps et le potentiel électrostatique. Or, pour une quantité de chaleur donnée, la température d'un corps dépend en fait de sa capacité calorifique. Il en va de même pour le

potentiel électrostatique : il dépend de la capacité du corps à « absorber » les charges électriques qu'il reçoit. On peut donc suivre cette analogie et définir une nouvelle notion, la capacité électrostatique :

Capacité électrostatique \Leftrightarrow Capacité calorifique

Soit un conducteur à l'équilibre électrostatique isolé dans l'espace, chargé avec une distribution surfacique σ et porté au potentiel V . Celui-ci s'écrit

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{surface}} \frac{\sigma(P)dS}{PM}$$

en tout point M du conducteur, le point P étant un point quelconque de sa surface.

Par ailleurs, la charge électrique totale portée par ce conducteur s'écrit :

$$Q = \iint_{\text{surface}} \sigma(P)dS$$

Si on multiplie la densité surfacique par un coefficient constant a , on obtient une nouvelle charge totale $Q' = aQ$ et un nouveau potentiel $V' = aV$. On a ainsi un nouvel état d'équilibre électrostatique, parfaitement défini. On voit donc que, quoi qu'on fasse, tout état d'équilibre d'un conducteur isolé (caractérisé par Q et V) est tel que le rapport Q/V reste constant (cela résulte de la linéarité de Q et V en fonction de σ).

Définition : La capacité électrostatique d'un conducteur à l'équilibre est définie par $C = \frac{Q}{V}$ où Q est la charge électrique totale du conducteur porté au potentiel V . L'unité de la capacité est le Farad (symbole F).

Remarques :

a- La capacité C d'un conducteur est une grandeur toujours **positive**. Elle ne dépend que des caractéristiques géométriques et du matériau dont est fait le conducteur.

b- Les unités couramment utilisées en électrocinétique sont le nF ou pF.

c- Exemple : capacité d'une sphère de rayon R , chargée avec une densité surfacique σ .

$$V = V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{surface}} \frac{\sigma(P)dS}{OP} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{surface}} \frac{\sigma(P)dS}{R} = \frac{\iint_{\text{surface}} \sigma(P)dS}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

4- Superposition des états d'équilibre

Nous avons vu qu'un conducteur isolé, à l'équilibre électrostatique, est caractérisé par sa charge Q et son potentiel V , qui sont reliés entre eux par la capacité C du conducteur.

Inversement, étant donné un conducteur de capacité C , la donnée de sa distribution surfacique σ détermine complètement son état d'équilibre, puisque $Q = \iint_{\text{surface}} \sigma dS$ et $V = \frac{Q}{C}$.

Soit maintenant un autre état d'équilibre du même conducteur défini par une densité surfacique σ' . Le conducteur porte alors une charge Q' et a un potentiel V' . Du fait de la

linéarité de Q et V avec σ , toute combinaison linéaire de σ et σ' est encore un état d'équilibre :

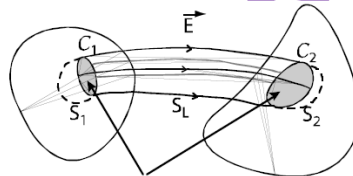
$$\sigma'' = a \sigma + b \sigma' \Leftrightarrow \begin{cases} Q' = a Q + b Q' \\ V'' = \frac{Q''}{C} = a V + b V' \end{cases}$$

On a donc ici un résultat qui nous sera utile plus tard : *toute superposition d'états d'équilibre (d'un conducteur ou d'un ensemble de conducteurs) est également un état d'équilibre.*

II- Systèmes de conducteurs en équilibre

1- Théorème des éléments correspondants

Soit deux conducteurs (A_1) et (A_2), placés l'un à côté de l'autre et portant des densités surfaciques σ_1 et σ_2 à l'équilibre. S'ils ne sont pas au même potentiel, des lignes de champ électrostatique relient (A_1) à (A_2). Soit un petit contour fermé C_1 situé sur la surface de (A_1) tel que l'ensemble des lignes de champ issues de (A_1) et s'appuyant sur C_1 rejoignent (A_2) (et y dessinent un contour fermé C_2).



Eléments correspondants

L'ensemble de ces lignes de champ constitue ce qu'on appelle un tube de flux : le flux du champ électrostatique à travers la surface latérale S_L dessinée par ce tube est nul par construction ($\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$). Soit une surface fermée produite $S = S_L + S_1 + S_2$ où S_1 est une surface qui s'appuie sur C_1 et plonge à l'intérieur de (A_1) et S_2 une surface similaire pour (A_2).

En vertu du théorème de Gauss, on a

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oiint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0}$$

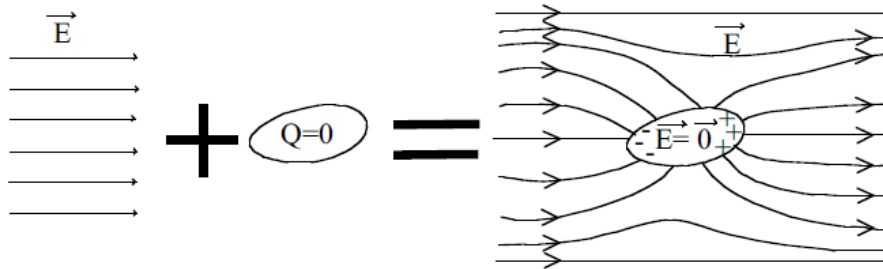
où Q_1 est la charge totale contenue sur la surface de (A_1) embrassée par C_1 tandis que Q_2 est la charge contenue sur la surface correspondante de (A_2). Du coup $Q_1 = -Q_2$ nécessairement.

Théorème : les charges électriques portées par deux éléments correspondants sont opposées.

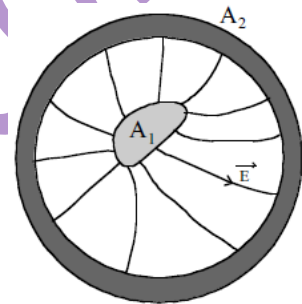
2- Phénomène d'influence électrostatique

Jusqu'à présent nous n'avons abordé que les conducteurs chargés, isolés dans l'espace. Que se passe-t-il lorsque, par exemple, on place un conducteur neutre dans un champ électrostatique uniforme ? Etant neutre, sa charge $Q = \iint_{Surface} \sigma ds$ doit rester

nulle. Mais étant un conducteur, les charges sont libres de se déplacer : on va donc assister à un déplacement de charges positives dans la direction de \vec{E} et de charges négatives dans la direction opposée. On obtient alors une **polarisation** du conducteur (création de pôles + et -), se traduisant par une distribution surfacique σ non-uniforme (mais telle que $Q = 0$).



Considérons maintenant le cas plus compliqué d'un conducteur (A_1) de charge Q_1 avec une densité surfacique σ_1 , placé à proximité d'un conducteur neutre (A_2). En vertu de ce qui a été dit précédemment, on voit apparaître une densité surfacique σ_2 non-uniforme sur (A_2) due au champ électrostatique de (A_1). Mais, en retour, la présence de charges σ_2 situées à proximité de (A_1) modifie la distribution de charges σ_1 ! A l'équilibre électrostatique, les deux distributions de charges σ_1 et σ_2 dépendent l'une de l'autre. On appelle cette action réciproque, **l'influence électrostatique**. Dans cet exemple, l'influence est dite **partielle**, car l'ensemble des lignes de champ électrostatique issues de (A_1) n'aboutissent pas sur (A_2). Soit q_2 la charge portée par la région de (A_2) reliée à (A_1). En vertu du théorème des éléments correspondants, on a $|q_2| < |Q_2|$.

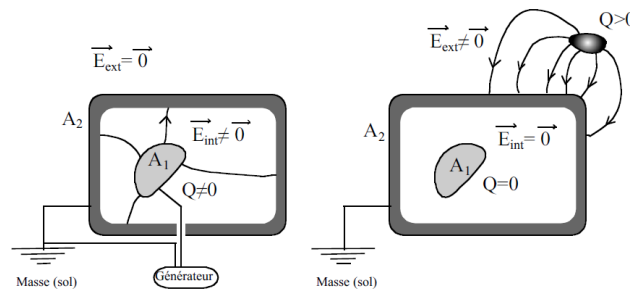


On peut créer des conditions d'**influence électrostatique totale** en plaçant (A_1) à l'intérieur de (A_2). Puisque l'ensemble des lignes de champ issues de (A_1) aboutit sur (A_2), on voit apparaître la charge $Q_2^{int} = -Q_1$ sur la face correspondante interne de (A_2), et ceci quelle que soit la position de (A_1). Cette propriété (démontrée à partir du théorème des éléments correspondants) est connue sous le nom de théorème de Faraday. La charge électrique totale sur (A_2) est simplement $Q_2 = Q_2^{int} + Q_2^{ext} = -Q_1 + Q_2^{ext}$.

Notion d'écran ou de blindage électrostatique : la cage de Faraday

Un conducteur à l'équilibre a un champ nul : de ce fait, s'il possède une cavité, celle-ci se trouve automatiquement isolée (du point de vue électrostatique) du monde extérieur. On définit par écran électrostatique parfait tout conducteur creux maintenu à un potentiel constant.

Lorsqu'on relie (A_2) au sol, on a $Q_2^{ext} = 0$ (les charges s'écoulent vers la Terre ou proviennent de celle-ci). Dans ce cas, le champ électrostatique mesuré à l'extérieur de (A_2) est nul, malgré la présence de (A_2) chargé à l'intérieur de (A_2). Ainsi, l'espace extérieur à (A_2) est protégé de toute influence électrostatique provenant de la cavité. L'inverse est également vrai.



Prenons maintenant le cas où (A_1) porte une charge nulle et où (A_2) est placé à proximité d'autres conducteurs chargés. A l'équilibre, on aura $Q_2^{\text{int}} = 0$ mais un champ électrostatique non nul mesuré à l'extérieur de (A_2) , dépendant de la distribution surfacique externe de (A_2) . Ainsi, malgré la charge portée par la surface extérieure de (A_2) , la cavité interne possède un champ électrostatique nul. Nous voyons donc que le champ électrostatique régnant à l'intérieur de (A_2) est parfaitement indépendant de celui à l'extérieur. Noter que ceci reste vrai même si (A_2) n'est pas maintenu à potentiel constant.

Une combinaison linéaire de ces deux situations permettant de décrire tous les cas possibles, nous venons de démontrer que tout conducteur creux maintenu à potentiel constant constitue bien un écran électrostatique dans les deux sens. Un tel dispositif est appelé *cage de Faraday*.

Alors que la distribution des charges Q_2^{int} dépend de la position de (A_1) , celle des charges Q_2^{ext} portées par la surface externe de (A_2) dépend, elle, uniquement de ce qui se passe à l'extérieur.

Applications :

- Protection contre la foudre : un paratonnerre est en général complété par un réseau de câbles entourant l'édifice à protéger, reliés à la Terre.
- Tout conducteur transportant un courant faible est entouré d'une gaine métallique (appelée blindage) reliée au sol. Cette gaine est parfois simplement le châssis de l'appareil.

3- Coefficients d'influence électrostatique

Nous avons vu que lorsque plusieurs conducteurs sont mis en présence les uns des autres, ils exercent une influence électrostatique réciproque. A l'équilibre (mécanique et électrostatique), les densités surfaciques de chaque conducteur dépendent des charges qu'ils portent, de leur capacité et de leurs positions relatives. Si l'on cherche à calculer, par exemple, le potentiel pris par l'un des conducteurs, alors il nous faut résoudre le problème complet : calculer les potentiels de tous les conducteurs.

Soit un ensemble de n conducteurs (A_i) de charge électrique totale Q_i et potentiel V_i , en équilibre électrostatique. Prenons (A_1) et appliquons la notion vue précédemment de superposition des états d'équilibre. On peut toujours décomposer la distribution surfacique sur (A_1) de la forme $\sigma_1 = \sum_{j=1}^n \sigma_{1j}$ où σ_{1j} est la densité surfacique de charges apparaissant sur (A_1) si tous les autres conducteurs étaient portés au potentiel nul (mais

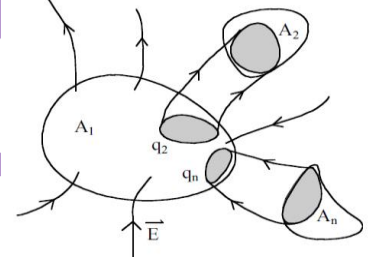
présents) et σ_{1j} celle apparaissant lorsque tous (y compris A_1) sont portés au potentiel nul, sauf (A_j). On peut alors écrire que la charge totale sur (A_1) est

$$Q_1 = \iint_{S_1} \sigma_1 dS = \sum_{j=1}^n \iint_{S_1} \sigma_{1j} dS = q_{11} + q_{12} + \dots + q_{1n}$$

Pour connaître Q_1 il faut donc connaître les n états d'équilibre électrostatique. Considérons le premier, celui où tous les autres conducteurs en présence sont mis au potentiel nul. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} q_{11} &= C_{11} V_1 \\ q_{21} &= C_{21} V_1 \\ &\dots \\ &\dots \\ q_{n1} &= C_{n1} V_1 \end{aligned}$$

En effet, la charge apparaissant sur (A_1) ne peut être due qu'à V_1 , C_{11} étant la capacité du conducteur (A_1) en présence des autres conducteurs. Mais par influence, une distribution σ_{j1} apparaît sur tous les autres conducteurs (A_j). Celle-ci dépend du nombre de lignes de champ qui joignent (A_1) à chaque conducteur (A_j). En vertu du théorème des éléments correspondants, la charge qui « apparaît » est de signe opposé à celle sur (A_1), elle-même proportionnelle à q_{11} donc à V_1 : les coefficients d'influence C_{j1} sont donc négatifs.



Considérons maintenant le deuxième état d'équilibre, où tous les conducteurs sauf (A_2) sont mis au potentiel nul. On a alors dans ce cas

$$\begin{aligned} q_{12} &= C_{12} V_2 \\ q_{22} &= C_{22} V_2 \\ &\dots \\ &\dots \\ q_{n2} &= C_{n2} V_2 \end{aligned}$$

Bien évidemment, en reproduisant cette opération, on obtient que l'état d'équilibre le plus général est décrit par

$$Q_i = q_{i1} + q_{i2} + \dots + q_{in} = \sum_{j=1}^n q_{ij} = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j$$

ou, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

Les coefficients C_{ij} sont appelés *coefficients d'influence*. Les coefficients C_{ii} sont parfois appelés *coefficients de capacité ou capacités des conducteurs en présence des autres*. Il ne faut pas les confondre avec les capacités propres C_i des conducteurs isolés, seuls dans l'espace. D'une façon générale, on a les propriétés suivantes :

- a- Les C_{ii} sont toujours positifs.
- b- Les C_{ij} sont toujours négatifs et $C_{ij} = C_{ji}$ (matrice symétrique).
- c- $C_{ii} \geq - \sum_{j \neq i} C_{ji}$, l'égalité n'étant possible que dans le cas d'une influence totale.

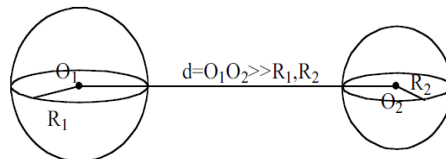
La dernière inégalité est une conséquence du théorème des éléments correspondants. En effet, prenons le conducteur (A_1) porté au potentiel V_1 alors que les autres sont mis au potentiel nul.

Tous les tubes de flux partant de (A_1) n'aboutissent pas nécessairement à un autre conducteur (ils ne le feraient que pour une influence totale). Donc, cela signifie que la charge totale située sur (A_1) est (en valeur absolue) supérieure à l'ensemble des charges situées sur les autres conducteurs, c'est-à-dire

$$Q_1 = C_{11} V_1 \geq |q_{21}| + \dots + |q_{n1}| = \sum_{j \neq 1} C_{j1} V_1$$

Exemple

Soient deux conducteurs sphériques, (A_1) et (A_2), de rayons R_1 et R_2 portant une charge Q_1 et Q_2 , situés à une distance d l'un de l'autre. A quels potentiels se trouvent ces deux conducteurs ?



En vertu du principe de superposition, le potentiel de (A_1), pris en son centre O est

$$V_1(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_1} \frac{\sigma_1 dS_1}{P_1 O} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_2} \frac{\sigma_2 dS_2}{P_2 O}$$

où le premier terme est dû aux charges Q_1 et le second à celles situées sur (A_2). Lorsque la distance d est beaucoup plus grande que les rayons, on peut assimiler $P_2 O = O' O = d$ pour tout point P_2 de la surface de (A_2) et l'on obtient

$$V_1(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{d} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_d}$$

où l'on reconnaît en C_1 la capacité d'une sphère isolée et en C_d un coefficient qui dépend à la fois de la géométrie des deux conducteurs et de leur distance. En faisant de même pour (A_2), on obtient

$$V_1(O') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{d} = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1}{C_d}$$

où C_2 est la capacité de (A_2) isolée. On obtient donc un problème linéaire qui peut se mettre sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_d} \\ \frac{1}{C_d} & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

c'est à dire $V_i = D_{ij} Q_j$ où la matrice D_{ij} est connue à partir de l'inverse des diverses capacités.

Si l'on veut se ramener au problème précédent (calcul des charges connaissant les potentiels), c'est à dire à la résolution de $Q = C_{ij} V_j$, où C_{ij} est la matrice des coefficients d'influence, il faut inverser la matrice D_{ij} . On obtiendra en effet $Q_i = D_{ij}^{-1} V_j$, ce qui donne $C_{ij} = D_{ij}^{-1}$. Dans le cas présent, on obtient

$$C_{11} = \frac{C_1}{1 - \frac{C_1 C_2}{C_d^2}} \quad C_{22} = \frac{C_2}{1 - \frac{C_1 C_2}{C_d^2}} \quad C_{12} = C_{21} = \frac{\frac{C_1 C_2}{C_d}}{1 - \frac{C_1 C_2}{C_d^2}}$$

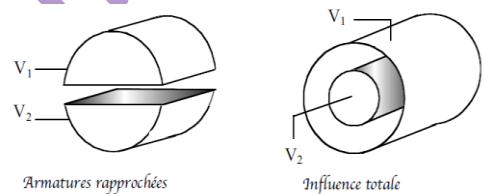
On voit clairement sur cet exemple (1) que les capacités en présence des autres conducteurs C_{ij} ne sont pas identifiables aux capacités propres C_i des conducteurs isolés dans l'espace et (2) les coefficients d'influence C_{ij} sont bien négatifs.

III- Le condensateur

1- Condensation de l'électricité

Définition : On appelle condensateur tout système de deux conducteurs en influence électrostatique. Il y a deux sortes de condensateurs :

- à armatures rapprochées
- à influence totale



En général, les deux armatures sont séparées par un matériau isolant (un diélectrique), ce qui a pour effet d'accroître la capacité du condensateur. Dans ce qui suit on suppose qu'il n'y a que du vide. Soient donc deux conducteurs (A_1) et (A_2) portant une charge totale Q_1 et Q_2 et de potentiels V_1 et V_2 . D'après la section précédente, on a

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

Les coefficients C_{ij} étant indépendants des valeurs de Q et de V , il suffit, pour les trouver, de considérer des cas particuliers simples (formellement on a ici 2 équations à 4 inconnues).

Regardons ce qui se passe dans le cas d'un condensateur à influence totale, c'est à dire un condensateur pour lequel on a

$$Q_2 = Q_2^{ext} + Q_2^{int} = Q_2^{ext} - Q_1$$

Si on relie (A_2) à la masse ($V_2 = 0, Q_2^{ext} = 0$) car on néglige toute influence extérieure), alors on obtient

$$\begin{cases} Q_1 = -Q_2 \\ C_{11} = -C_{21} \end{cases}$$

La première relation n'est vraie que si (A_2) est à la masse, mais la seconde est générale. Par ailleurs, on sait que $C_{21} = C_{12}$ (on peut aussi le redémontrer en reliant les deux conducteurs par un fil ($V_1 = V_2$) et choisir $Q_1 = 0$). Par convention, la capacité C du

condensateur, sa charge Q et sa tension entre armatures sont alors définies de la façon suivante,

$$\begin{aligned}C &= C_{11} \\U &= V_1 - V_2 \\Q &= Q_1\end{aligned}$$

ce qui fournit la relation des condensateurs

$$Q = C U$$

Remarques

a- Pourquoi appelle-t-on ces dispositifs des condensateurs? Parce qu'ils permettent de mettre en évidence le phénomène de «condensation de l'électricité », à savoir l'accumulation de charges électriques dans une petite zone de l'espace. Ainsi, en construisant des condensateurs de capacité C élevée, on obtient des charges électriques Q élevées avec des tensions U faibles.

b- La charge située sur l'armature (A_2) est $Q_2 = Q_2^{\text{int}} - Q$ (pour un condensateur à influence totale) et, en toute rigueur, ne vaut $-Q$ que lorsque (A_2) est mise à la masse. En général, elle reste cependant négligeable devant Q dans les cas considérés dans ce cours et on n'en tiendra donc pas compte.

Pour un condensateur à armatures rapprochées, on obtient le même résultat, moyennant une séparation faible (devant leur taille) des conducteurs. Dans ce type de condensateur, les charges Q_1 et Q_2 correspondent à celles qui se trouvent réparties sur l'ensemble de la surface de chaque conducteur. Mais si la distance est faible, l'influence électrostatique va condenser les charges sur les surfaces en regard, de telle sorte que l'on peut faire l'hypothèse suivante

$$\begin{aligned}Q_1 &= Q_1^{\text{ext}} + Q_1^{\text{S}} \approx Q_1^{\text{S}} \\Q_2 &= Q_2^{\text{ext}} + Q_2^{\text{S}} = Q_2^{\text{ext}} - Q_1^{\text{S}} = Q_2^{\text{ext}} - Q_1\end{aligned}$$

Ce qui nous ramène à une expression identique à celle d'un condensateur à influence totale.

2- Capacités de quelques condensateurs simples

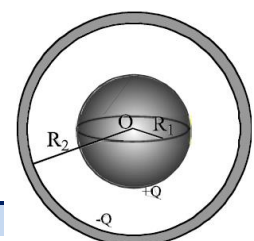
Dans ce qui suit, nous allons voir plusieurs exemples de calculs de capacités. Pour obtenir la capacité C d'un condensateur, il faut calculer la relation entre sa charge Q et sa tension U , c'est-à-dire

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{C}$$

Autrement dit, il faut être capable de calculer la circulation du champ électrostatique entre les deux armatures ainsi que la charge Q .

2- 1- Condensateur sphérique

Soit un condensateur constitué de deux armatures sphériques de même centre O , de rayons respectifs R_1 et R_2 , séparées par un vide



($R_2 > R_1$). D'après le théorème de Gauss, le champ électrostatique en un point M situé à un rayon r entre les deux armatures vaut

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

en coordonnées sphériques, ce qui donne une tension

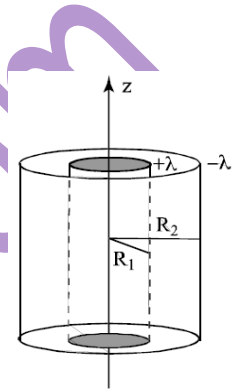
$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

et fournit donc une capacité totale

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

2- 2- Condensateur cylindrique

Soit un condensateur constitué de deux armatures cylindriques coaxiales de longueur infinie, de rayons R_1 et R_2 , séparées par un vide ($R_2 > R_1$). Soit λ la charge par unité de longueur du cylindre intérieur. D'après le théorème de Gauss, le champ électrostatique entre les deux armatures s'écrit



$$\vec{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \vec{u}_\rho$$

en coordonnées cylindriques, ce qui donne une tension

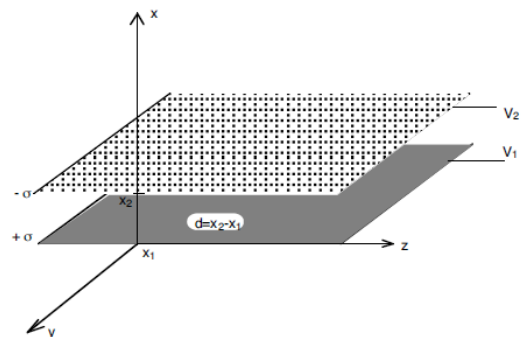
$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

et une capacité par unité de longueur

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

2- 3- Condensateur plan

Soient deux armatures (A_1) et (A_2) planes parallèles infinies, orthogonales à un même axe Ox de vecteur unitaire \vec{i} et situées à une distance $d = x_2 - x_1$ l'une de l'autre. L'armature (A_1) porte une densité surfacique de charges σ et (A_2), en vertu du théorème des éléments correspondants, porte une densité $-\sigma$. Entre les deux armatures, le champ électrostatique est la superposition des champs créés par ces deux plans infinis, c'est-à-dire



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{i}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i}$$

La différence de potentiel entre les deux armatures est alors

$$U = V_1 - V_2 = \int_{x_1}^{x_2} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

d'où une capacité par unité de surface $C = \frac{\sigma}{U} = \frac{\epsilon_0}{d}$

La valeur numérique de la permittivité ϵ_0 a été mesurée grâce à un condensateur plan.

3- Associations de condensateurs

3- 1- Condensateurs en parallèle

Soient n condensateurs de capacités C_i mis en parallèle avec la même tension $U = V_1 - V_2$. La charge électrique de chacun d'entre eux est donnée par $Q_i = C_i U$. La charge électrique totale est simplement

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \left(\sum_{i=1}^n C_i \right) U$$

ce qui correspond à une capacité équivalente $C = \sum_{i=1}^n C_i$ qui est la somme des capacités individuelles.

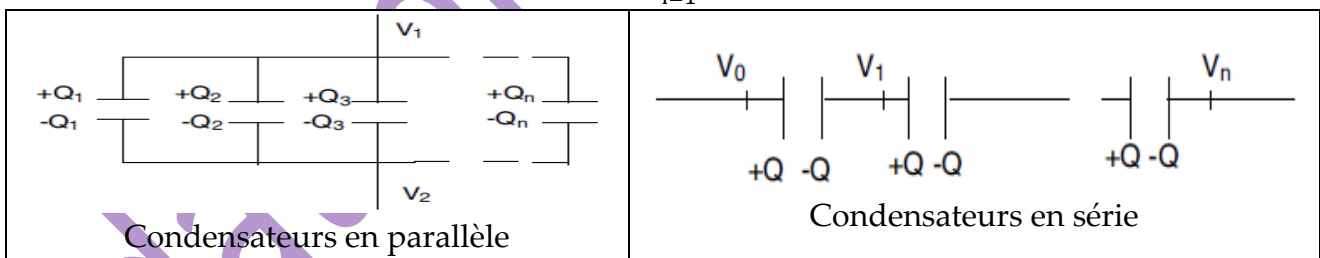
3- 1- Condensateurs en série

Soient n condensateurs de capacités C_i mis en série les uns derrière les autres. On porte aux potentiels V_0 et V_n les deux extrémités de la chaîne et on apporte la charge Q sur le premier condensateur. En supposant que tous les condensateurs sont initialement neutres, il s'établit la charge $\pm Q$ (par influence) sur les armatures des condensateurs adjacents. La tension totale aux bornes de la chaîne de condensateurs s'écrit alors simplement

$$U = V_0 - V_n = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \dots + (V_{n-1} - V_n) = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \right) Q$$

et correspond à celle d'une capacité unique C de capacité équivalente

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$



I- Energie potentielle électrostatique

1- Energie électrostatique d'une charge ponctuelle

Comment mesure-t-on l'énergie potentielle gravitationnelle d'un corps de masse m ? On le déplace d'une position initiale jusqu'à une position finale (on exerce donc une force) puis on le lâche sans vitesse initiale. S'il acquiert une vitesse, c'est qu'il développe de l'énergie cinétique. Or, en vertu du principe de conservation de l'énergie, cette énergie ne peut provenir que d'un autre réservoir énergétique, appelé énergie potentielle. Comment s'est constituée cette énergie potentielle gravitationnelle ? Grâce au déplacement du corps par l'opérateur.

Ainsi, le travail effectué par celui-ci est une mesure directe de l'énergie potentielle. On va suivre le même raisonnement pour l'énergie électrostatique.

Définition : l'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasi-statique cette particule de l'infini à sa position actuelle.

Prenons une particule de charge q placée dans un champ \vec{E} . Pour la déplacer de l'infini vers un point M , un opérateur doit fournir une force qui s'oppose à la force de Coulomb. Si ce déplacement est fait suffisamment lentement, la particule n'acquiert aucune énergie cinétique.

Cela n'est possible que si, à tout instant, $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F} = -q\vec{E}$. Le travail fourni par l'opérateur sera donc

$$W(M) = \int_{\infty}^M dW = \int_{\infty}^M \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^M q \vec{E} \cdot d\vec{r} = q[V(M) - V(\infty)]$$

Puisqu'on peut toujours définir le potentiel nul à l'infini, on obtient l'expression suivante pour l'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle située en M .

$$W_e = qV$$

On voit donc que le potentiel électrostatique est une mesure (à un facteur q près) de l'énergie électrostatique : c'est dû au fait que V est lié à la circulation du champ. Autre remarque importante : l'énergie est indépendante du chemin suivi.

2- Energie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles

Dans la section précédente, nous avons considéré une charge q placée dans un champ \vec{E} extérieur et nous avons ainsi négligé le champ créé par la charge elle-même. Mais lorsqu'on a affaire à un ensemble de N charges ponctuelles q_i , chacune d'entre elles va créer sur les autres un champ électrostatique et ainsi mettre en jeu une énergie d'interaction électrostatique.

Quel sera alors l'énergie potentielle électrostatique de cet ensemble de charges ?

Soit la charge ponctuelle q_1 placée en P_1 . On amène alors une charge q_2 de l'infini jusqu'en P_2 , c'est à dire que l'on fournit un travail $W_2 = q_2V_1(P_2) = q_1V_2(P_1) = W_1$

identique à celui qu'il aurait fallu fournir pour amener q_1 de l'infini en P_1 en présence de q_2 déjà située en P_2 . Cela signifie que ce système constitué de deux charges possède une énergie électrostatique

$$W_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = W_1 = W_2 = \frac{1}{2}(W_1 + W_2)$$

où $r_{12} = P_1 P_2$.

Remarque: Dans cette approche, nous avons considéré q_2 immobile alors que l'on rapprochait q_1 . En pratique évidemment, c'est la distance entre les deux charges qui diminue du fait de l'action de l'opérateur extérieur à la fois sur q_1 et q_2 (avec $\vec{F}_{\text{ext}/1} = -\vec{F}_{\text{ext}/2}$ puisque $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$). On aurait aussi bien pu calculer le travail total fourni par l'opérateur en évaluant le déplacement de q_1 et de q_2 de l'infini à la distance intermédiaire (« $M/2$ »). Une autre façon de comprendre cela, c'est de réaliser que nous avons évalué le travail fourni par l'opérateur dans le référentiel lié à q_2 (immobile). Celui-ci est identique au travail évalué dans un référentiel fixe (où q_1 et q_2 se déplacent) car le déplacement des charges s'effectue de manière quasi-statique (aucune énergie n'a été communiquée au centre de masse).

Si maintenant on amène une 3^{ème} charge q_3 de l'infini jusqu'en P_3 (q_1 et q_2 fixes), il faut fournir un travail supplémentaire

$$W_3 = q_3 V_{1,2}(P_3) = q_3 (V_1(P_3) + V_2(P_3)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_3 q_2}{r_{23}} \right)$$

correspondant à une énergie électrostatique de ce système de 3 charges

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_3 q_2}{r_{23}} \right)$$

Ainsi, on voit qu'à chaque couple $q_i q_j$ est associée une énergie potentielle d'interaction. Pour un système de N charges on aura alors

$$W_e = \sum_{\text{couples}} q_i V_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j>i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j>i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

où le facteur $1/2$ apparaît parce que chaque couple est compté deux fois. L'énergie électrostatique d'un ensemble de N charges ponctuelles est donc

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i(P_i)$$

Où

$$V_i(P_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}}$$

est le potentiel créé en P_i par toutes les autres charges.

Pour une distribution continue de charges, la généralisation de la formule précédente est évidente. Soit dq la charge située autour d'un point P quelconque de la distribution. L'énergie électrostatique de cette distribution s'écrit

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{distribution}} dq V(P)$$

Où

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{distribution} \frac{dq(P')}{PP'}$$

est le potentiel créé par toute la distribution. En effet ici, il n'est pas nécessaire d'exclure explicitement la charge située en P puisque $dq(P)$ peut tendre vers zéro avec l'élément infinitésimal (contribution nulle à l'intégrale, absence de divergence).

3- Energie électrostatique d'un conducteur en équilibre

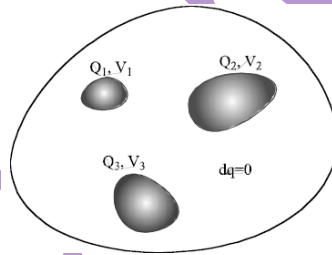
Soit un conducteur isolé, de charge Q distribuée sur sa surface S. L'énergie potentielle électrostatique de ce conducteur est alors

$$W_e = \frac{1}{2} \int_S dq V(P) = \frac{V}{2} \int_S dq = \frac{1}{2} Q V$$

puisqu'il est équipotentiel, c'est-à-dire

$$W_e = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Ceci est l'énergie nécessaire pour amener un conducteur de capacité C au potentiel V. Puisque cette énergie est toujours positive cela signifie que, quel que soit V (et donc sa charge Q), cela coûte toujours de l'énergie.



Soit un ensemble de N conducteurs chargés placés dans un volume V. A l'équilibre, ils ont une charge Q_i et un potentiel V_i . En dehors du volume occupé par chaque conducteur, il n'y a pas de charge donc $dq = 0$. L'énergie électrostatique de cette distribution de charges est alors simplement

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V dq V(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} dq_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N V_i \int_{S_i} dq_i$$

c'est-à-dire

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i$$

4- Quelques exemples

Exemple 1 : Le condensateur

Soit un condensateur constitué de deux armatures. L'énergie électrostatique de ce système de deux conducteurs est

$$W_e = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2) = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} Q U$$

c'est-à-dire

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Ainsi donc, un condensateur peut emmagasiner de l'énergie électrostatique. Mais où est-elle stockée ? Sous quelle forme ?

Prenons le cas d'un condensateur plan de densité surfacique σ uniforme et dont les armatures, séparées d'une distance d , ont une surface S commune. L'énergie de ce condensateur s'écrit

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma S)^2}{\frac{\epsilon_0 S}{d}} = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2(Sd) = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\mathcal{V}$$

où \mathcal{V} est le volume compris entre les deux armatures, où réside le champ E . On voit donc sur cet exemple que l'énergie du condensateur est stockée dans le champ lui-même.

Exemple 2 : Le dipôle

Soit un dipôle électrostatique placé dans un champ électrostatique \vec{E}_{ext} . On s'intéresse à l'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre ce dipôle et le champ et non pas à celle qui existe entre la charge $+q$ et $-q$ du dipôle lui-même. On considère donc le dipôle comme un système de deux charges, $-q$ placée en un point A et $+q$ en B , n'interagissant pas entre elles.

L'énergie électrostatique de ce système de charges est simplement

$$W_e = -q \cdot V_{ext}(A) + q \cdot V_{ext}(B) = -q \int_A^B \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{r} \approx -q \vec{E}_{ext} \cdot \vec{AB}$$

ce qui donne

$$W_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$$

où $\vec{p} = q \vec{AB}$ est le moment dipolaire électrique.

Remarque : L'énergie électrostatique entre la charge $+q$ et $-q$ du dipôle lui-même est $W_e = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 AB} = \vec{p} \cdot \vec{E}(p)$. Si le champ extérieur est bien supérieur au champ créé par la charge $-q$ en B , alors cela signifie que le dipôle est profondément modifié (voire brisé) par le champ : l'énergie d'interaction est supérieure à l'énergie interne de liaison. Cependant, la distance AB étant en général très petite, cela ne se produit pas et le dipôle se comporte comme un système lié, sans modification de son énergie interne (ceci n'est pas tout à fait exact : un champ extérieur peut faire osciller les deux charges autour de leur position d'équilibre, induisant ainsi une variation de leur énergie de liaison).

Exemple 3 : Un conducteur chargé placé dans un champ extérieur

Soit un conducteur portant une charge Q et mis au potentiel V en l'absence de champ extérieur. Il possède donc une énergie électrostatique interne $W_{e,int} = \frac{QV}{2}$, correspondant à l'énergie qu'il a fallu fournir pour déposer les Q charges au potentiel V sur le conducteur.

Si maintenant il existe un champ extérieur \vec{E}_{ext} , alors le conducteur prend un nouveau potentiel V' et son énergie peut s'écrire $W_e = \frac{QV'}{2}$. Comment calculer V' ?

La méthode directe consiste à prendre en compte la polarisation du conducteur sous l'effet du champ extérieur et calculer ainsi la nouvelle distribution surfacique σ (avec $Q = \iint_S \sigma dS$).

Une autre méthode consiste à considérer la conservation de l'énergie : en plaçant le conducteur dans un champ extérieur, on lui fournit une énergie potentielle d'interaction électrostatique qui s'ajoute à son énergie électrostatique « interne ». Supposons (pour simplifier) que le champ extérieur \vec{E}_{ext} est constant à l'échelle du conducteur. Alors ce dernier se comporte comme une charge ponctuelle placée dans un champ et possède donc une énergie potentielle d'interaction électrostatique $W_{e,ext} = QV_{ext}$. L'énergie électrostatique totale sera alors

$$W_e = QV_{ext} + \frac{QV}{2} \text{ c'est-à-dire } V' = V + 2V_{ext}$$

II- Actions électrostatiques sur un conducteur en équilibre

1- Notions de mécanique du solide

1- 1- Calcul direct des actions (force et moment d'une force)

Un conducteur étant un solide, il faut faire appel à la mécanique du solide. Tout d'abord, on choisit un point de référence O, des axes et un système de coordonnées respectant le plus possible la symétrie du solide. La force et le moment de cette force par rapport au point O sont alors

$$\vec{F} = \int_{\text{solide}} d\vec{F}$$

$$\vec{M}_O = \int_{\text{solide}} d\vec{M}_O = \int_{\text{solide}} \vec{OP} \wedge d\vec{F}$$

où $d\vec{F}$ est la force s'exerçant sur un élément infinitésimal centré autour d'un point P quelconque du solide et où l'intégrale porte sur tous les points du solide. Le formalisme de la mécanique du solide considère ensuite que la force totale ou résultante \vec{F} s'applique au barycentre G du solide.

1- 2- Liens entre travail d'une action (force ou moment) et l'action elle-même

Lors d'une translation pure du solide, considéré comme indéformable, tout point P du solide subit une translation d'une quantité fixe : $d\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = \vec{\varepsilon}$. La force totale responsable de ce déplacement doit fournir un travail

$$dW = \int_{\text{solide}} d\vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{solide}} d\vec{F} \cdot \vec{\varepsilon} = \left(\int_{\text{solide}} d\vec{F} \right) \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i \cdot d\vec{x}_i$$

où \vec{F} est la résultante de la force s'exerçant sur le solide et les x_i les coordonnées du centre de masse du solide.

Dans le cas de rotations pures, on ne s'intéresse qu'au moment des forces responsables de ces rotations. Celles-ci sont décrites par trois angles infinitésimaux $d\alpha_i$

autour de trois axes Δ_i , passant par le centre d'inertie G du solide et engendrés par les vecteurs unitaires \vec{u}_i .

L'expression générale du moment d'une force (ou couple) par rapport à G est alors

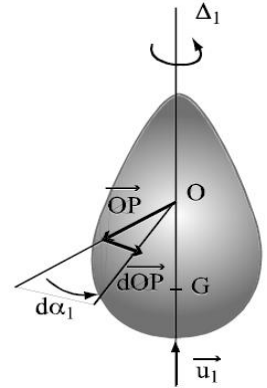
$$\vec{M} = \sum_{i=1}^3 \vec{M}_i \cdot \vec{dx}_i$$

Lors de rotations du solide, le vecteur repérant la position d'un de ses points P quelconque varie suivant la règle

$$d(\vec{OP}) = \sum_{i=1}^3 d\alpha_i \vec{u}_i \wedge \vec{OP}$$

Le travail fourni par le moment de la force est

$$\begin{aligned} dW &= \int_{\text{solide}} \vec{dF} \cdot \vec{OP} = \int_{\text{solide}} \vec{dF} \cdot \left(\sum_{i=1}^3 d\alpha_i \vec{u}_i \wedge \vec{OP} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 d\alpha_i \vec{u}_i \cdot \left(\int_{\text{solide}} \vec{OP} \wedge \vec{dF} \right) = \sum_{i=1}^3 d\alpha_i \vec{u}_i \cdot \vec{M} = \sum_{i=1}^3 d\alpha_i \mathcal{M}_i \end{aligned}$$



Dans le cas général d'une translation accompagnée de rotations, chaque effet produit une contribution au travail fourni lors de l'interaction.

1-3- Calcul des actions à partir de l'énergie potentielle (méthode des travaux virtuels)

Si l'on a cherché le lien entre travail de l'action et les composantes de celle-ci, c'est qu'il est possible de calculer ces dernières en appliquant le principe de conservation de l'énergie.

En effet une force produit un mouvement de translation de l'ensemble du solide tandis que le moment de la force produit un mouvement de rotation. Ces deux actions correspondent à un travail, donc à une modification de l'énergie d'interaction.

L'énergie mécanique E_m d'un solide s'écrit $E_m = E_c + E_p$ où E_c est son énergie cinétique et E_p son énergie potentielle d'interaction. Si le solide est isolé, son énergie mécanique reste constante, c'est à dire $dE_m = 0$, et l'on obtient ainsi le théorème de l'énergie cinétique $dE_c = dW = -dE_p$

Si l'on a par ailleurs l'expression de l'énergie potentielle E_p alors on peut directement exprimer la force ou son moment (exprimés dans dW) en fonction de E_p .

Si, lors de l'évolution du solide, celui-ci n'est pas isolé et reçoit ou perd de l'énergie, on a $dE_m \neq 0$, c'est-à-dire $dE_c = dW = dE_m - dE_p$

On voit donc que dans ce cas, le lien entre la force (ou son moment) et l'énergie potentielle n'est plus direct. Si l'on veut faire un tel lien, il faudra alors retrancher au travail la partie due à cet apport (ou perte) d'énergie mécanique. Il faudra alors considérer chaque cas particulier.

Nous allons illustrer cette approche ci-dessous.

2- Calcul direct des actions électrostatiques sur un conducteur chargé

Revenons maintenant au cas d'un conducteur chargé placé dans un champ électrostatique \vec{E}_{ext} . Celui-ci produit une force de Coulomb sur chaque charge électrique

distribuée sur la surface S du conducteur. D'après ce que nous avons vu précédemment, la force totale s'écrit

$$\vec{F} = \iint_S \vec{d^2F} = \iint_S \sigma \vec{E}_{ext} d^2S = \iint_S P d^2S \vec{n}$$

où P est ici la pression électrostatique tandis que le moment de la force électrostatique s'écrit

$$\vec{M} = \iint_S \vec{OP} \wedge \vec{d^2F} = \iint_S \vec{OP} \wedge \vec{d^2qE} = \iint_S \vec{OP} \wedge \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{n} d^2S$$

Mais ces expressions ne sont utilisables que si l'on peut calculer la densité surfacique σ .

Lorsque ce n'est pas le cas, il faut utiliser la méthode ci-dessous.

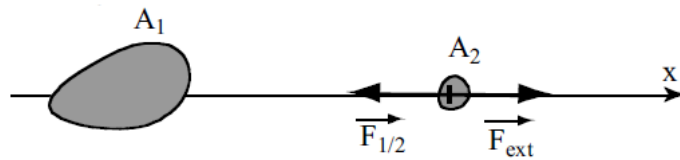
3- Calcul des actions électrostatiques à partir de l'énergie

Soit un système de deux conducteurs chargés (A_1) et (A_2). Pour connaître la force F exercée par (A_1) sur (A_2), on suppose qu'un opérateur extérieur exerce une force \vec{F}_{ext} s'opposant à F.

Cette démarche est tout à fait intuitive. Connaissant \vec{F}_{ext} on en déduira $\vec{F} = -\vec{F}_{ext}$. Cette méthode s'appelle méthode des travaux virtuels.

Un conducteur en équilibre électrostatique étant caractérisé par un potentiel V et une charge Q, il y a deux cas extrêmes qu'il faut considérer séparément.

3-1- Système isolé : charges constantes



Système isolé: charges constantes

On se place à l'équilibre mécanique, donc $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}$. Imaginons maintenant un déplacement élémentaire autour de cette position. L'opérateur fournit alors un travail $dW = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dr} = -\vec{F} \cdot \vec{dr}$, opposé à celui fournit par la force électrostatique. En vertu du principe de conservation de l'énergie, ce travail est reçu par (A_2), sous forme d'énergie électrostatique

$$dW_e = dW = -\vec{F} \cdot \vec{dr} = - \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i \cdot d\vec{x}_i$$

Or, l'énergie électrostatique est une fonction de la position de (A_2), donc $dW_e = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i}\right)_Q dx_i$. Autrement dit, dans le cas d'un déplacement d'un conducteur **isolé** on doit avoir à tout moment

$$dW_e = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i}\right)_Q \cdot d\vec{x}_i = dW = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dr} = -\vec{F} \cdot \vec{dr} = - \sum_{i=1}^3 F_i dx_i$$

c'est à dire une force électrostatique $F_i = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i}\right)_Q$ exercée par (A_1) sur (A_2) . Notez que les variables x_i décrivent la distance entre (A_1) et (A_2) .

Cette force peut aussi s'interpréter comme une force interne exercée par un conducteur sur une partie de lui-même. Ainsi, cette expression est également valable dans le cas d'un conducteur qui serait soumis à une déformation : ce serait la force exercée par le conducteur sur une partie de lui-même lors d'une modification de son énergie d'interaction électrostatique W_e .

Dans le cas de rotations pures, l'énergie dépend des différents angles et l'on va plutôt écrire pour un conducteur **isolé** (Q constant)

$$dW_e = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial W_e}{\partial \alpha_i}\right)_Q \cdot d\alpha_i = dW = \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = - \sum_{i=1}^3 \mathcal{M}_i d\alpha_i$$

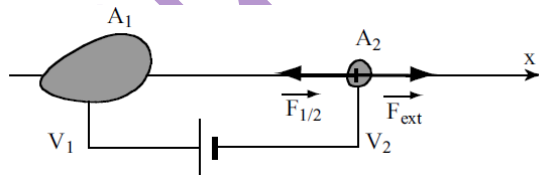
c'est à dire un moment des forces électrostatiques $\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \vec{u}_i$ dont les composantes vérifient

$$\mathcal{M}_i = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial \alpha_i}\right)_Q$$

L'utilisation de ces deux dernières expressions nécessite de calculer l'énergie électrostatique W_e et sa dépendance en fonction de la position du (ou des) conducteur(s).

La présence du signe moins indique que les actions électrostatiques (forces et moments) tendent toujours à ramener le conducteur vers une position d'énergie maximale.

3- 2- Système relié à un générateur : potentiels constants



Système non isolé: potentiels constants

A proximité de l'équilibre mécanique ($\vec{F}_{ext} = -\vec{F}$), on effectue un petit déplacement autour de cette position. L'opérateur fournit toujours un travail $dW = \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$, opposé à celui fournit par la force électrostatique, mais il existe une deuxième source d'énergie, le générateur. Lors du déplacement, celui-ci maintient les potentiels V_1 et V_2 constants. Cela ne peut se faire qu'en modifiant la charge Q_1 et Q_2 de chaque conducteur. Ainsi, le générateur fournit un travail permettant d'amener des charges dQ_1 au potentiel V_1 et dQ_2 au potentiel V_2 , c'est à dire une énergie fournie $dE_{Gen} = dQ_1 V_1 + dQ_2 V_2$.

En vertu du principe de conservation de l'énergie, ces deux sources d'énergies sont converties par (A_2) sous forme d'énergie électrostatique

$$dW_e = dW + dE_{Gen}$$

$$\frac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2) = -\vec{F} \cdot d\vec{r} + dQ_1 V_1 + dQ_2 V_2$$

$$\frac{1}{2}(dQ_1 V_1 + dQ_2 V_2) - dQ_1 V_1 - dQ_2 V_2 = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

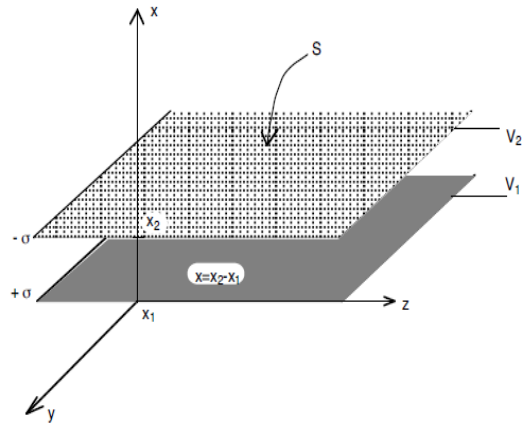
$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} (dQ_1 V_1 + dQ_2 V_2) = dW_e$$

$$\sum_{i=1}^3 F_i \cdot dx_i = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i} \right)_V \cdot dx_i$$

Autrement dit, dans le cas d'un déplacement d'un conducteur relié à un générateur (V maintenu constant), la force électrostatique vaut

$$F_i = + \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i} \right)_V$$

Les expressions obtenues dans les deux cas considérés sont générales et indépendantes du déplacement élémentaire. En fait celui-ci ne constitue qu'un artifice de calcul, connu sous le nom de *méthode des travaux virtuels*. Notez qu'une telle méthode s'appuie sur le principe de conservation de l'énergie et donc, nécessite l'identification de l'ensemble des sources d'énergie présentes.



4- Exemple du condensateur

L'énergie électrostatique du condensateur s'écrit $W_e = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$. D'après la section précédente, lorsque le condensateur est isolé, la force électrostatique entre les deux armatures s'écrit

$$F_i = - \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i} \right)_Q = \frac{Q^2}{2C^2} \left(\frac{\partial C}{\partial x_i} \right) = \frac{U^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial x_i} \right)$$

Par contre, lorsque le condensateur est relié à un générateur, on a

$$F_i = + \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i} \right)_U = \frac{U^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial x_i} \right)$$

Ainsi, on vient de démontrer que, dans tous les cas, la force électrostatique existant entre les deux armatures d'un condensateur s'écrit

$$\vec{F} = \frac{U^2}{2} \vec{\nabla} C$$

On obtient de même que le moment par rapport à l'axe Δ_i de la force électrostatique s'écrit dans tous les cas

$$\mathcal{M}_i = \frac{U^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial \alpha_i} \right)$$

Remarques :

a- Les actions électrostatiques tendent toujours à augmenter la capacité C d'un condensateur.

b- La force est équivalente à l'expression $\vec{F} = \iint_S \vec{d}^2 F = \iint_S P d^2 S \vec{n}$, ce qui signifie que la distribution de charges σ doit s'arranger de telle sorte que ce soit effectivement le cas.

Exemple : le condensateur plan

Soit un condensateur plan de capacité $C(x) = \frac{\epsilon_0 S}{x}$, où S est la surface d'influence mutuelle commune aux deux armatures et $x = x_2 - x_1$ la distance entre celles-ci.

La force exercée par l'armature 1 sur l'armature 2 est

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1/2} &= \frac{U^2}{2} \vec{\nabla}_2 C = \vec{F}_{2/1} \\ F_{1/2} &= \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x_2} = -\frac{U^2}{2} \frac{\epsilon_0 S}{(x_2 - x_1)^2} \\ F_{2/1} &= \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x_1} = \frac{U^2}{2} \frac{\epsilon_0 S}{(x_2 - x_1)^2}\end{aligned}$$

Notez que la bonne utilisation de la formule générale (portant sur le gradient de C) nécessite la compréhension de sa démonstration (ce que signifie la variable x).

5- Exemple du dipôle

Soit un dipôle électrostatique de moment dipolaire \vec{p} placé dans un champ extérieur \vec{E}_{ext} . On cherche dans un premier temps à calculer la force électrostatique exercée par ce champ sur le dipôle. Celui-ci restant à charge constante, on va donc utiliser l'expression obtenue pour un système isolé.

$$F_i = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i}\right)_Q = \frac{\partial(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}})}{\partial x_i}$$

c'est à dire une expression vectorielle

$$F_i = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}})$$

Sous l'effet de cette force, un dipôle aura tendance à se déplacer vers les régions où le champ électrostatique est le plus fort.

Le moment de la force électrostatique est donné par

$$F_i = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial \alpha_i}\right)_Q = \frac{\partial(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}})}{\partial \alpha_i}$$

avec $\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \vec{u}_i$.

On peut cependant clarifier considérablement cette expression. Il suffit en effet de remarquer que lors d'une rotation pure, le vecteur moment dipolaire varie comme

$$d\vec{p} = \sum_{i=1}^3 d\alpha_i \vec{u}_i \wedge \vec{p} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha_i} d\alpha_i$$

Puisqu'il dépend a priori de la position du point considéré, donc des angles α_i . En supposant alors que le champ \vec{E}_{ext} est constant à l'échelle du dipôle, on obtient

$$\mathcal{M}_i = \frac{\partial(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}})}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha_i} \cdot \vec{E}_{\text{ext}} = (\vec{u}_i \wedge \vec{p}) \cdot \vec{E}_{\text{ext}} = (\vec{p} \wedge \vec{E}_{\text{ext}}) \cdot \vec{u}_i$$

C'est à dire l'expression vectorielle suivante

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{\text{ext}}$$

Le moment des forces électrostatiques a donc tendance à aligner le dipôle dans la direction du champ extérieur.