I- Champ électrostatique dans le vide

1- Définition d'un champ crée par une charge ponctuelle

Considérons la force électrostatique $\vec{F}$ tel que :

$$\vec{F} = \frac{q\,q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{q\,q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}\vec{u}$$

Divisons cette expression par la charge q'.

Nous obtenons une grandeur vectorielle qui dépend de la charge q et de la position du point M : cette grandeur est appelée le champ électrostatique $\vec{E}(M)$, crée au point M par q fixée en P.

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}\vec{u} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{u}$$

avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}$ et $r = \|\overrightarrow{PM}\|$

Si $q' > 0$: $\vec{E}$ et $\vec{F}$ ont même direction et même sens ;

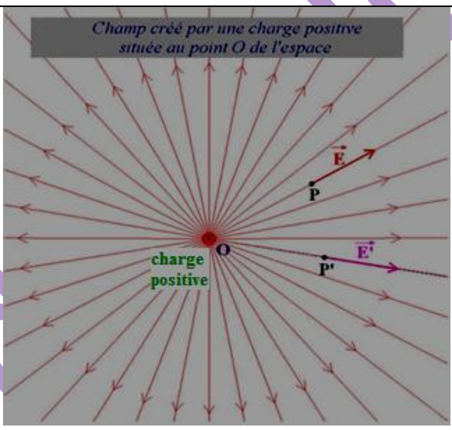
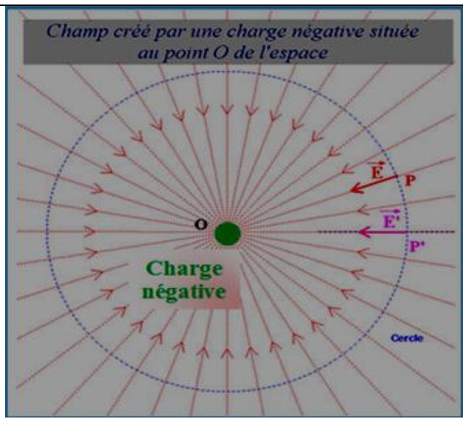
Si $q' < 0$: $\vec{E}$ et $\vec{F}$ ont même direction et de sens opposés.

$\vec{E}$ est le champs électrostatique crée par la charge ponctuelle q (= Charge source)

Si $r \longrightarrow \infty$, $\vec{E} \longrightarrow 0$

Si $r \longrightarrow 0$, la charge n'est plus considérer ponctuelle.

- La direction de $\vec{E}$: droite passant par la charge source et le point **M**.
- Le sens de $\vec{E}$ dépond de **q ;**
- Le champ crée par une charge ponctuelle est radial.

$q > 0 \Rightarrow \vec{E}$ **centrifuge (s'éloigne de q)**	$q < 0 \Rightarrow \vec{E}$ **centripète (dirige vers q)**
	

Remarque : le champ électrique diminue en fonction de **r**. Tous les points à la surface de la sphère centrée sur la charge ponctuelle ont même valeur du champ. Ils constituent une ligne équipotentielle (nous reviendrons sur cette notion).

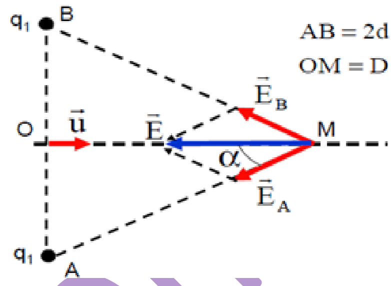
2- Distribution de charges ponctuelles : Principe de superposition

i- Champ électrique crée par deux charges ponctuelles

Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 placées respectivement en M_1 et M_2 distants de r_1 et r_2 d'un point **M**. Au point **M** considéré, on place le champ $\vec{E_1}$ crée par q_1, et le champ crée par $\vec{\mathbf{E}}_2$. Le champ résultant est donné par la somme vectorielle des champs qui se superposent : $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2$

Exemples de calcul : (Deux charges ponctuelles identiques $q_1 < 0$)

Le champ électrique en **M** est donc la superposition ou la somme du champ crée par la charge $\mathbf{q_1}$ en **A** et de celui crée par $\mathbf{q_1}$ en **B** :



$$\vec{E}_A(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\|\overrightarrow{AM}\|^2}\frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|} \quad \text{et} \quad \vec{E}_B(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\|\overrightarrow{BM}\|^2}\frac{\overrightarrow{BM}}{\|\overrightarrow{BM}\|}$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{E}\| = 2\,\|\vec{E}_A(M)\|\cos\alpha$$

$$\|\vec{E}_A(M)\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|}{(D^2+d^2)} = \|\vec{E}_B(M)\| \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{D}{\sqrt{(D^2+d^2)}}$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{E}\| = 2\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|}{(D^2+d^2)}\frac{D}{\sqrt{(D^2+d^2)}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|D}{(D^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|D}{(D^2+d^2)^{3/2}}\,\vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$$

ii- Action d'un système $q_1, q_2, q_3, \ldots, \ldots q_i \ldots . q_n$ sur une charge q_0 en M

Considérons la force $\vec{\mathbf{F}}$ définie par (***) et on la divise par la charge q.

Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$, crée au point M par le système de chargées $\mathbf{q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_n}$ fixées en $\mathbf{P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_n}$, dépend de la structure des **n** charges et de la position du point **M**. il s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}}{q} = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_iM}}{\|\overrightarrow{P_iM}\|^3} = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u_i}}{\|\vec{r_i}\|^2}$$

$$\vec{u_i} = \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\|\overrightarrow{P_iM}\|} \quad \textbf{et} \quad \vec{r_i} = \|\overrightarrow{P_iM}\|$$

Le champ électrostatique $\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{M})$ qui résulte de $\vec{\mathbf{F}}$ est la somme vectorielle des champs $\vec{\mathbf{E_i}}(\mathbf{M})$ crées par les charges q_i :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{i=n}\vec{E_i}(M)$$

Où $\vec{\mathbf{E_i}}(\mathbf{M})$est le champ crée en M par la charge q_i ponctuelle placée en P_i **(Figure 3)**

$$\vec{E_i}(M) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_iM}}{\|\overrightarrow{P_iM}\|^3} = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u_i}}{\|\vec{r_i}\|^2}$$

Nous venons de définir une grandeur vectorielle, fonction du point M, caractéristique du système de charges $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_n$, sources du champ $\vec{\mathbf{E}}$ (Figure 3).

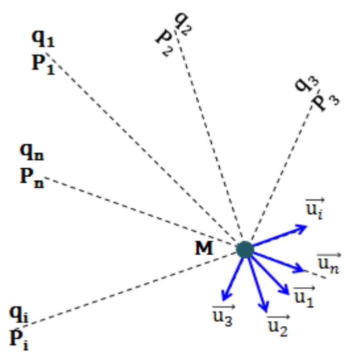


Figure 3

Remarque : Le champ ne dépend que des sources, et pas de la charge au point M ;

L'introduction du champ $\vec{E}$ aboutit à une nouvelle description de l'interaction électrostatique. Nous avons remplacée l'action à distance contenue dans la loi de Coulomb par la notion de champ électrostatique, grandeur locale.

Au lieu de considérer les charges q_i et q en présence interagissant par l'intermédiaire de la force de Coulomb :

$$\textbf{Charge } q_i \textbf{ en } P_i \quad \Rightarrow \quad \textbf{Charge q soumise à } \vec{F} = q\sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\|\overrightarrow{P_iM}\|^3}$$

On exprime le champ $\vec{E_i}$ crée par la charge q_i dans tout l'espace entourant cette charge. Ce champ existe indépendamment du fait qu'il existe ou non une autre charge q en présence de la charge q_i, source du champ $\vec{E_i}$. La force $\vec{F}$ subie par q placée en M résulte de l'existence en ce point d'un champ électrostatique :

Charge q_i en P_i Source du champ électrostatique $\Rightarrow$ $\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\|\overrightarrow{P_iM}\|^3}$ $\Rightarrow$ **Agit sur la charge q: $\vec{F} = q\,\vec{E}$**

Remarque :

Le champ $\vec{E}(M)$ présente deux caractéristiques :

- La première réside dans le fait que $\vec{E}(M)$ est de la forme $f(r)\vec{u_r}$, propriété que nous exploiterons dans le calcul de la circulation de E et qui conduira à la définition du potentiel électrostatique.
- La deuxième caractéristique est la forme de f(r), en $1/r^2$, propriété que nous exploiterons dans le calcul du flux de $\vec{E}$ et qui conduira au théorème de Gauss. Les résultats que nous obtiendrons seront valables pour tout champ de la forme $f(r)\vec{u_r} = \frac{\vec{u_r}}{r^2}$, en particulier le champ de gravitation.

iii) Exercice d'application

Soit un carré ABCD et O son centre. La charge q = 1 μC placée en A créé en O le champ électrostatique $E_0 = 2.10^3$ V/m. Déterminer le champ électrostatique créé en O lorsqu'on place en A, B, C et D la même charge q = 1 μC.

3- Champ électrostatique crée par une distribution de charges continue

Nous savons déterminer le champ électrostatique crée par une distribution de charges ponctuelles :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E_i}(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\|\overrightarrow{P_iM}\|^3} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u_i}}{\|\vec{r_i}\|^2}$$

Comment calculer le champ crée par une distribution continue ?

Pour calculer le champ crée par une distribution de charges, la distribution de charges peut être découpée en éléments de volume ou de surface ou de courbe qui portent une charge élémentaire dq. Chacune de ces charges élémentaires crée un champ électrostatique appelé élémentaire. Le champ crée par toute la distribution est, par application du principe de superposition, la somme des charges élémentaires crées par les charges dq.

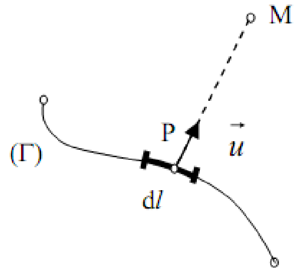
3- 1- Cas d'une distribution de charges linéique

On considère une portion de courbe Γ = AB portant une densité linéique de charge λ.

Un élément dl entourant un point P porte une charge :

$$dq = \lambda \times dl$$

Cette charge crée en M un champ donné par les expressions suivantes :



$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(P)dl}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(P)dl}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}\overrightarrow{PM}$$

Avec $\overrightarrow{PM} = \|\overrightarrow{PM}\|\vec{u} = r\,\vec{u}$

D'où le champ total $\vec{E}(M)$ créé en M par toute la distribution linéique de charge s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(\Gamma)}\frac{\lambda(P)dl}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(\Gamma)}\frac{\lambda(P)dl}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}\overrightarrow{PM}$$

Cette dernière relation n'est valable que si le fil est de dimension finie.

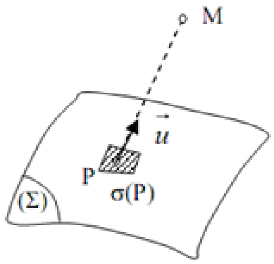
Remarque

On peut montrer que le champ $\vec{E}(M)$ ne sont pas définis en un point M situé sur le fil chargé.

3- 2- Cas d'une distribution de charges surfacique

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges, on considère une charge dq portée par un élément de surface dS.

Le champ crée en M par dq sont donnés par :



$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(P)ds}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(P)ds}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}\overrightarrow{PM}$$

Avec $\overrightarrow{PM} = \|\overrightarrow{PM}\|\vec{u} = r\,\vec{u}$

D'où le champ total $\vec{E}(M)$ créé par les charges réparties sur la surface Σ :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(\Sigma)}\frac{dq}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(\Sigma)}\frac{\sigma(P)ds}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(\Sigma)}\frac{\sigma(P)ds}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}\overrightarrow{PM}$$

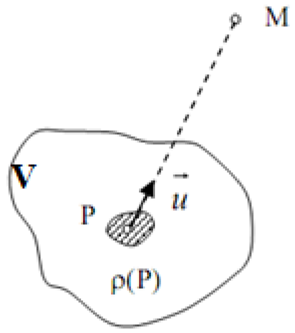
Cette relation suppose que la distribution de charges s'étend sur une surface de dimension fini. Dans le cas contraire, on choisira comme origine des potentiels un point à distance finie.

Remarque

Le champ $\vec{E}$ n'est pas défini sur une surface chargée. Il subit une discontinuité à la traversée de la face chargée.

3- 3- Cas d'une distribution de charges volumique

Soit une distribution volumique de charges contenue dans le volume V ; ρ(P) est la densité volumique de charges en un point P du volume V.



La charge contenue dans l'élément de volume entourant le point P est :

$$dq = \rho(P)d\tau$$

Cette charge crée en M un champ $d\vec{E}$ comme le ferait une charge ponctuelle dq placée en P:

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(P)d\tau}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(P)d\tau}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}\overrightarrow{PM}$$

Avec $\overrightarrow{PM} = \|\overrightarrow{PM}\|\vec{u} = r\,\vec{u}$

D'après le principe de superposition, le champ total $\vec{E}(M)$ créé par la distribution est la somme des contributions $d\vec{E}(M)$:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{dq}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(P)d\tau}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(P)d\tau}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}\overrightarrow{PM}$$

Il faut donc calculer une intégrale de volume pour obtenir le champ $\vec{E}(M)$.

Remarque

On peut montrer que le champ $\vec{E}$ est défini en un point M intérieur à la distribution de charges.

II - Potentiel électrostatique dans le vide

1 – Introduction

Le potentiel électrostatique **V(M)** associé au champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est une fonction scalaire contrairement à $\vec{E}(M)$.

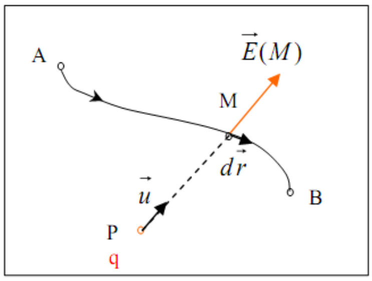
Nous verrons, dans beaucoup de cas, que le potentiel sera un intermédiaire commode dans le calcul du champ vectoriel $\vec{E}(M)$. Le potentiel se rattache physiquement à la notion d'énergie potentielle, d'où son appellation.

2– Circulation du champ électrostatique : le potentiel électrostatique

2- 1 – Potentiel électrostatique

a- Cas d'une seule charge ponctuelle : Considérons une charge ponctuelle q (>0) fixée en P et un point M de l'espace :

La charge ponctuelle q fixée en P crée en tout point M de l'espace un champ électrostatique donné par :



$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{r^2}$$

Avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$: vecteur unitaire dirigé de P vers M.

La circulation élémentaire dC du champ $\vec{E}$ correspondant à un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ du point M sur la courbe AB est :

$$dC = \vec{E}.d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{u}.d\vec{r}$$

Or, $d\vec{r} = d(\overrightarrow{PM}) = d(r\vec{u}) = dr\,\vec{u} + r\,d\vec{u} \;\Rightarrow\; \vec{u}.d\vec{r} = \vec{u}.(dr\,\vec{u} + r\,d\vec{u}) = dr + \;r\,\vec{u}.d\vec{u}$

Donc $\quad d\vec{r}.\vec{u} = dr$ sachant que $\quad \vec{u}.d\vec{u} = 0$

La circulation élémentaire dC s'écrit alors : $\quad dC = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = -d(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r})$

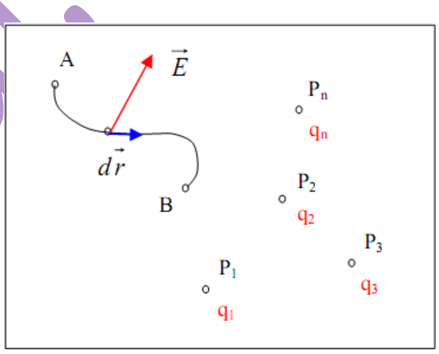
Posons alors, $\quad dC = \vec{E}.d\vec{r} = -dV(r)$

V est le potentiel électrostatique V(M) crée par la charge q fixée en M : $V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \text{cste}$

Le potentiel électrostatique est un scalaire défini à une constante près. On choisit en général la valeur de la constante de telle sorte que le potentiel soit nul lorsque le point **M** est infiniment éloigné de la charge :

$V(r \to \infty) = 0$. Dans ce cas, la constante est nulle et le potentiel s'écrit :

$V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$



L'unité du potentiel électrostatique dans le système **MKSA** est le **Volt (V)**.

L'unité du champ électrostatique est le Volt par mètre **(V/m)**.

b- Cas d'une distribution de n charges ponctuelles :

Soient **n** charges ponctuelles **q_1, q_2, …, q_i, …, q_n** fixés aux points **P_1, P_2, …, P_i, …, P_n**. Soit M un point de l'espace.

Calculons la circulation élémentaire **dC_i** du champ $\vec{E}_i$ crée par la charge **q_i** seule :

$$\mathbf{dC_i = \vec{E}_i.d\vec{r} = -dV_i(r)}$$

$$\textbf{Avec : } \vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_iM}}{\|\overrightarrow{P_iM}\|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_i}{r_i^2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P_iM} = r_i\vec{u}_i$$

Ainsi, le potentiel électrostatique **V_i(M)** dû à la charge **q_i** :

$$\mathbf{V_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_i}} \qquad \textbf{Avec } \mathbf{r_i = \|\overrightarrow{P_iM}\|}$$

Le potentiel **V(M)** dû à l'ensemble de **n** charges est la somme des potentiels en application du principe de superposition :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{i=n} V_i(M) = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_i}$$

Dans cette relation, nous avons choisi la constante nulle pour chaque potentiel **V_i** crée par la charge **q_i** ; ceci n'est pas valable que si les charges q_i sont réparties dans un volume fini.

Remarque : $\vec{E}(P_i)$ et $V(P_i)$ ne sont pas définis aux points **P_i** (points où se trouvent les charges).

2. 2 – Relation entre champ et potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique a été défini à partir de la circulation élémentaire du champ $\vec{E}$:

$dC = \vec{E}.d\vec{r} = -dV$ Or, $\mathbf{dV} = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\mathbf{V}.\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$

D'où la relation entre $\vec{E}$ et **V** : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,V$: **Relation locale**

Par l'intermédiaire de cette relation locale, on peut déterminer l'une de ces deux grandeurs à partir de l'autre.

Cette relation implique des conditions de continuité et de dérivabilité sur la fonction **V(M)**.

Le champ électrostatique $\vec{\mathbf{E}}$ dérive du potentiel scalaire **V**.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\mathbf{V}$, est le gradient du champ scalaire **V** et constitue un champ de vecteurs défini partout. Ses composantes dans un système de coordonnées donné sont obtenues très simplement.

Par exemple, en coordonnées cartésiennes on a :

$$d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k} \text{ et } \mathbf{dV} = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz.$$

Conclusion

Le champ électrostatique peut être caractérisé simplement à l'aide du potentiel électrostatique. Cette grandeur scalaire est souvent plus simple à déterminer que le champ électrostatique. Cette appellation sera justifiée par l'interprétation de cette fonction en terme d'énergie potentielle d'une charge soumise aux effets d'un champ électrostatique.

2. 3 – Propriétés

La circulation C_{AB} du champ $\vec{E}$ le long du contour **AB** est :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

La circulation du champ de vecteur $\vec{E}$, le long de AB, est donc égale à la différence de potentiel $V_A - V_B$. Ainsi, la connaissance de $\vec{E}$ ne définit que la différence de potentiel.

Pour avoir le potentiel en un point, il faudra définir une origine arbitraire des potentiels. Il est commode de choisir le potentiel nul à l'infini quand la distribution de charges est limitée à un domaine fini.

La circulation du champ de vecteur $\vec{E}$, le long de **AB** est indépendante de la forme du contour **AB** ; elle ne dépend pas du chemin suivi (la circulation élémentaire **dC** est différentielle totale exacte).

En conséquence la circulation de $\vec{E}$ est nulle le long de tout contour fermé. Le champ $\vec{E}$ est un champ de vecteurs à circulation conservative qui dérive d'une fonction scalaire appelée potentiel électrostatique. En résumé :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B) \quad \Leftrightarrow \oint \vec{E}.d\vec{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

$$\text{Avec} \qquad V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \text{cste}$$

Remarques

- Le potentiel **V** est défini à une constante près. Lorsqu'il n'y a pas de charges à l'infini, on choisit la constante nulle, c.à.d que l'action des charges tend vers zéro lorsque **r** tend vers l'infini.
- Physiquement, c'est la différence de potentiel entre deux points qui a un sens et qui est mesurable.
- V croît des charges – aux charges **+** (sens de croissance de V opposé à $\vec{E}$)
- Les surfaces de potentiel constant sont appelées **équipotentielles**
- De la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V(r)$ on peut calculer $\vec{E}$ connaissant **V** : on a
  - En coordonnées cartésiennes : $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$
  - En coordonnées cylindriques : $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$, $E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$, $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$
- Les champs et les potentiels électriques ont été exprimés dans le cas où les charges sont dans **le vide**. On a utilisé la constante $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ (SI), ε_0 est la permittivité du vide. Dans le cas où on a de la matière à la place du vide on remplace ε_0 par ε ; donc la constante $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ change de valeur mais la structure des formules reste la même.

3- Potentiel crée par une distribution continue de charges

Nous savons déterminer le potentiel électrostatique crée par une distribution de charges ponctuelles :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_i}$$

Comment calculer le potentiel crée par une distribution continue ?

La distribution de charges peut être découpée en éléments de volume ou de surface ou de courbe qui portent une charge élémentaire dq. Chacune de ces charges élémentaires crée un potentiel électrostatique appelé élémentaires. Le potentiel crée par toute la distribution est, par application du principe de superposition, la somme des potentiels élémentaires crées par les charges dq.

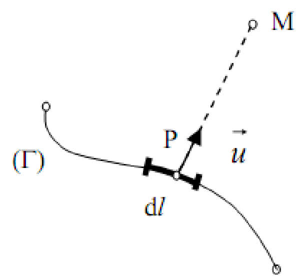
3.1 - Distribution linéique

On considère une portion de courbe Γ = AB portant une densité linéique de charge λ.

Un élément dl entourant un point P porte une charge :

$$\mathbf{dq = \lambda dl}$$

Cette charge crée en M un champ et un potentiel donné par les expressions suivantes :



$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(P)dl}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(P)dl}{\|\overrightarrow{PM}\|}$$

$$\text{Avec} \qquad \|\overrightarrow{PM}\| = r$$

D'où le potentiel V(M) créés en M par toute la distribution linéique de charge s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(\Gamma)}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(\Gamma)}\frac{\lambda(P)dl}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(\Gamma)}\frac{\lambda(P)dl}{\|\overrightarrow{PM}\|}$$

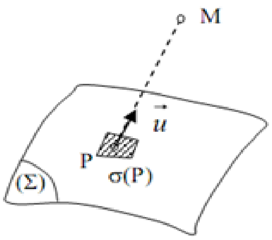
Cette relation n'est valable que si le fil est de dimension finie.

Remarque

On peut montrer que le potentiel V(M) ne sont pas définis en un point M situé sur le fil chargé.

3. 2 - Distribution surfacique

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges, on considère une charge dq portée par un élément de surface dS.



Le potentiel crées en M par dq sont donnés par :

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(P)ds}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(P)ds}{\|\overrightarrow{PM}\|}$$

$$\text{Avec} \qquad \|\overrightarrow{PM}\| = r$$

D'où le potentiel V(M) créés par les charges réparties sur la surface Σ :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(\Sigma)}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(\Sigma)}\frac{\sigma(P)ds}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(\Sigma)}\frac{\sigma(P)ds}{\|\overrightarrow{PM}\|}$$

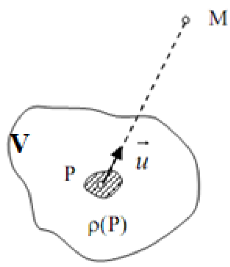
Cette relation suppose que la distribution de charges s'étend sur une surface de dimension fini. Dans le cas contraire, on choisira comme origine des potentiels un point à distance finie.

Remarque

On peut montrer que le potentiel est défini sur la surface chargée et continue à la traversée de la surface chargée. Il n'en est pas de même pour le champ $\vec{E}$ qui n'est pas défini sur une surface chargée. Il subit une discontinuité à la traversée de la face chargée.

3.3 - Distribution volumique

Soit une distribution volumique de charges contenue dans le volume v ; ϱ(P) est la densité volumique de charges en un point P du volume v.



La charge contenue dans l'élément de volume entourant le point P est : $dq = \rho(P)d\tau$

Cette charge crée en M un potentiel dV comme le ferait une charge ponctuelle dq placée en P:

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(P)d\tau}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(P)d\tau}{\|\overrightarrow{PM}\|}$$

$$\text{Avec} \qquad \|\overrightarrow{PM}\| = r$$

D'après le principe de superposition, le potentiel est obtenu à partir de l'intégrale de volume :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(V)}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(V)}\frac{\rho(P)d\tau}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(V)}\frac{\rho(P)d\tau}{\|\overrightarrow{PM}\|}$$

Cette relation suppose que l'on a choisi le potentiel nul à l'infini, donc que la distribution de charges s'étend sur un volume fini. Si ce n'est pas le cas, il faut choisir une autre origine des potentiels.

Remarque

On peut montrer que le potentiel **V** et le champ $\vec{E}$ sont définis en un point M intérieur à la distribution de charges.

4- Différence de potentiel électrique = tension électrique

Lorsqu'une charge se déplace d'un point initial **A** de potentiel $V_i = V_A$ vers un point final **B** de potentiel $V_f = V_B$, alors la **différence de potentiel** entre le point final et le point initial est : $\Delta V = V_f - V_i$

Une différence de potentiel est encore appelée **tension électrique**.

La **tension entre A et B** est notée : $U_{AB} = V_A - V_B$.

On a évidemment : $U_{AB} = V_A - V_B = -U_{BA}$

Souvent on parle de la **tension électrique aux bornes d'un appareil électrique** : il s'agit alors de la différence de potentiel prise positivement : $V = |\Delta V| > 0$.

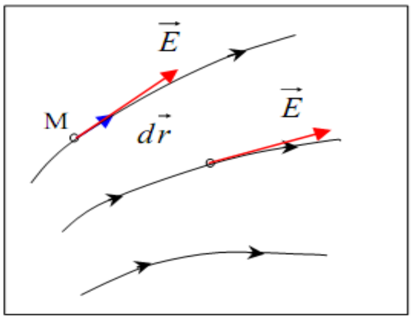
Sur les schémas, les tensions sont représentées par **des flèches allant du potentiel moins élevé vers le potentiel plus élevé**.

III – Topographie d'un champ électrostatique

1- Lignes de champs (spectre électrique) :

Une ligne de champ ou une ligne de force est une courbe dont la tangente en tout point à la direction du vecteur champ en ce point. La ligne de champ est orientée par continuité avec le vecteur champ.

Pour avoir une idée sur l'allure du champ $\vec{E}$, on trace les lignes de champ, c'est-à-dire les courbes tangentes en chaque point au vecteur $\vec{E}$ défini en ce point. Ces courbes sont orientées par convention dans le sens du vecteur $\vec{E}$.



Soit M un point d'une ligne de champ et $d\vec{r}$ le vecteur déplacement élémentaire sur une ligne de champ.

Puisque $\vec{E}$ et $d\vec{r}$ sont colinéaires, on a : $d\vec{r} \wedge \vec{E} = \vec{0}$

Cette relation permet d'obtenir les équations des lignes de champ. Dans le système de coordonnées cartésiennes, posons :

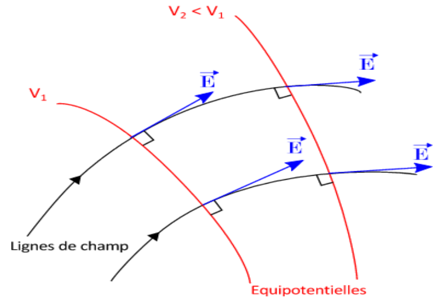
$$\vec{E} = E_x\,\vec{i} + E_y\,\vec{j} + E_z\,\vec{k} \quad \text{et} \quad d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

Ce qui conduit d'après $d\vec{r} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x & E_y & E_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} \vec{0}$

à : $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$

Dans le système de coordonnées sphériques:

$$d\vec{r} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e_r} & \vec{e_\theta} & \vec{e_\varphi} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} & 0 & 0 \\ dr & rd\theta & r\sin\theta d\varphi \end{vmatrix} \vec{0}$$



Lignes de champ et surfaces équipotentielles

On trouve $\frac{\sin\theta}{r} d\varphi = 0$ soit $\varphi = cste$ et $\frac{d\theta}{r} = 0$ soit $\theta = cste$

$\varphi = cste$: C'est l'équation d'un demi plan (le méridien) formant un angle $\varphi = Cte$ avec l'axe des x.

$\theta = cste$: C'est l'équation d'un cône d'axe Oz et de demi angle au sommet $\theta = Cte$.

On trace les deux surfaces de coordonnées $\varphi = \varphi_0$ et $\theta = \theta_0$: Leurs intersection donne **une ligne de champ**

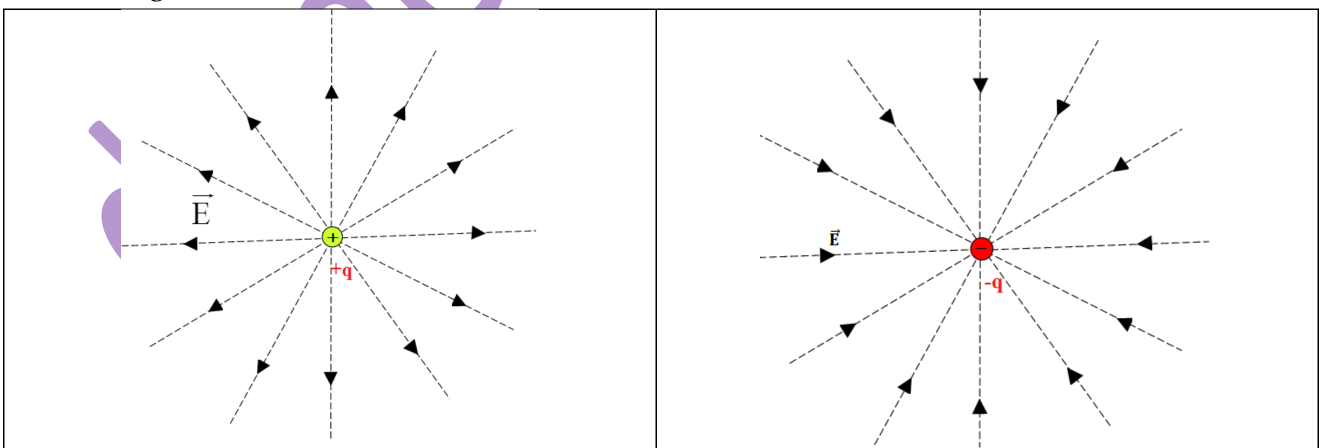
Les lignes de champ d'une charge ponctuelle sont des demi-droites formant un faisceau de sommet O.

NB1: On peut matérialiser les lignes de champ par les grains de semoule!

NB2 : Lorsqu'on a un système de plusieurs charges, on ne peut pas obtenir les lignes de champ par superposition des lignes du champ de chacune des charges. Il faut calculer le champ total $\vec{E}$ et ensuite tracer les lignes de champ.

Exemple de lignes de champ

Soit une charge ponctuelle en O. les lignes du champ crée par la charge ponctuelle sont des demi-droites concourantes en O, divergentes si $q > 0$ (figure 4-a) et convergentes si $q < 0$ (figure 4-b).



Les lignes de champ partent d'une charge positive | Les lignes de champ partent d'une charge négative

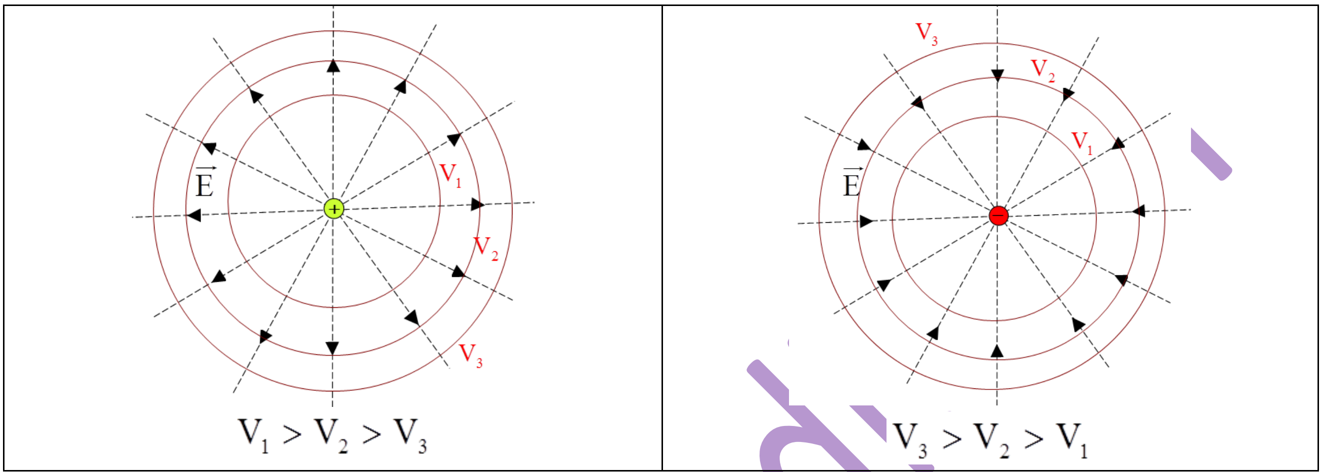
• Notons que dans une région où le champ $\vec{E}$ est un vecteur bien défini et non nul, on peut suivre de façon continue une ligne de champ

• Deux lignes de champ ne peuvent se croiser : la figure 4 montre que les lignes de champ commencent (figure 4-a) ou s'arrêtent (figure 4-b) sur les charges qui sont des points singuliers.

2- surfaces équipotentielles

C'est l'ensemble des points **M** pour lesquels le potentiel est constante: $V(x,y,z) = cte$.

$$\mathbf{V = cste \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = cste \quad \rightarrow \quad r = cste}$$



Le champ $\vec{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissants.

Les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées en **O**, point où se trouve la charge.

D'après la relation $\vec{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\mathbf{V}$, le champ $\vec{\mathbf{E}}$ est normal aux surfaces équipotentielles et dirigé vers les potentiels décroissants.

Nous avons représenté sur la figure precedente les surfaces équipotentielles et les lignes du champ **E** crée par une charge ponctuelle positive.

La direction de $\vec{E}$, c'est-à-dire du gradient de **V** est la direction de la normale aux surfaces équipotentielles, celle où **V** varie le plus rapidement ; il est clair que pour passer de la valeur $\mathbf{V_1}$ à la valeur $\mathbf{V_2}$, le chemin le plus court est le segment **AB**.

Remarque 1 : Les surfaces équipotentielles sont en tous points orthogonaux aux lignes de champ.

Le long d'une ligne de champ, le champ $\vec{E}$ est dirigé suivant les potentiels décroissants.

3- Tube de champ

C'est l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

Remarque: Lorsqu'on a un système de plusieurs charges, on ne peut pas obtenir les lignes de champ par superposition des lignes du champ de chacune des charges. Il faut calculer le champ total $\vec{E}$ et ensuite tracer les lignes de champ.