Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire
Département de Physique
Safi

Année universitaire : 2022-2023
Filière : SMIA \ SMPC (S2)
Module : Électricité I
Pr. L. Mountassir

TD d'Électricité I

Force, champ et potentiel électrostatique

Série 2

Exercice 1 :

Deux charge électriques ponctuelles, identiques ($q_A = q_B = q = +2\mu C$ sont placées respectivement en A et B suivant l'axe OZ ($OA = 0B = a = 30cm$) . Une troisième charge ($Q = +4\mu C$) est placée en M sur l'axe Ox à l'abscisse $0M = x$.

1. Déterminer la force résultante $\vec{F}$ exercée par (q_A, q_B) sur la charge Q placée en M. Exprimer le module de $\vec{F}$ en fonction de x et montrer que $F(x)$ passe par un maximum : F_{max} , calculer sa valeur.
2. Déterminer $\vec{F}$ résultante agissante sur Q dans le cas où $q_A = +q$ et $q_B = -q$.

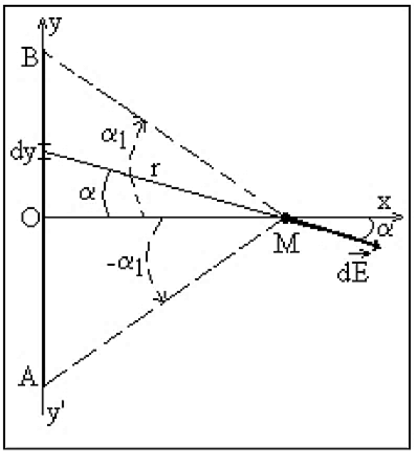
Exercice 2 :

On considère deux charges électriques ponctuelles $q_A = -q_B = -q$ (avec $q > 0$) respectivement placées en deux points $A(-a, 0)$ et $B(+a, 0)$ d'un plan xOy (avec $a > 0$).

1. a/ En utilisant la loi de Coulomb, calculer le vecteur champ électrique et le potentiel électrostatique créés par ces deux charges au point $C(0, h)$.
   b/ Retrouver le potentiel électrostatique au point C à partir de l'expression du champ électrostatique.
   c/ Représenter graphiquement et calculer la force exercée par les charges q_A et q_B sur une charge positive q_0 placée en C.
2. Ecrire l'expression du potentiel V en un point M se trouvant à r_1 de A et r_2 de B. Exprimer $V(M)$ en fonction des coordonnées polaires r et θ de M dans le cas $a << r$ (dipôle électrostatique). En déduire le champ $\vec{E}(M)$, en fonction de r et θ, exprimé dans la base polaire.

Exercice 3 :

Dans un plan xOy, on considère un fil **AB** de l'axe **Oy**, de longueur ***2a***, uniformément chargé. Un élément ***dy*** du fil portant la charge $dq = \lambda dy$ (avec $\lambda > 0$) crée en un point **M** de la médiatrice du fil un champ élémentaire $\vec{dE}(M)$ faisant un angle α avec l'axe **Ox** (Figure ci-contre).



1. Calculer les composantes $dE_x(M)$ et $dE_y(M)$ du champ élémentaire $\vec{dE}(M)$.
2. Déterminer les composantes $E_x(M)$ et $E_y(M)$ du champ électrique $\vec{E}_{AB}(M)$ créé par le fil ***AB*** au point ***M*** en fonction de la valeur limite α_1 de α.
3. En déduire le champ électrostatique créé en un point ***M*** par un fil infini uniformément chargé

Exercice 4 :

Considérons une nappe de dimension infinie et uniformément chargée avec une densité surfacique de charge $\boldsymbol{\sigma > 0}$. La nappe est contenue dans le plan ($\boldsymbol{xOy}$).

1. Déterminer la direction du champ $\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M})$ créé par cette nappe chargée ainsi que des variables dont il dépend.
2. Par application du théorème de Gauss, déterminer $\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M})$ en tout point $\boldsymbol{M}$ de l'espace.
3. Déduire le potentiel $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M})$ en tout point de l'espace.

Exercice 5 :

On considère un cylindre de rayon **R** et de longueur infinie, uniformément chargé en volume avec une densité volumique $\boldsymbol{\rho > 0}$.

1. Quelle est la direction du champ électrostatique en tout point **M** de l'espace ?
2. Montrer que la valeur du champ électrostatique ne dépend que de la distance **r** entre **M** et l'axe du cylindre.
3. En utilisant le théorème de Gauss et en précisant la surface utilisée, calculer le champ dans les deux cas **: r > R** et **r < R**

On donnera **E** en fonction de **r**.

4. Calculer le potentiel électrique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre.

On impose la condition **V = 0** pour **r = 0**.

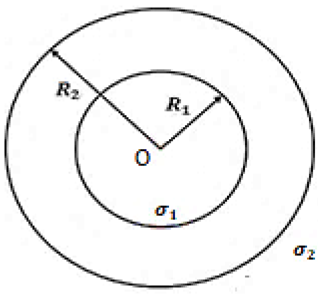
5. La densité volumique de charge $\boldsymbol{\rho}$ du cylindre n'est plus uniforme mais à symétrie cylindrique ($\boldsymbol{\rho}$ est une fonction de $\boldsymbol{r}$).

On donne $\boldsymbol{\rho = \rho_0 (r/R)}$ pour **r < R** et avec $\boldsymbol{\rho_0}$ une constante.

Déterminer le champ électrostatique dans le cas où **r < R**.

Exercice 6 :

Considérons deux sphères $\mathbf{S_1}$ et $\mathbf{S_2}$ de même centre **O** et de rayons respectifs $\mathbf{R_1}$ et $\mathbf{R_2}$ ($\mathbf{R_1<R_2}$). Les deux sphères sont chargés uniformément en surface avec les densités surfaciques de charges respectifs $\boldsymbol{\sigma_1}$ et $\boldsymbol{\sigma_2}$.



1. En utilisant la symétrie de charges, déterminer la direction du champ $\vec{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{(M)}$ créé par les deux sphères en un point **M** de l'espace.
2. En utilisant la notion d'invariance, déterminer les variables dont dépend le champ $\vec{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{(M)}$.
3. Quelle est la surface de Gauss adaptée à cette distribution de charges ?
4. En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ $\vec{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{(M)}$ crée par les deux sphères en tout point ***M(r)*** de l'espace.
5. Déterminer le potentiel ***V(M)*** en tout point de l'espace (***V (0)=0***).

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire
Département de Physique
Safi

Année universitaire : 2022-2023
Filière : SMIA \ SMPC (S2)
Module : Physique 3
Pr. L. Mountassir

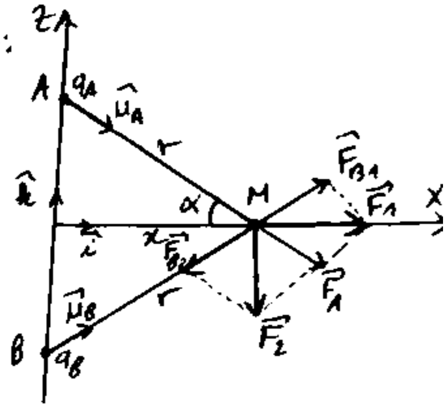
Correction TD d'Electricité I

Série 2

Exercice 1 :

on a $OA = OB = a$ et $OM = x$; $q_A = q_B = q = 2\mu C$ et $Q = 4\mu C$

* La charge q_A exerce sur Q une force électrostatique :



$$\vec{F}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A Q}{AM^3}\vec{AM} = \frac{q_A Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_A}{r_A^2}$$

* La charge q_B exerce sur Q une force électrostatique :

$$\vec{F}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_B Q}{BM^3}\vec{BM} = \frac{q_B Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_B}{r_B^2}$$

On a $\vec{F}_1$ résultante $= \vec{F}_A + \vec{F}_B$

$$\vec{F}_1 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\vec{u}_A + \vec{u}_B)$$ avec $\begin{cases}\vec{u}_A = \cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{k} \\ \text{et } \vec{u}_B = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{k}\end{cases}$

donc $\vec{u}_A + \vec{u}_B = 2\cos\alpha\,\vec{i}$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\times 2\cos\alpha\,\vec{i}$$

* On exprime r et $\cos\alpha$ en fct de x :

$$r^2 = x^2 + a^2 \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\text{donc} \quad \vec{F}_1 = \frac{qQ\,x}{2\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}\vec{i}$$

* Module de $\vec{F}_1$: $$F(x) = \frac{qQ\,x}{2\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}$$

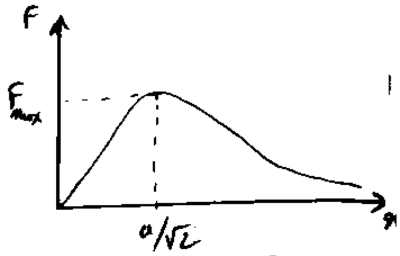
* max F :

on a $\frac{dF_1(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(x^2+a^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(x^2+a^2)^{1/2}\times 2x^2}{(x^2+a^2)^3}\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(x^2+a^2)^{1/2}(x^2+a^2-3x^2)}{(x^2+a^2)^3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{a^2-2x^2}{(x^2+a^2)^{5/2}} = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

donc $F_{max} = \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0} \frac{a/\sqrt{2}}{\left(\frac{a^2}{2}+a^2\right)^{3/2}}$



$\Rightarrow F_{max} = 0{,}62\ N$ et $x_{max} = 21{,}2$ cm

2) On détermine $\vec{F_2}$ résultante agissante sur Q dans le cas : $q_A = +q$ et $q_B = -q$

$\vec{F_A} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u_A}}{r^2}$ et $\vec{F_B} = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u_B}}{r^2}$

on a $\vec{F_2} = \vec{F_A} + \vec{F_B} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\vec{u_A} - \vec{u_B}) = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 2\sin\alpha\, \vec{k}$

donc $\vec{F_2} = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}} \vec{k}$

Exercice 2 :

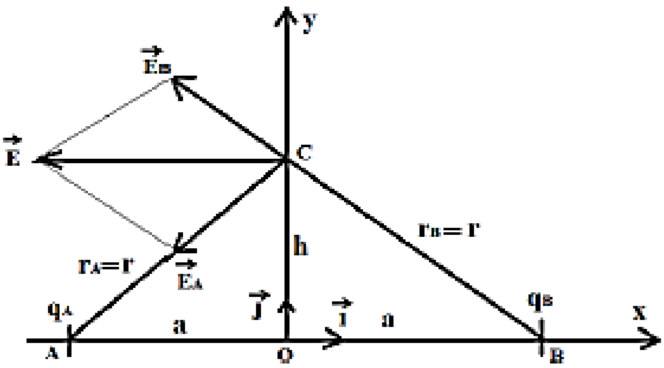
1°)a/ $\vec{E}(C) = \vec{E}_A(C) + \vec{E}_B(C)$

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\vec{u}_A + \vec{u}_B)$

$-q_A = q_B = q$ et $r_A = r_B = \sqrt{a^2+h^2}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}_A &= \frac{\vec{CA}}{r_A} = \frac{-a\vec{i} - h\vec{j}}{\sqrt{a^2+h^2}} \\ \vec{u}_B &= \frac{\vec{BC}}{r_B} = \frac{-a\vec{i} + h\vec{j}}{\sqrt{a^2+h^2}} \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \vec{u}_A + \vec{u}_B = \frac{-2a\vec{i}}{\sqrt{a^2+h^2}}$



$$\vec{E} = \frac{-qa}{2\pi\varepsilon_0(a^2+h^2)^{3/2}}\vec{i}$$

D'après la loi de Coulomb

$$V(C) = V_A(C) + V_B(C) = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0 \quad \text{car: } q_A = -q_B = -q$$

b/ Calcul de V(C) à partir de $\vec{E}$

En un point M de l'axe Oy $(OM = y)$ on a :

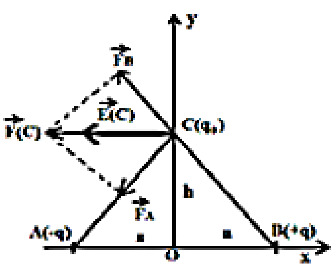
$\vec{E} = \frac{-qa\vec{i}}{2\pi\varepsilon_0(a^2+h^2)^{3/2}}$ et $d\vec{l} = dy\vec{j}$ **(déplacement élementaire suivant Oy)**

d'où: $dV = -\vec{E}.d\vec{l} = 0$ **et** $V(M) = Cte$

Comme l'origine des potentiels est rejetée à l'infini en absence de charges à l'∞.

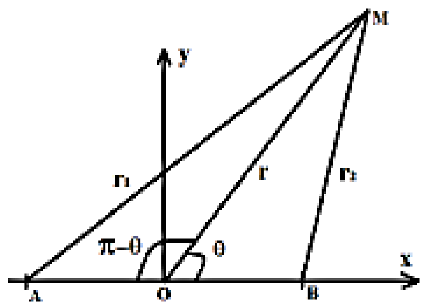
Alors: $V(M) = 0 \underset{V_\infty = 0}{\Longrightarrow} V(C) = 0$

c/ $\vec{F}(C) = q_0\vec{E}(C) = q_0 \frac{-qa}{2\pi\varepsilon_0(a^2+h^2)^{3/2}}\vec{i}$



2°)

$$V(M)=\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$
$$V(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right);\quad q_B=-q_A=q>0$$
$$r_2^2=\left(\overrightarrow{BM}\right)^2=\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}\right)^2=\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}\right)^2$$
$$r_2^2=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OM}\right|^2-2\left|\overrightarrow{OB}\right|.\left|\overrightarrow{OM}\right|cos\theta$$
$$r_2^2=a^2+r^2-2arcos\theta$$



$$r_2=(a^2+r^2-2arcos\theta)^{\frac{1}{2}}=r\left(\frac{a^2}{r^2}+1-\frac{2a}{r}cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}\ et\ \frac{1}{r_2}=\frac{1}{r}\left(\frac{a^2}{r^2}+1-\frac{2a}{r}cos\theta\right)^{-1/2}$$

$$r_1^2=\left(\overrightarrow{AM}\right)^2=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}\right)^2=\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\right)^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OM}\right|^2-2\left|\overrightarrow{OA}\right|.\left|\overrightarrow{OM}\right|cos(\pi-\theta)$$
$$Or\ cos(\pi-\theta)=cos\theta\Rightarrow r_1=(a^2+r^2+2arcos\theta)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}\left(\frac{a^2}{r^2}+1+\frac{2a}{r}cos\theta\right)^{-1/2}$$

$$\left.\begin{array}{l} a\ll r\Rightarrow\frac{1}{r_2}\approx\frac{1}{r}\left(1-\frac{2a}{r}cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{r}cos\theta\right)\\ a\ll r\Rightarrow\frac{1}{r_1}\approx\frac{1}{r}\left(1+\frac{2a}{r}cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{a}{r}cos\theta\right)\end{array}\right\}\Rightarrow V(M)=\frac{qa}{2\pi\varepsilon_0 r^2}cos\theta$$

<u>Déduction de $\vec{E}(M)$</u>

$$\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V=-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right),\quad V=V(r,\theta)$$
$$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{qacos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\right)_\theta=\frac{-qa}{\pi\varepsilon_0 r^3}cos\theta\quad et\quad\frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{qacos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\right)_r=\frac{-qa}{2\pi\varepsilon_0 r^2}sin\theta$$

d'où: $E_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{qa}{\pi\varepsilon_0 r^3}\cos\theta$ et $E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{qa}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta$ et $\vec{E}(M)=E_r\vec{e}_r+E_\theta\vec{e}_\theta$

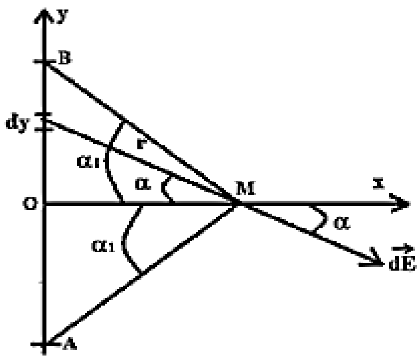
Remarque : On définit le vecteur moment dipolaire du dipôle électrostatique (vecteur dirigé de la charge négative vers la charge positive) :

$$\vec{p}=(2aq)\vec{\imath}=q\overrightarrow{AB}$$

Le vecteur moment dipolaire est une caractéristique du dipôle électrostatique.
p s'exprime en $C.m$ dans le SI. On définit plutôt le Debye, mieux adapté :
$1D=3{,}33\cdot10^{-30}C.m$

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}cos\theta\quad et\quad\left\{\begin{array}{l}E_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2pcos\theta}{r^3}\\ E_\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{psin\theta}{r^3}\end{array}\right.$$

Exercice 3 :



1°) $d\vec{E} = dE_x\vec{i} + dE_y\vec{j}$

$dE_x = dE\cos\alpha \quad et \quad dE_y = dE\sin\alpha$

$$Avec: dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

2°)

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dy}{r^2}\cos a \quad et \quad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dy}{r^2}\sin\alpha$$

$$y = xtg\alpha \Rightarrow dy = \frac{xd\alpha}{\cos^2\alpha} \quad et \quad \frac{1}{r^2} = \frac{x^2}{\cos^2\alpha}$$

$avec\ x = OM; \quad y = 0A$

$$d'où: E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{-\alpha_1}^{+\alpha_1}\cos\alpha d\alpha = \frac{\lambda\sin\alpha_1}{2\pi\varepsilon_0 x} \quad et \quad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{-\alpha_1}^{+\alpha_1}\sin d\alpha = 0$$

3°)

Dans le cas d'1 fil infini, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \quad et \quad \vec{E}(M) = \frac{\lambda\sin\alpha_1}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{i} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{i}$

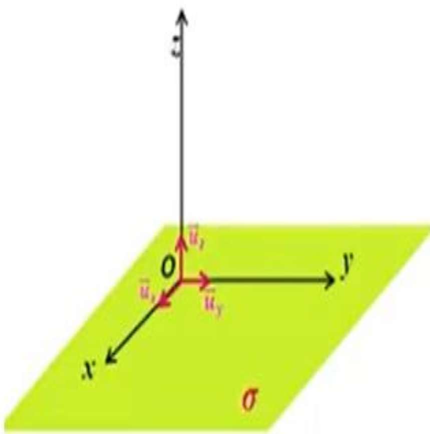
Exercice 4 :

1)

1) * La direction du champ :

Plaçons nous dans un repère cartésienne $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$

$\hat{E}(M) = E_x(x,y,z)\hat{e}_x + E_y(x,y,z)\hat{e}_y + E_z(x,y,z)\vec{e}_z$



• Le plan $(M, \hat{e}_x, \hat{e}_z)$ est un plan de symétrie, donc $\hat{E}$ appartient à ce plan.

• Le plan $(M, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ est un plan de symétrie, donc $\hat{E}$ appartient à ce plan

le champ $\hat{E}$ est donc dirigé selon $\hat{e}_z$: $\hat{E}(M) = E(x,y,z)\vec{e}_z$

* Variables dont dépend le champ $\hat{E}(M)$

Il y a invariance de la distribution de charges :

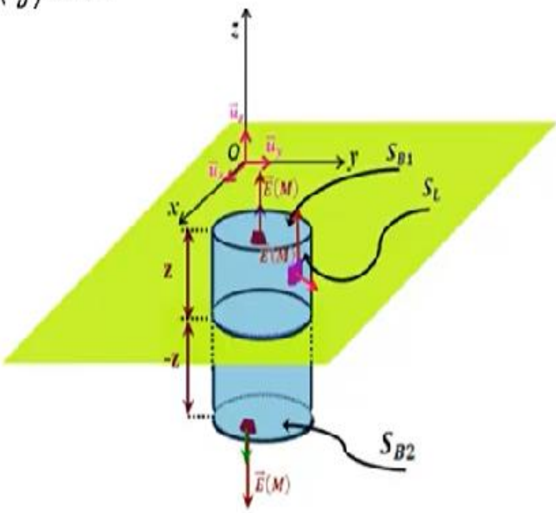
• Par translation selon l'axe (Ox) ⇒ E ne dépend pas de x.

• Par translation selon l'axe (Oy) ⇒ E ne dépend pas de y.

On obtient donc $\hat{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$.

2) Détermination de $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace :

. On prend pour surface de Gauss un cylindre d'axe // à l'axe (Oz) et de hauteur $2z$.



. Calcule de flux :

$$\oiint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \iint_{S_{b1}} \vec{E}(M)\,\vec{dS}_{b1} + \iint_{S_L} \vec{E}(M)\,\vec{dS}_L + \iint \vec{E}(M)\,\vec{dS}_{b2}$$

$$\iint_{S_{b1}} \vec{E}(M)\,\vec{dS}_{b1} = \iint \vec{E}(z)\,\vec{e_z}\, dS_{b1}\,\vec{e_z} = \iint E(z)\,dS_{b1} = E(z)\iint_{S_{b1}} dS_{b1}$$

$$= E(z)\,S_{b1} = E(z)\,S_b$$

$$\iint_{SL} \vec{E}(M)\,\vec{dS}_L = \iint_{S_L} E(M)\,\vec{e_z}\, dS_L\,\vec{n} = \iint_{S_L} E(M)\,dS_L\,\vec{e_z}\cdot\vec{n} = 0$$

$$\iint_{S_{b2}} \vec{E}(M)\,\vec{dS}_{b2} = \iint_{S_{b2}} E(-z)\,\vec{e_z}\,dS_{b2}(-\vec{e_z}) = \iint_{S_{b2}} E(z)\,dS_{b2}$$

$$= E(z)\,S_{b2} = E(z)\,S_b.$$

donc $\oiint \vec{E}(M)\,\vec{dS} = E(z)\,S_{b1} + 0 + E(z)\,S_b = 2\,E(z)\,S_b$

d'où $\oiint_S \vec{E}(M)\,\vec{dS} = \dfrac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q_i}{\varepsilon_0}$

avec $Q_i = \iint_{S_b} \sigma\, dS_b = \sigma \iint dS_b = \sigma S_b$

$\Rightarrow 2E(z)\,S_b = \dfrac{\sigma S_b}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

donc $\vec{E}(z>0) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{e_z}$

$\vec{E}(z<0) = \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{e_z}$

$\Longrightarrow \vec{E}(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\dfrac{|z|}{z}\,\vec{e_z}$

3) Le potentiel électrostatique :

on a $\vec{E}(M) = -\vec{grad}\,V$

$$\vec{grad}\,V = \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(M) = \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \vec{E_z} = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$E_z(z) = -\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -\frac{dV(z)}{dz} = E(z) \Rightarrow V(z) = -\int E(z)\,dz$$

$$z>0 \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow V(z) = -\int \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,dz = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z + cte1$$

$$z<0 \qquad E(z) = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow V(z) = -\int \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\,dz = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z + cte2$$

La continuité de V : $(z=0)$:

$$V(z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z + cte1 & z>0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z + cte2 & z<0 \end{cases} \qquad V(z=0^+) = V(z=0^-) = V(z=0)$$

$$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \times 0 + cte1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \times 0 + cte2$$

$$cte1 = cte2 = C$$

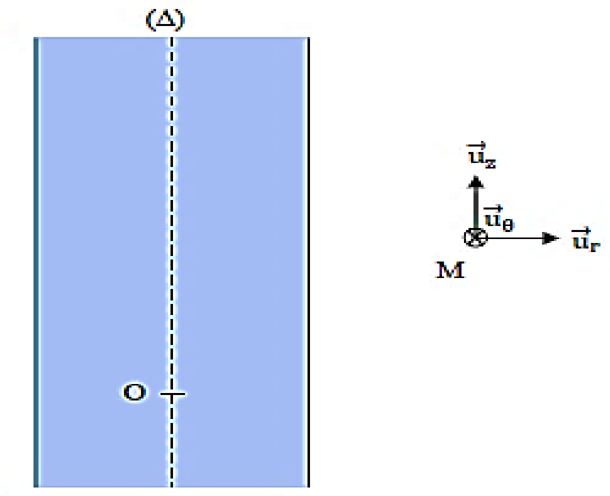
$$\text{doc} \quad V(z) = \begin{cases} \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} z + C & z \geq 0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z + C & z \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 5 :

1. Direction du champ.

Les plans, contenant le point M, perpendiculaire et orthogonal à l'axe de la distribution de charges sont des plans de symétrie de cette distribution : le champ électrostatique doit donc avoir sa direction portée par l'intersection de ces deux plans.

Le champ est porté par le vecteur radial de la base cylindro-polaire.



Plaçons-nous dans un repère cylindrique.

On a alors : $\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z).\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,z).\vec{u}_\theta + E_z(r,\theta,z).\vec{u}_z$

- <u>Étude des symétries</u> :

  Le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ est un plan de symétrie, donc $\vec{E}$ appartient à ce plan.

  Le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie, donc $\vec{E}$ appartient à ce plan.

  Le champ $\vec{E}$ est donc dirigé selon $\vec{u}_r$: $\vec{E}(M) = E(r,\theta,z).\vec{u}_r$

2 .

- <u>Étude des invariances</u> :

Il y a invariance de la distribution de charges :
- par translation selon l'axe (Oz) $\Rightarrow$ E ne dépend pas de z
- par rotation autour de l'axe (Oz) $\Rightarrow$ E ne dépend pas de θ

On obtient donc : $\vec{E}(M) = E(r).\vec{u}_r$

Les symétries et invariances permettent d'écrire le vecteur champ électrostatique sous la forme :

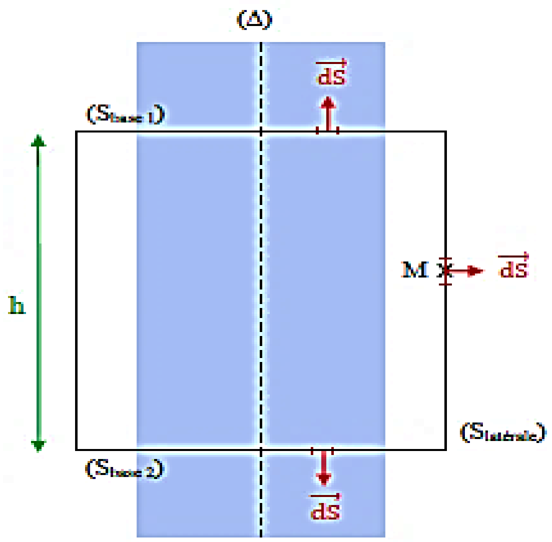
$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$$

3 .

On prend, dans les deux cas, pour surface de Gauss un cylindre fermé d'axe confondu avec celui de la distribution, de hauteur h, de rayon r.

- <u>Détermination de E(r) par application du théorème de Gauss</u> :

Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre fermé d'axe (Oz), de rayon r et de hauteur h.



D'après le théorème de Gauss, $$\oiint_{(S_{Gauss})} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

$$\oiint_{(S_{Gauss})} \vec{E}.\vec{dS} = \iint_{(S_{base\ 1})} \vec{E}.\vec{dS} + \iint_{(S_{latérale})} \vec{E}.\vec{dS} + \iint_{(S_{base\ 2})} \vec{E}.\vec{dS}$$

✓ Sur les surfaces de base du cylindre, $\vec{E} \perp \vec{dS} \Rightarrow \vec{E}.\vec{dS} = 0$

Donc $$\iint_{(S_{base\ 1})} \vec{E}.\vec{dS} = \iint_{(S_{base\ 2})} \vec{E}.\vec{dS} = 0$$

✓ Sur la surface latérale, $\vec{E} = E(r).\vec{u}_r$ et $\vec{dS} = dS.\vec{u}_r$

Donc $$\iint_{(S_{latérale})} \vec{E}.\vec{dS} = \iint_{(S_{latérale})} E(r).dS = E(r) \iint_{(S_{latérale})} dS = E(r) \times 2\pi rh$$

(car E(r) est constant sur la surface latérale)

Donc $$\oiint_{(S_{Gauss})} \vec{E}.\vec{dS} = 2\pi rh \times E(r)$$

- **1^er cas : si $r \geq R$**

$Q_{int} = \rho \times \pi R^2 h$

L'équation (1) donne ainsi : $2\pi r h \times E(r) = \dfrac{\rho \times \pi R^2 h}{\varepsilon_0}$, soit $E(r) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$

Finalement, $\boxed{\text{si } r \geq R,\ \vec{E}(M) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\ \vec{u}_r}$

- **2^ème cas : si $r \leq R$**

$Q_{int} = \rho \times \pi r^2 h$

L'équation (1) donne alors : $2\pi r h \times E(r) = \dfrac{\rho \times \pi r^2 h}{\varepsilon_0}$, soit $E(r) = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}$

Finalement, $\boxed{\text{si } r \leq R,\ \vec{E}(M) = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\ \vec{u}_r}$

4. **Potentiel.**

Comme le vecteur champ électrostatique est l'opposé du gradient du potentiel *V* et qu'il ne dépend que *r* (la distribution étant à symétrie cylindrique) on obtient :

$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$$

On obtient par intégration le potentiel *V*. Les constantes d'intégration sont obtenues par la condition de potentiel nul en $r = 0$ et par la continuité du potentiel en $r = R$.

A l'intérieur de la distribution:

$$V = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_o}$$

A l'extérieur de la distribution:

$$V = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln\frac{R}{r} - \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o}$$

5. Champ à l'intérieur.

Les propriétés de symétrie et d'invariance ne sont pas modifiées. En considérant une surface de Gauss identique à celle décrite en 3 et en prenant en compte la dépendance radiale de la distribution dans le calcul de la charge intérieure à cette surface de Gauss, on trouve:

$$Q_{int} = \iiint \rho d\tau = \iiint \rho_o \frac{r}{R} r d\theta dr dz$$

$$Q_{int} = \rho_o \frac{h}{R} 2\pi \frac{r^3}{3}$$

D'où :

$$E_r = \frac{\rho_o}{3\varepsilon_o}\frac{r^2}{R}$$

Exercice 6 :

1- En utilisant la symétrie de charges, déterminer la direction du champ $\vec{E}(M)$ créé par les deux sphères en un point M de l'espace.

On a une symétrie sphérique, donc on travailler dans le système des coordonnés sphérique.

- ***Le plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ est un plan de symétrie de la distribution de charge considérée, donc $\vec{E}(M) \epsilon$ plan$(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.***

- ***Le plan*** $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\varphi})$ ***est un plan de symétrie de la distrubition de charge consiérée, donc*** $\vec{E}(M) \epsilon$ ***plan*** $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\varphi})$.

Donc $\vec{E}$ ***est porté par l'intersection des deux plans donc par*** $\overrightarrow{e_r}$,

2- En utilisant la notion d'invariance, déterminer les variables dont dépend le champ $\vec{E}$(M).

- ***Si on fait une rotation dans les deux sphères suivant*** θ ***ou*** φ ***: la distribution de charges reste inchangé par rapport au point M(r) .***
- ***Par contre si on fait une translation suivant r, la distribution change***

Donc $\vec{E}(M) = E(r)\,\overrightarrow{e_r}$.

3- Quelle est la surface de Gauss adaptée à cette distribution de charges ?

La symétrie est sphérique donc la surface de Gauss adaptée est une sphère de même centre que les deux sphères chargées et de rayon r.

4- En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ $\vec{E}$(M) crée par les deux sphères en tout point M(r) de l'espace.

<u>1ére cas : r < R1</u>

$$\Phi = \oiint_{surface\ de\ Gauss} \vec{E}_1 . \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Q_{int} ***: charge totale qui se trouve à l'intérieur de la surface fermée de Gauss.***

$\vec{E}_1 = E_1(r)\overrightarrow{e_r}\,, \qquad \overrightarrow{dS} = dS\overrightarrow{e_r}$

$Q_{int} = 0 \quad donc \quad E_1 = 0$

<u>2éme cas : R1 < r < R2</u>

$Q_{int} = \sigma_1 4\pi R_1^2, \qquad \Phi = E4\pi r^2 = \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{\varepsilon_0} \qquad donc \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$

<u>3éme cas : R2 < r</u>

$Q_{int} = \sigma_1 4\pi R_1^2 + \sigma_2 4\pi R_2^2$

$$\Phi = E4\pi r^2 = \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2 + \sigma_2 4\pi R_2^2}{\varepsilon_0}$$

Donc $\vec{E}_3 = \left(\frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}\overrightarrow{e_r}$

5- Déterminer le potentiel V(M) en tout point de l'espace. (V (0) = 0).

<u>1ére cas : r < R1</u>

$\vec{E}_1 = -\overrightarrow{grad}V_1 = \vec{0} \quad donc \;\; V_1 = Constante = C_1$

<u>2éme cas : R1 < r < R2</u>

$$dV_2 = -\frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0}.\frac{dr}{r^2} \quad ➡ \quad V_2 = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0}.\frac{1}{r} + C_2$$

<u>3éme cas : R2 < r</u>

$$dV_3 = -\left(\frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0}\right).\frac{dr}{r^2} \quad ➡ \quad V_3 = \left(\frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0}\right).\frac{1}{r} + C_3$$

Détermination des constantes : C_1, C_2 ***et*** C_3 ***:***

- $\mathbf{V\,(0) = 0} \Rightarrow V_1(0) = C_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 0$
- Continuité de **V** en R_1

$$\lim_{\substack{r\to R_1\\ r<R_1}} V_1(r) = \lim_{\substack{r\to R_1\\ r>R_1}} V_2(r) \Rightarrow 0 = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0}.\frac{1}{R_1} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow V_2(r) = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\left(\frac{R_1}{r} - 1\right)$$

- Continuité de **V** en R_2 :

$$\lim_{\substack{r\to R_2\\ r<R_2}} V_2(r) = \lim_{\substack{r\to R_2\\ r>R_2}} V_3(r) \Rightarrow \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right) = \left(\frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0}\right).\frac{1}{R_2} + C_3$$

$$C_3 = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right) - \left(\frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0}\right).\frac{1}{R_2}$$

Donc

$$V_3 = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right) + \left(\frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0}\right).\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$