

UE 5-2P - Mécanique analytique - 2016/2017

Contrôle Continu du 28/11/2016. Durée: 2h00mn

Exercice 1 : Contraintes et méthode de Lagrange.

A)

Déterminer les extréma de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ où x et y sont sur la courbe $y = x + 1$ par les trois méthodes: **i)** Graphiquement. **ii)** En gardant seulement la variable x . **iii)** Par la méthode de Lagrange. Conclure.

B)

Un câble électrique homogène et inextensible de masse linéique μ et tendu dans le plan xOz entre deux points $M_1 = (0, h_1)$ et $M_2 = (d, h_2)$. La longueur du câble est L .

On se donne de déterminer la forme de la courbe $z = z(x)$ que prendra le câble entre les points M_1 et M_2 . Cette forme est celle qui minimise l'énergie potentielle du câble (car il est en équilibre dans le champ gravitationnel).

1) Montrer que l'énergie potentielle du câble, pour une forme quelconque de celui-ci, est donnée par

$$V = \int_{t_1}^{t_2} g \mu z \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} dt \quad , \quad (1)$$

où $x = x(t)$ et $z = z(t)$ est la courbe paramétrisée par t et la dérivée est dénotée par un point. Les valeurs t_1 et t_2 sont associées aux deux points M_1 et M_2 , respectivement, et g est l'accélération gravitationnelle. (*Indication: On calculera l'énergie potentielle d'un élément de câble infinitésimal dl de masse dm*).

2) Ecrire l'action hamiltonienne S qui correspond à ce problème.

3) Trouver les équations correspondant à une action S extrémale.

4) Identifier une constante par un choix convenable du paramètre t .

5) Résoudre alors une équation différentielle (très simple) donnant la courbe $z = z(x)$. On déterminera les constantes d'intégration.

Exercice 2 : Particule chargée dans un champ magnétique à symétrie sphérique.

Le mouvement d'une particule de charge e et de masse m dans un champ magnétique $\vec{B} = g \frac{\vec{r}}{r^3}$, où \vec{r} est le vecteur position de la particule et g une constante, est décrit (en coordonnées

sphériques) par le lagrangien

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - eg\dot{\varphi} \cos \theta \quad . \quad (2)$$

- 1) Calculer les moments conjugués $(P_r, P_\theta, P_\varphi)$ des variables (r, θ, φ) .
- 2) Donner alors l'expression du hamiltonien H (la plus compacte possible). Est-t-il une constante du mouvement? Pourquoi?
- 3) Calculer le crochet de Poisson $\{P_\varphi, H\}$. Conclusion.
- 4) Ecrire les équations canoniques et confirmer le résultat de la question précédente.
- 5) Donner l'expression du vecteur \vec{F} , la force qui agit sur cette particule.
- 6) Calculer le travail de cette force. En déduire alors une autre constante du mouvement et la comparer à H .

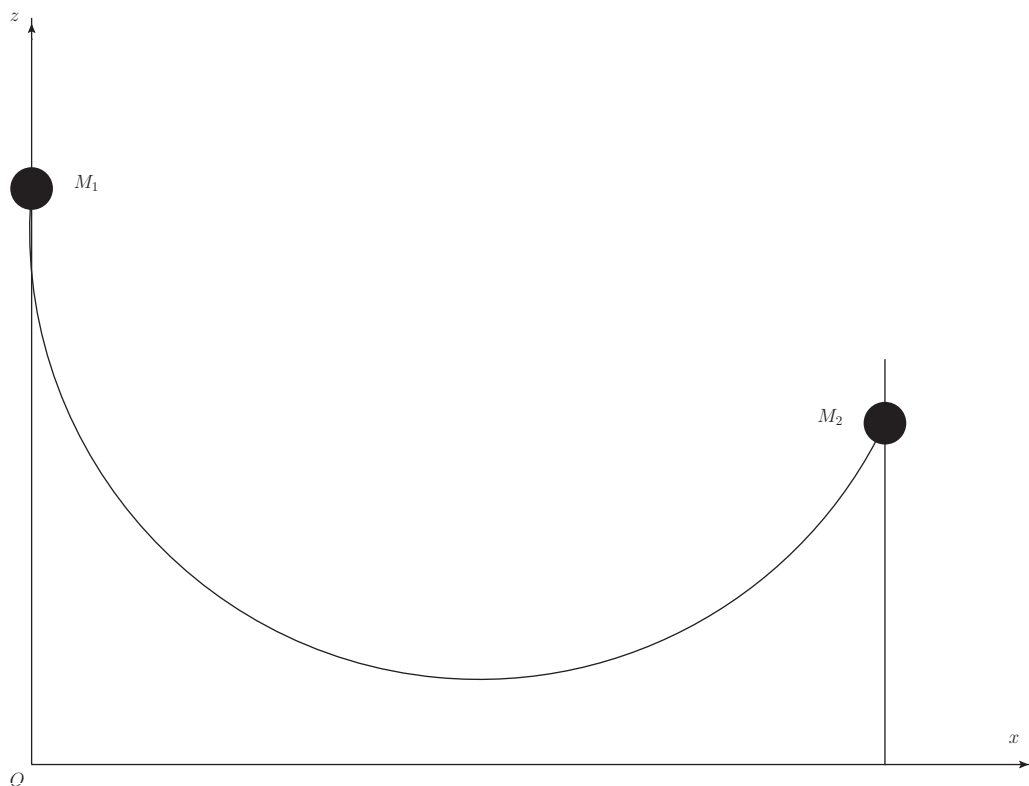


Figure 1: Un câble tendu entre deux points $M_1 = (0, h_1)$ et $M_2 = (d, h_2)$. La longueur du câble est L .

UE 5-2P - Mécanique analytique - 2016/2017

Contrôle Continu du 19/10/2016. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

On considère le mouvement d'un système constitué de deux points matériels de masses m_1 et m_2 , soumis au potentiel $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ où \vec{r}_1 et \vec{r}_2 sont leurs vecteurs position, respectivement ($|\vec{X}|$ est la norme de \vec{X}). On notera les vecteurs vitesses $\dot{\vec{r}}_1$ et $\dot{\vec{r}}_2$.

1) Donner l'expression du lagrangien L du système.

On effectue le changement de variables

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad , \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad .$$

2) Montrer que dans les nouvelles coordonnées on a $L = L_1(\vec{R}, \dot{\vec{R}}) + L_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$. Conclure.

3) Quel est le mouvement de la particule repérée par \vec{R} ?

On se propose d'étudier le lagrangien $L_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$.

4) Montrer que le vecteur

$$\vec{\sigma} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$$

est un vecteur constant (*Indication: on calcule $\dot{\vec{\sigma}}$ et on utilise les lois de Newton*). En déduire que le mouvement de la particule repérée par \vec{r} se déroule dans un plan (**on peut avancer sans répondre à cette question**).

5) On utilise les coordonnées polaires (r, θ) de ce plan. Donner alors l'expression de $L_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$.

6) Ecrire les équations du mouvement et identifier une constante du mouvement.

7) Montrer qu'une autre constante du mouvement existe et qu'elle prend la form

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{r}^2 + W(r) \quad ,$$

où $W(r)$ est à déterminer.

Représenter $W(r)$ et étudier graphiquement le mouvement de la particule repérée par \vec{r} dans le cas d'un potentiel

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad ,$$

où α est une constante positive. On distinguera trois cas possibles.

Exercice 2 :

Un système dynamique à deux degrés de liberté x_1 et x_2 est décrit par le lagrangien

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{k}{2} x_1^2 - \frac{k}{2} x_2^2 - \frac{k'}{2} (x_2 - x_1)^2 \quad ,$$

où m est une masse et k et k' sont des constantes de raideur.

1) Ecrire les équations du mouvement.

2) Déterminer les modes propres de vibrations et donner la solution générale des équations du mouvement.

Remarque: Le lagrangien décrit le système montré ci-dessous.

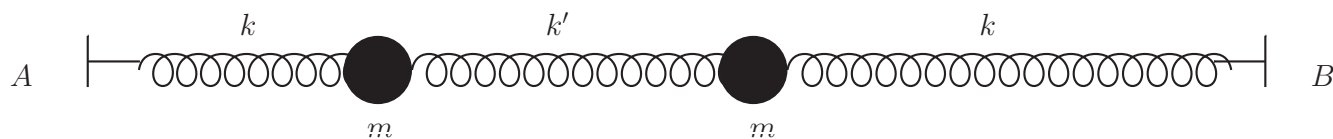


Figure 2: Un système de deux masses tenues par trois ressorts où les extrémités A et B sont fixes.

UE 5-2P - Mécanique analytique - 2015/2016
Contrôle Continu du 09/12/2015. Durée: 2h00mn
Exercice 1 :

Une particule de masse m se déplace dans l'espace à trois dimensions sous l'influence du potentiel ¹

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} ,$$

où α est une constante positive et r est le module du vecteur position.

- 1) Donner l'expression du lagrangien en coordonnées sphériques $\{q_i\} = (r, \theta, \varphi)$. Identifier deux constantes du mouvement.
- 2) Calculer les moments conjugués $\{P_i\} = (P_r, P_\theta, P_\varphi)$.
- 3) Dire pourquoi le hamiltonien est égal à l'énergie totale du point matériel et donner son expression.
- 4) Ecrire les équations de Hamilton.
- 5) On peut toujours choisir $P_\varphi = 0$. Expliquer en quoi consiste ce choix. En déduire que le mouvement se déroule alors dans un plan. On prendra $P_\varphi = 0$ pour la suite de l'exercice.
- 6) En déduire alors une autre constante du mouvement.
- 7) Montrer que les équations du mouvement se réduisent à la seule équation

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial W(r)}{\partial r} , \tag{3}$$

où $W(r)$ est une fonction à déterminer. En déduire une quantité conservée.

- 8) Etudier graphiquement le mouvement et montrer qu'il y a trois types de mouvements possibles (selon la valeur de la constante de la question précédente).
- 9) Vérifier que la solution générale de l'équation (3) est donnée par

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} , \tag{4}$$

où p et e sont deux constantes à déterminer en fonction des constantes de l'équation (3).

- 10) L'expression $r = r(\theta)$ donne la trajectoire du point matériel. Identifier cette trajectoire

¹C'est le potentiel gravitationnel entre deux masses, par exemple.

(*Indication*: La trajectoire est plus claire en coordonnées cartésiennes). Retrouver les trois cas possibles de la question 8.

Exercice 2 :

Illustrer l'utilisation du Principe Variationnel par un exemple de votre choix (effectuer tous les calculs mathématiques).

Exercice 3 :

Soit deux points fixes M_1 et M_2 du plan xOy (que l'on peut placer sur l'axe Ox) et une courbe de longueur l donnée, joignant M_1 à M_2 . Déterminer la forme de la courbe pour que la surface comprise entre la courbe et l'axe Ox soit maximale.

L'exercice 1 est obligatoire mais vous avez le choix entre les exercices 2 et 3.

UE 5-2P - Mécanique analytique - 2015/2016

Contrôle Continu du 21/10/2015. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Le système de la figure 3 représente deux corps de masses m_1 et m_2 tenus par deux ressorts ayant k_1 et k_2 comme constantes de raideur. Le tout est suspendu à un point fixe. Le mouvement se fait le long de l'axe OX et on notera X_1 et X_2 les coordonnées de m_1 et m_2 , respectivement. Les longueurs à vide des ressorts sont l_1 et l_2 .

- 1) Ecrire les équations du mouvement en utilisant le principe fondamental de la dynamique.
- 2) Donner l'expression du lagrangien du système.
- 3) Ecrire les équations de Euler-Lagrange et comparer avec la question 1.

Dans le suite de l'exercice on prendra $k_1 = k_2 = k$, $m_1 = m_2 = m$ et $l_1 = l_2 = l$.

- 4) Effectuer le changement de variables $X_1 = Y_1 + l + 2mg/k$, $X_2 = Y_2 + 2l + 3mg/k$ et montrer que les équations du mouvement deviennent

$$\begin{aligned} m\ddot{Y}_1 &= -kY_1 + k(Y_2 - Y_1) \\ m\ddot{Y}_2 &= -k(Y_2 - Y_1) \end{aligned}$$

- 5) Déterminer les modes propres d'oscillations.
- 6) Ecrire la solution générale.
- 7) *Question bonus:* Trouver un changement de variables (passage aux coordonnées normales q_1 et q_2) pour lequel le lagrangien devient la somme de deux oscillateurs harmoniques indépendants. Résoudre alors les nouvelles équations du mouvement.

Exercice 2 :

Sous l'influence de la force de pesanteur, un point matériel de masse m se déplace sans frottement sur la surface intérieure du paraboloïde (voir figure 4) de révolution d'équation $x^2 + y^2 = az$, où a est une constante.

- a) Ecrire le lagrangien L du système en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , sans tenir compte de la liaison.

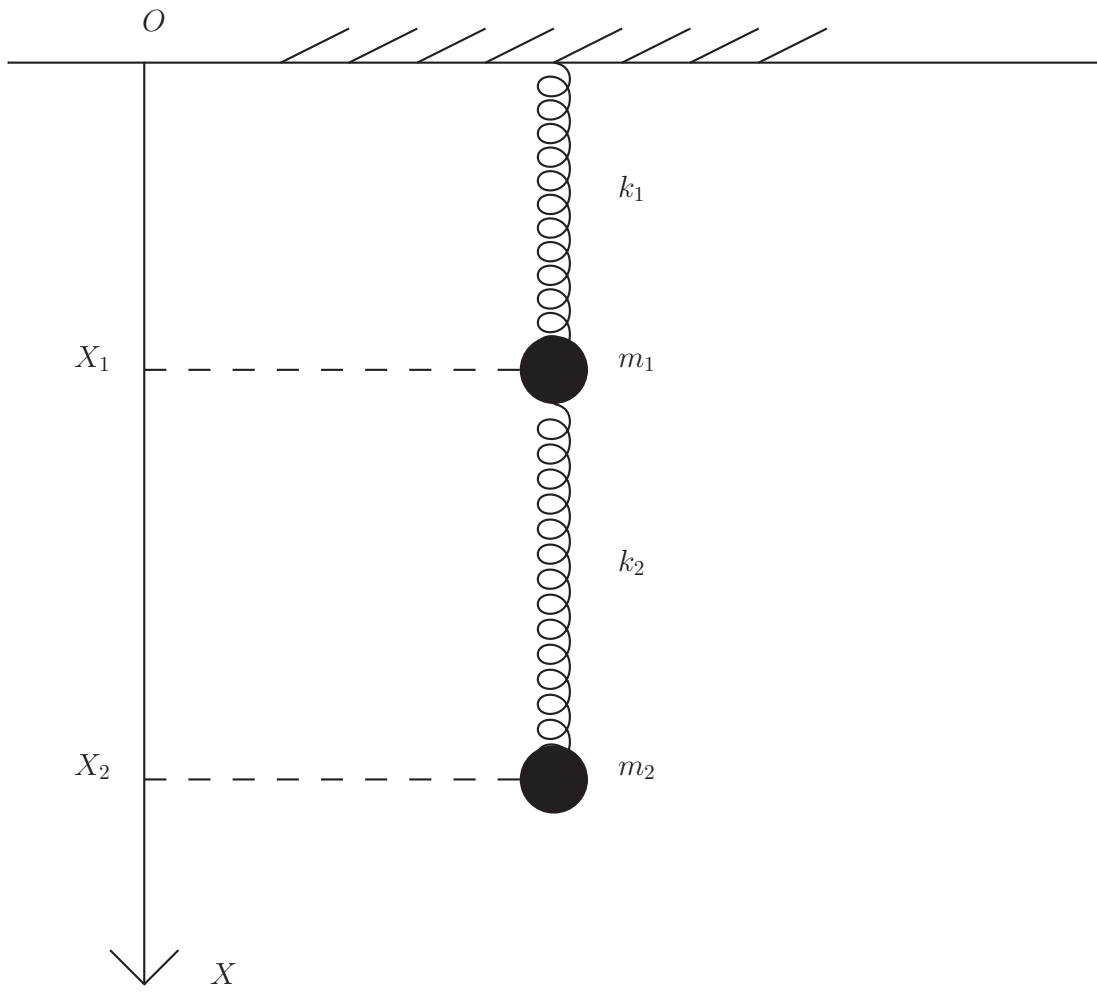


Figure 3: Un système de deux masses tenues par deux ressorts.

- b) Exprimer ensuite L à l'aide des seules variables r et θ .
- c) Ecrire les équations de Euler-Lagrange et en déduire une équation différentielle contenant uniquement la variable r .
- d) Montrer que la masse peut se déplacer en décrivant un cercle de rayon r_0 dans un plan horizontal d'équation $z = h$, à condition que sa vitesse angulaire soit constante. Calculer cette vitesse angulaire.
- e) *Question bonus:* Donner l'expression d'une deuxième constante du mouvement et montrer que l'équation du mouvement pour r prend la forme $m\ddot{r} = F(r)$, où $F(r)$ est à déterminer.

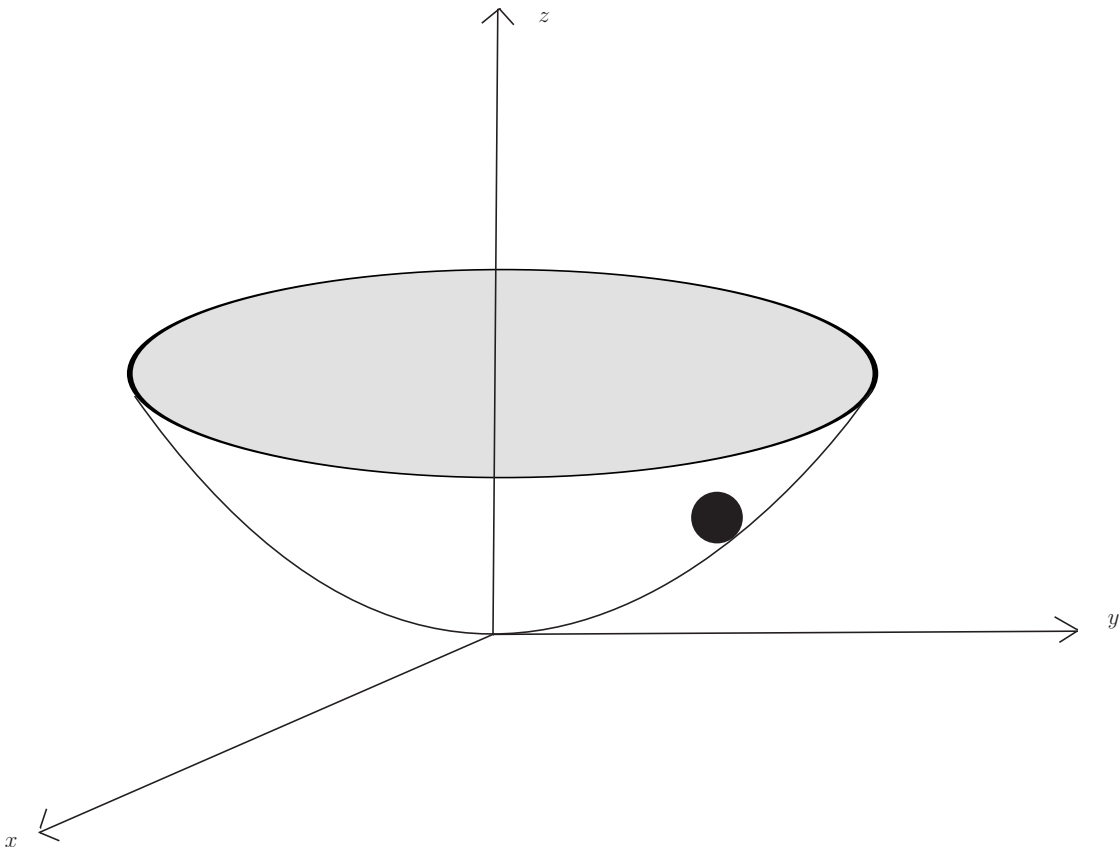


Figure 4: Mouvement d'une particule sur la surface intérieure d'un parabolôide.

UE 5-2P - Mécanique analytique - 2014/2015
Contrôle Continu du 26/11/2014. Durée: 2h00mn
Exercice 1 :

Le pendule de Atwood (the Swinging Atwood's Machine) est constitué de deux masses m and M reliées entre elles par un fil inextensible, de longueur l , et passant par deux poulies (sans masse). Ce pendule est représenté sur le schéma ci-joint. On utilisera les variables r et θ pour décrire le système. On notera g l'accélération gravitationnelle.

1) Montrer que le lagrangien du système est donnée par (à une constante additive près)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - Mgr + mgr \cos(\theta) . \quad (5)$$

2) Ecrire les équations du mouvement.

3) Donner l'expression du hamiltonien.

4) Ecrire les équations canoniques et vérifier qu'elles sont équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange.

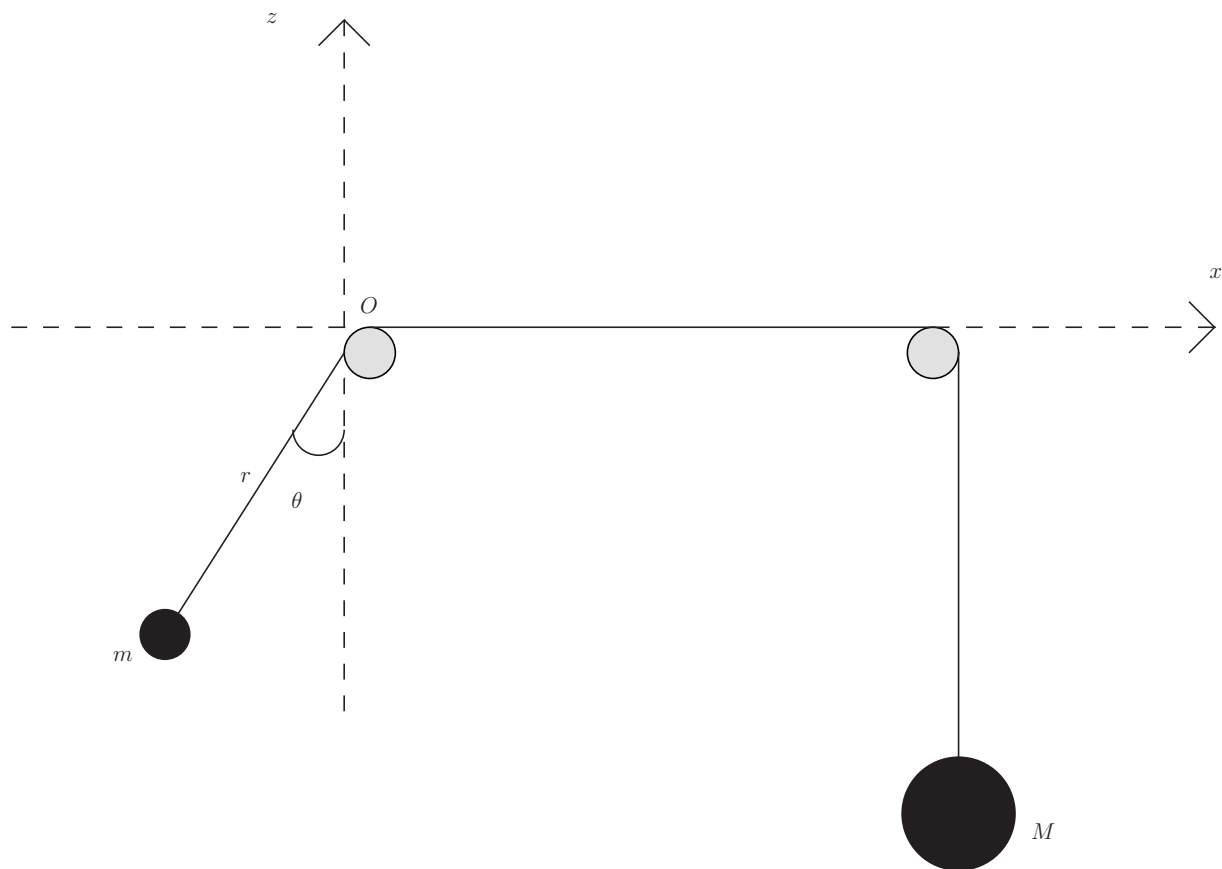
5) Donner l'expression de la norme du moment cinétique de la masse m par rapport à O .

6) Calculer le crochet de Poisson du hamiltonien avec la norme du moment cinétique. Conclusion.

7) Résoudre les équations du mouvement dans le cas où $g = 0$. Indication: On cherchera directement la trajectoire $r = r(\theta(t))$ et on effectuera le changement de variable $u(\theta(t)) = 1/r(\theta(t))$.

Exercice 2 :

1) Trouver l'équation de la géodésique (la courbe qui minimise la distance entre deux points d'une surface) d'un cône de révolution d'équation $x^2 + y^2 = z^2$. Indication: On utilisera les coordonnées cylindriques dépendant d'un paramètre t et on fait un choix qui simplifierait les équations différentielles.



Exercice 2 :

Un objet de masse m glisse, sous l'influence de son poids et sans frottement, sur un rail. Ce rail commence en A de coordonnée $(x_A = 0, z_A = h)$ et se termine en B de coordonnée $(x_B = d, z_B = 0)$. On voudrait déterminer la forme du rail (la courbe $z(x)$) pour que le temps mis par le mobile entre A et B soit le plus court possible².

Le mobile part de A sans vitesse initiale.

- 1) Donner l'expression du hamiltonien (l'énergie mécanique) en fonction de z , m , g et v , la vitesse du mobile à un instant t de son mouvement. Expliquer (sans calcul) pourquoi ce hamiltonien est une constante du mouvement. Donner la valeur de cette constante en fonction de m , g et h .
- 2) En utilisant la formule $ds = v dt$ et la conservation de l'énergie totale montrer que le

²Ce problème est connue sous le nom du problème de la courbe brachistochrone.

temps infinitésimal dt pour parcourir la distance infinitésimale ds est donné par

$$dt = L(z, z') dx \quad \text{avec} \quad L(z, z') = \sqrt{\frac{1 + z'^2}{2g(h - z)}} \quad (6)$$

où $z' = \frac{dz}{dx}$. En déduire l'expression de T , le temps total mis par le mobile pour aller de A à B .

UE 5-2P - Mécanique analytique - 2014/2015

Contrôle Continu du 15/10/2014. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

La figure ci-contre représente un plan horizontal sans frottement et possédant une petite ouverture O . Une corde *extensible*, de longueur l_0 à vide passe par O . Elle est attachée à deux points matériels P et Q de masse m_1 et m_2 , respectivement. Le point P se déplace sur le plan horizontal et le point Q se déplace verticalement sur l'axe Oz , orienté vers le bas. *La corde se comporte comme un ressort ayant une constante de raideur k .*

Le système sera étudié en utilisant les coordonnées polaires (r, θ) du point P et x , l'allongement de la corde par rapport à sa longueur à vide.

A l'instant initial $\vec{OP} = r_0 \vec{e}_r$ et on donne à P une vitesse initiale $\vec{v} = v_0 \vec{e}_\theta$, où $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est la base des coordonnées polaires dans la plan horizontal. Aussi, à $t = 0$, la corde n'est pas tendue et le point Q à une vitesse initiale nulle.

- 1) Ecrire la relation entre r , x , l_0 et z , la coordonnée du point Q sur l'axe Oz .
- 2) Identifier les différentes énergies potentielles et en déduire l'expression de l'énergie potentielle totale du système.
- 3) Donner l'expression du lagrangien du système en utilisant uniquement les coordonnées r , θ et x .
- 4) Trouver deux constantes du mouvement. Exprimer les deux constantes en fonction de m_1 , m_2 , g , r_0 , l_0 et v_0 .
- 5) Ecrire les equations du mouvement.
- 6) Montrer qu'il existe une trajectoire circulaire pour le point P . Quel est alors le mouvement correspondant du point Q ? Quelle condition faut-il imposer sur v_0 si on voudrait que $z > 0$?
- 7) Résoudre les équations du mouvement si à l'instant initial $\vec{OP} = r_0 \vec{e}_r$ et on donne à P une vitesse initiale $\vec{v} = v_0 \vec{e}_r$. Aussi, à $t = 0$, la corde n'est pas tendue et le point Q à une vitesse initiale nulle.

Exercice 2 :

Les trois composantes de la force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ qui s'exerce sur une particule de charge q et de masse m , s'écrivent sous la forme

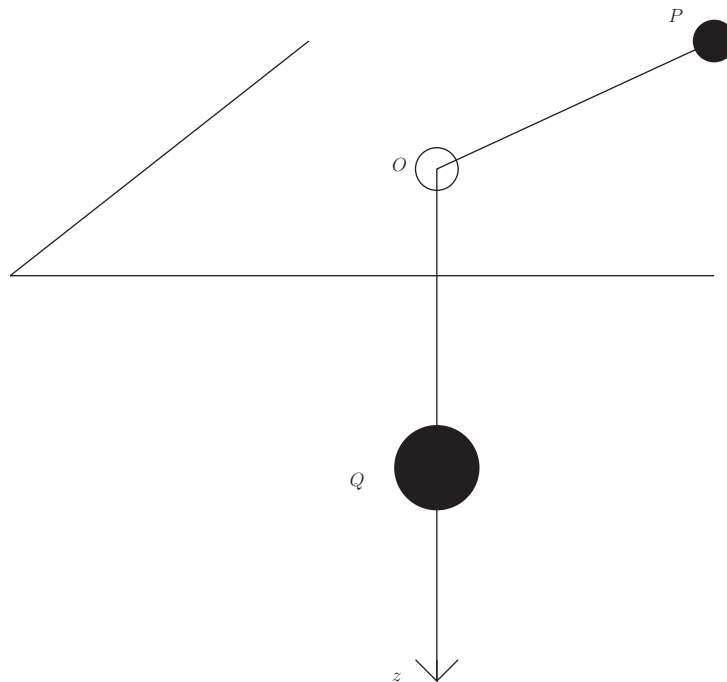
$$F_i = -q \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + q \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

avec $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ et $\vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

1) Retrouver ces expressions à partir du lagrangien

$$L = \sum_{n=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 - q\varphi + q \sum_{n=1}^3 \dot{x}_n A_n. \quad (8)$$

2) Résoudre les equations du mouvement dans le cas où $\vec{A} = \vec{0}$ et $\varphi = ax_1$, où a est une constante. A l'instant initial la particule à une vitesse initiale \vec{v}_0 dans le plan (x_1, x_2) .

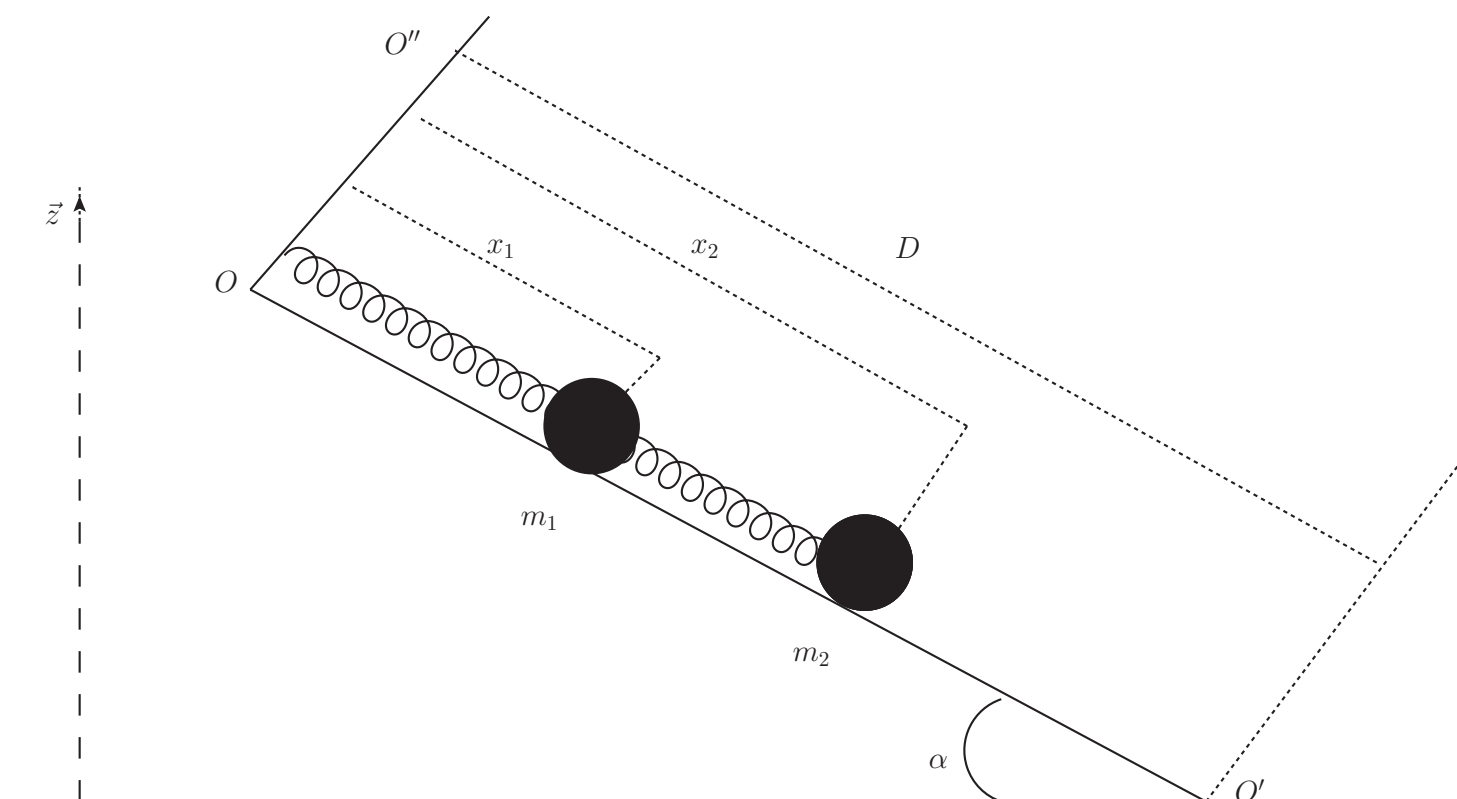


UE 5-2P - Mécanique analytique - 2013/2014

Contrôle Continu du 11/12/2013. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

On considère le système de la figure ci-jointe: Les deux ressorts sont de masse négligeable



et le mouvement se fait sans frottement. Le ressort du haut est fixé à la barre OO'' . On choisit un axe Ox suivant le vecteur \vec{OO}' . Les vecteurs position des deux masses m_1 et m_2 sont, respectivement, $O\vec{m}_1 = x_1(t)\vec{i}$ et $O\vec{m}_2 = x_2(t)\vec{i}$, où \vec{i} est le vecteur de base suivant l'axe Ox . Les coordonnées x_1 et x_2 sont les deux degrés de liberté du système. Les deux masses sont accrochées aux ressorts comme le montre la figure. La constante de rappel du ressort du haut est $k_1 = k$ et celle du deuxième ressort est $k_2 = 2k$ et les masses sont $m_1 = m$ et $m_2 = 2m$. A vide, les deux ressorts ont la même longueur l . La distance OO' est D et l'angle du plan incliné est α . L'accélération de la pesanteur est g .

1) Ecrire le lagrangien du système.

- 2) Donner les equations du mouvement (équations d'Euler-Lagrange).
- 3) Déterminer le hamiltonien du système et les équations canoniques (équations d'Hamilton) et vérifier qu'on retrouve les mêmes équations qu'en 2).
- 4) Effectuer le changement de variables suivant:

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1 + l + \frac{3}{k}mg \sin \alpha \\x_2 &= X_2 + 2l + \frac{4}{k}mg \sin \alpha\end{aligned}\quad (9)$$

et montrer que les équations du mouvement deviennent

$$\begin{aligned}m\ddot{X}_1 &= -3kX_1 + 2kX_2 \\m\ddot{X}_2 &= kX_1 - kX_2.\end{aligned}\quad (10)$$

- 5) On cherche des solutions harmoniques $X_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi)$ et $X_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi)$. Déterminer les modes propres de vibrations. Ecrire la solution générale.

Exercice 2 :

On considère un système ayant pour hamiltonien

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2}\quad (11)$$

où p est le moment conjugué de la variable q . Dire pourquoi H est une constante du mouvement.

- 1) Calculer les crochets de Poisson $\{q, H\}$ et $\{p, H\}$.
- 2) On définit la quantité

$$C(p, q, t) = \frac{pq}{2} - tH(p, q)\quad (12)$$

où t est la variable temps. Calculer le crochet de Poisson $\{C, H\}$.

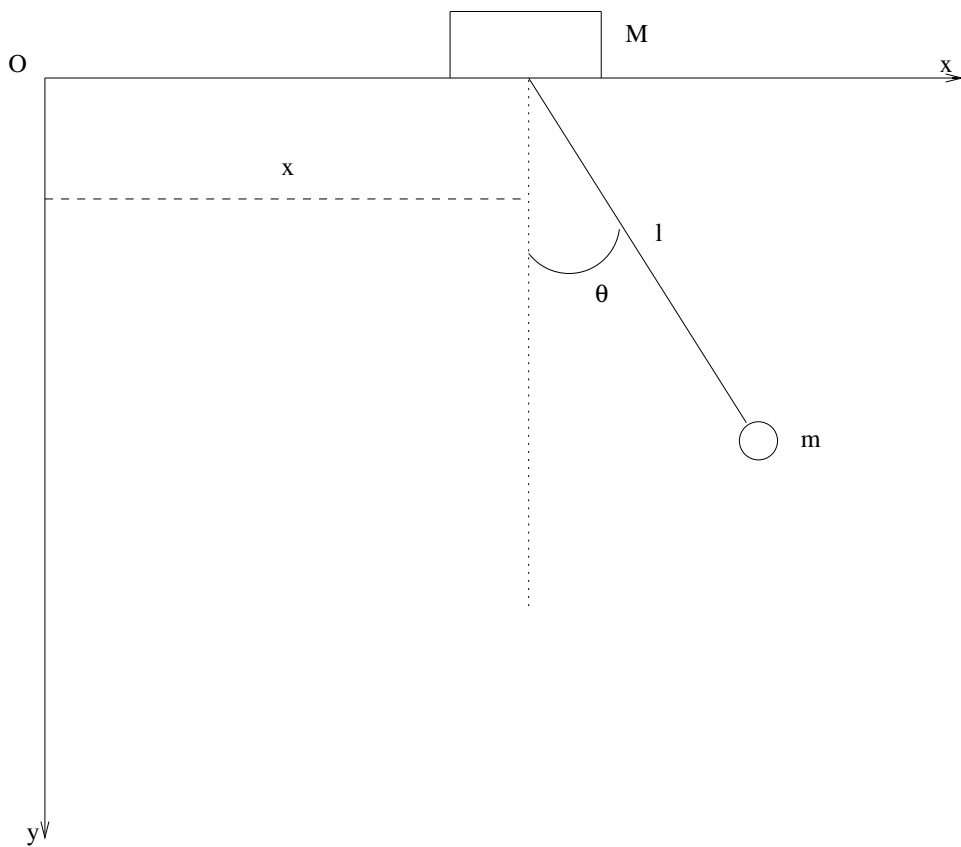
- 3) Ecrire les équations d'Hamilton et comparer avec la question 1).
- 4) Montrer que C est une constante du mouvement. Aurions-nous pu déduire ce résultat à partir de la question 2)?
- 5) En se servant du fait que H et C sont des constantes du mouvement, trouver $q(t)$. (Indication: $\dot{q}q = \frac{d}{dt}(q^2/2)$).

UE 5-2P - Mécanique analytique - 2013/2014

Contrôle Continu du 06/11/2013. Durée: 1h30mn

Une masse M est libre de glisser sans frottement sur un rail ox . Un pendule de longueur l et masse m est attaché à M (voir figure). On note par x l'abscisse de M et par θ l'angle que fait le pendule avec la verticale. Le problème sera traité dans ces variables.

- 1) Donner, en fonction de l , θ et x , les coordonnées cartésiennes, que l'on notera (X, Y) , de la masse m . Déterminer les expressions des composantes de ses vecteurs vitesse et accélération.
- 2) Donner les équations du mouvement en utilisant les lois de Newton.
- 3) Calculer le travail total infinitésimal, δW , de toutes les forces et identifier la force dont le travail n'est pas nul. En déduire l'énergie potentielle du système.
- 4) Ecrire le lagrangien du système.
- 5) Donner les expressions de deux quantités conservées.
- 6) Déterminer les équations du mouvement en utilisant le formalisme lagrangien. Comparer avec la question 2.
- 7) Donner les équations du mouvement pour les petites oscillations (on suppose que θ est petit et par conséquent on néglige les termes en $\theta^2, \dot{\theta}^2, \dots$). En déduire que si un mouvement oscillatoire existe alors les masses M et m oscillent avec la même fréquence mais toujours en opposition de phase.
- 8) Résoudre les équations du mouvement.
- 9) Pour quelles conditions initiales la masse m restera à la verticale et la masse M sera animée d'un mouvement rectiligne uniforme? Pour quelles conditions initiales un mouvement oscillatoire prendra place?



502 P - Mécanique analytique - 2012/2013
Examen du 20/12/2012. Durée: 2h00mn
Exercice 1 :

Un système dynamique (ayant n degrés de liberté) est décrit dans l'espace des phases par les variables conjuguées (p_i, q_i) . On effectue une transformation canonique et les nouvelles variables sont notées (p'_i, q'_i) . Ces nouvelles variables sont fonction des anciennes variables. C'est-à-dire,

$$q'_i = q'_i(p_i, q_i, t) \quad , \quad p'_i = p'_i(p_i, q_i, t) \quad . \quad (13)$$

La fonction génératrice de ces transformations canoniques est du type $F_1 = F_1(q_i, q'_i, t)$.

La transformation est canonique si l'ancien hamiltonien $H(p_i, q_i, t)$ et le nouveau hamiltonien $H'(p'_i, q'_i, t)$ sont reliés par

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) = \left(\sum_{i=1}^n p'_i \dot{q}'_i - H' \right) + \frac{dF_1}{dt} \quad . \quad (14)$$

1) Exprimer $\frac{dF_1}{dt}$ et en déduire les relations

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad , \quad p'_i = -\frac{\partial F_1}{\partial q'_i} \quad , \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad . \quad (15)$$

2) On considère la fonction génératrice

$$F_1 = \sum_{i=1}^n q_i q'_i \quad . \quad (16)$$

Dire pourquoi la transformation engendrée par cette fonction n'est pas intéressante (pour l'oscillateur harmonique par exemple).

3) On considère maintenant le cas de l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \quad (17)$$

et la fonction génératrice

$$F_1 = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cotg(q') \quad , \quad (18)$$

où $\omega^2 = k/m$.

Quelles transformations canoniques sont engendrées par F_1 ? Donner l'expression du nouveau hamiltonien H' et résoudre les nouvelles équations du mouvement. En déduire l'expression (bien connue) de $q(t)$.

Exercice 2 :

Une bulle de savon est tendue entre deux anneaux de même rayon R (voir figure). On se propose de trouver la surface d'aire minimale tendue entre les deux anneaux en fonction de la distance $d = 2h$ qui les sépare. La bulle est symétrique (par rotation) par rapport à l'axe z et $r = r(z)$ définit donc une surface. On notera \dot{r} la dérivée de r par rapport à z .

1) En prenant la bande de surface comprise entre (z, r) et $(z + dz, r + dr)$, montrer que l'aire infinitésimale de cette bande est donnée par $dA = 2\pi r \sqrt{dz^2 + dr^2} = 2\pi r \sqrt{1 + \dot{r}^2} dz$.

2) Il est donc question de minimiser l'intégrale³

$$A = \int_{-h}^h 2\pi r \sqrt{1 + \dot{r}^2} dz = \int_{-h}^h L(r, \dot{r}) dz \quad . \quad (19)$$

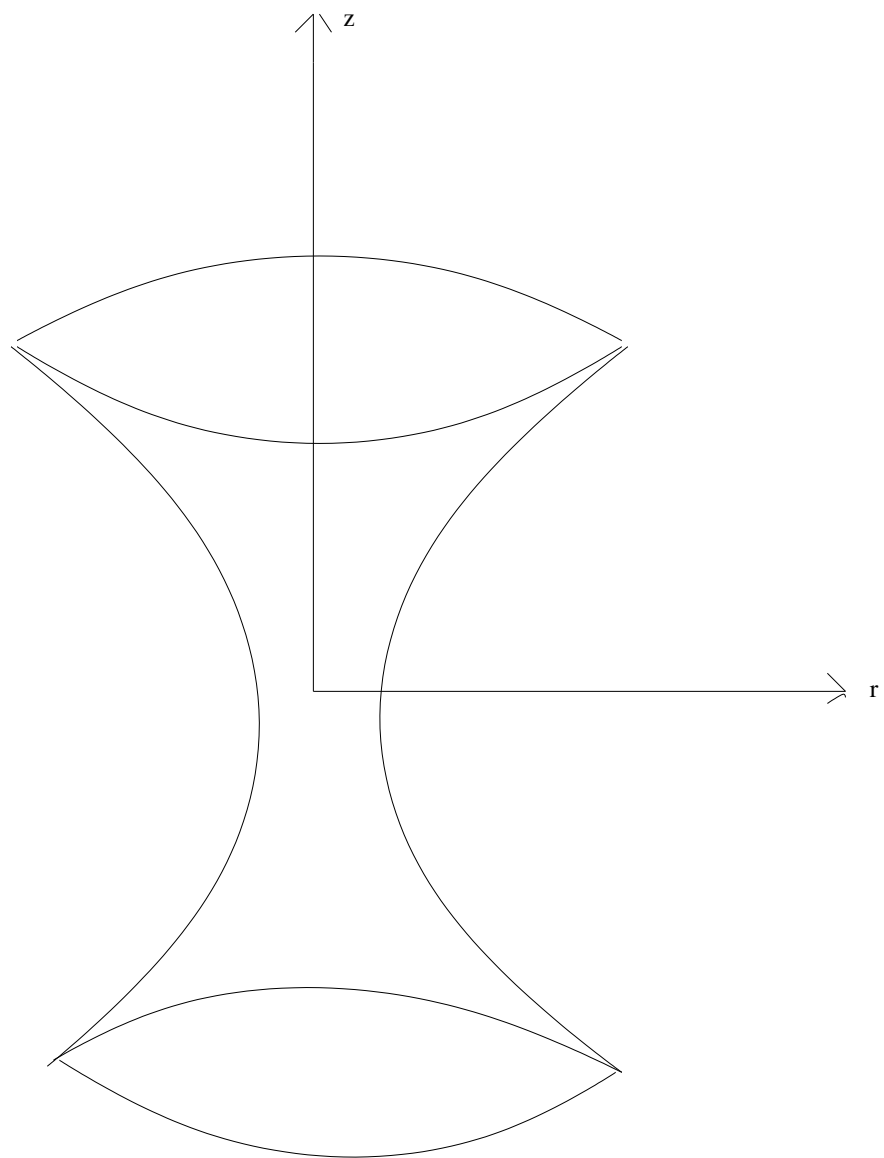
avec les conditions aux bords $r(-h) = r(h) = R$. Ecrire l'équations de stationnarité (d'extremalisation) de cette intégrale (simplifier cette équation au maximum).

3) Calculer le hamiltonien H correspondant au lagrangien $L(r, \dot{r})$ (exprimer H en fonction de r et \dot{r}).

4) Montrer que H est une constante (on calculera $\dot{H} = \frac{dH}{dz}$). Cette constante sera notée $-2\pi c$.

5) Utiliser le fait que H est une constante pour résoudre l'équation différentielle trouvée en 2. (On rappelle que la solution à l'équation différentielle $f'' = af$ est $f(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$). Déterminer, en fonction de c , les constantes d'intégration.

³La bulle se comporte comme une membrane élastique ayant une énergie potentielle d'élasticité $V = \sigma A$, où σ est la tension superficielle du savon. Minimiser A revient donc à minimiser l'énergie potentielle V .



502 P - Mécanique analytique - 2011/2012

Examen du 07/06/2012. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Une corde légère inextensible passe sur une petite poulie et porte une masse $2m$ à une extrémité. A l'autre extrémité est attachée une masse m et, au-dessous d'elle, est fixé un ressort de constante de rappel k qui supporte une seconde masse m .

- 1) Trouver l'hamiltonien du système, en utilisant comme coordonnées généralisées la distance x entre la poulie et la première masse m , l'allongement y du ressort et les moments conjugués de ces deux variables.
- 2) Ecrire les équations du mouvement. Si, lorsqu'on le lâche, le système est immobile et le ressort non étiré, trouver les positions des masses m à un instant ultérieur quelconque.

Exercice 2 :

Une courbe, appartenant à une surface, qui minimise la distance entre deux points (voisins) de cette surface est appelée une géodésique.

Trouver les géodésiques d'un cône de révolution.

Exercice 3 :

Soit une particule de masse m se déplaçant dans un champ de forces dérivant du potentiel $V(r, \theta, z)$ exprimé en coordonnées cylindriques.

- 1) Ecrire le lagrangien du système en fonction des coordonnées cylindriques.
- 2) Ecrire les équations de Euler-Lagrange (équations du mouvement).
- 3) Etudier le cas où $V(r, \theta, z) = mgz$, où g est l'accélération terrestre.

502 P - Mécanique analytique - 2011/2012

Examen du 14/12/2011. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Un système à deux degrés de liberté est décrit par la fonction de Lagrange

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2} (x^2 + y^2) + \alpha xy \quad , \quad (20)$$

où ω_0 et α sont deux constantes positives et $\omega_0^2 > \alpha$.

- 1) Ecrire les équations du mouvement et donner $x(t)$ et $y(t)$.
- 2) Trouver un système de coordonnées (q_1, q_2) dans lequel le problème se ramène à celui de deux oscillateurs découplés.
- 3) Déterminer les constantes β et γ pour que l'expression $C = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \beta (x^2 + y^2) + \gamma xy$ soit une constante du mouvement. Que représente C alors ?

Exercice 2 :

Le lagrangien d'une particule matérielle relativiste (une particule dont la vitesse est proche de la vitesse de la lumière c) est donné par

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad , \quad (21)$$

où m est la masse de la particule et \vec{v} son vecteur vitesse. Le vecteur position de la particule est $\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$.

- 1) Montrer que dans la limite où la vitesse v est très petite devant c , ce lagrangien décrit le mouvement d'une particule libre ordinaire (cette question est indépendante du reste du problème).
- 2) Donner l'expression du vecteur $\vec{P} = P_1 \vec{e}_1 + P_2 \vec{e}_2 + P_3 \vec{e}_3$, où P_i est le moment conjugué de la coordonnée x_i et $i = 1, 2, 3$ (il est souhaitable d'exprimer le vecteur \vec{P} en fonction du vecteur \vec{v}). Retrouver l'expression de l'impulsion d'une particule ordinaire dans la limite $v \ll c$ (au premier ordre dans v).
- 3) On appelle $E = \vec{P} \cdot \vec{v} - L$ l'énergie de la particule. Exprimer E en fonction de v uniquement.

Que vaut E quand $v = 0$? (cela vous rappelle-t-il quelqu'un? ☺). Cette valeur de E est appelée l'énergie au repos d'une particule.

4) Montrer qu'on a les relations:

$$E^2 = P^2 c^2 + m^2 c^4 \quad , \quad \vec{P} = \frac{E}{c^2} \vec{v} \quad . \quad (22)$$

Le hamiltonien H est égale à E . Que vaut H dans la limite $v \ll c$? Commenter.

5) Ecrire les équations du mouvement et en déduire quatre quantités conservées. Donner $\vec{r}(t)$.

6) Montrer que les composantes du moment cinétique de cette particule $\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge \vec{P}$ satisfont $\{H, \sigma_i\} = 0$. Conclure. Montrer, par le moyen le plus 'économique', la conservation du vecteur $(t\vec{P} - \frac{E}{c^2}\vec{r})$, où t est le temps.

7) Montrer les relations $\{\sigma_1, \sigma_2\} = \sigma_3$, $\{\sigma_3, \sigma_1\} = \sigma_2$, $\{\sigma_2, \sigma_3\} = \sigma_1$.

502 P - Mécanique analytique - 2010/2011
Examen du 17/06/2011. Durée: 2h00mn
Exercice 1 :

Un point matériel M de masse m est soumis à une accélération centrale dirigée vers un point fixe O et proportionnelle à:

$$\frac{1}{r^2} \times e\left(\frac{k}{r}\right),$$

où r est la distance de M à l'origine O et k est une constante.

- 1) Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O et montrer que le mouvement de M est un mouvement plan (*On calculera la dérivée du moment cinétique par rapport au temps et on montrera qu'il est constant*). Le mouvement de M sera par la suite étudié dans ce plan. Quel est le système de coordonnées le plus adapté à ce mouvement?
- 2) Calculer le lagrangien correspondant à ce mouvement.
- 3) Ecrire les équations du mouvement dans le formalisme lagrangien.
- 4) Donner deux constantes du mouvement.
- 5) Montrer qu'une orbite circulaire, du point M , est possible et donner l'expression de son rayon. Démontrer que cette orbite n'est stable que si son rayon est supérieur à k .

Exercice 2 :

Le hamiltonien d'une particule de masse m est donné par

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} \exp\left(-\frac{q}{a}\right) \quad (23)$$

où (q, p) sont les coordonnées canoniquement conjugués et a une longueur donnée.

- 1) Ecrire les équations de Hamilton associées à H .
- 2) Calculer \dot{H} et vérifier à partir des résultats du 1 que $H = h = \text{constante}$. Expliquer pourquoi ce résultat est évident d'après la définition de H .
- 3) Réécrire les deux équations du mouvement en exploitant le résultat du 2 et résoudre le système d'équations avec les conditions initiales $q(0) = 0$ et $p(0) = mv_0$ où $v_0 > 0$. Que vaut h ?

- 4) Calculer l'énergie cinétique T . Comment est-elle reliée à H ? Montrer qu'il y a dissipation de l'énergie cinétique (comparer $T(0)$ et $T(t)$ pour un $t > 0$).
- 5) Tracer l'espace des phases (p en ordonnée et q en abscisse) pour différentes valeurs de v_0 .

502 P - Mécanique analytique - 2010/2011
Examen du 15/12/2010. Durée: 2h00mn
Exercice 1 :

Un point matériel M de masse m se déplace dans le plan xOy et ses coordonnées sont (x, y) . Il est soumis à la seule force \vec{F} dont les composantes cartésiennes sont $(F_x = ax + by, F_y = bx + ay + cxy)$, où a, b et c sont des constantes.

- a) Déterminer la constante c pour que cette force dérive d'une énergie potentielle.
- b) Donner alors l'expression de l'énergie potentielle. On prend l'origine de l'énergie potentielle au point O .
- c) Ecrire le lagrangien et déterminer les équations du mouvement. S'assurer que ces équations sont celles de Newton.
- d) Déterminer $x(t)$ et $y(t)$. On prendra pour cette question $(a + b) = -4m$ et $(a - b) = -m$
- e) Soient $\vec{l} = l\vec{k}$ le moment cinétique et H le hamiltonien de la particule M . Calculer le crochet de Poisson $\{H, l\}$. Pour quelles valeurs des constantes a et b le moment cinétique est-il conservé? Comment appelle-t-on la force dans ce cas? (représenter la force agissant sur M).

Exercice 2 :

Le hamiltonien d'une particule de masse m est donné par

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} \exp\left(-\frac{q}{a}\right) \quad (24)$$

où (q, p) sont les coordonnées canoniquement conjugués et a une longueur donnée.

- 1) Ecrire les équations de Hamilton associées à H .
- 2) Calculer \dot{H} et vérifier à partir des résultats du 1 que $H = h = \text{constante}$. Expliquer pourquoi ce résultat est évident d'après la définition de H .
- 3) Réécrire les deux équations du mouvement en exploitant le résultat du 2 et résoudre le système d'équations avec les conditions initiales $q(0) = 0$ et $p(0) = mv_0$ où $v_0 > 0$. Que vaut h ?

- 4) Calculer l'énergie cinétique T . Comment est-elle reliée à H ? Montrer qu'il y a dissipation de l'énergie cinétique (comparer $T(0)$ et $T(t)$ pour un $t > 0$).
- 5) Tracer l'espace des phases (p en ordonnée et q en abscisse) pour différentes valeurs de v_0 .

502 P - Mécanique analytique - 2010/2011

Contrôle Continu du 03/11/2010. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Le mouvement d'un système mécanique est décrit par les équations différentielles suivantes:

$$2\ddot{x} + \ddot{y} = -2x \quad \ddot{x} + \ddot{y} = -y$$

- a) Trouver les constantes a, b, c, d et e pour que ces équations soient celles du lagrangien $L = a\dot{x}^2 + b\dot{y}^2 + c\dot{x}\dot{y} + dx^2 + ey^2$.
- b) Déterminer les modes propres du mouvement et écrire la solution générale.

Exercice 2 :

Un point matériel M de masse m est soumis à une accélération centrale dirigée vers un point fixe O et proportionnelle à:

$$\frac{1}{r^2} \times e\left(\frac{k}{r}\right) ,$$

où r est la distance de M à l'origine O et k est une constante.

- 1) Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O et montrer que le mouvement de M est un mouvement plan (*On calculera la dérivée du moment cinétique par rapport au temps et on montrera qu'il est constant*). Le mouvement de M sera par la suite étudié dans ce plan. Quel est le système de coordonnées le plus adapté à ce mouvement?
- 2) Calculer le lagrangien correspondant à ce mouvement.
- 3) Ecrire les équations du mouvement dans le formalisme lagrangien.
- 4) Donner deux constantes du mouvement.
- 5) Montrer qu'une orbite circulaire, du point M , est possible et donner l'expression de son rayon. Démontrer que cette orbite n'est stable que si son rayon est supérieur à k .

502 P - Mécanique analytique - 2009/2010
Examen du 04/01/2010. Durée: 2h00mn
Exercice 1 :

Une particule de charge q et de masse m se déplace dans un champ magnétique \vec{B} . Ces coordonnées sont notées x_i ($i = 1, 2, 3$) et son vecteur vitesse est \vec{v} .

a) Ecrire, sous forme vectorielle, les équations du mouvement de Newton pour cette particule. Le hamiltonien décrivant ce mouvement est donné par

$$H(p_i, x_i) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 (p_j - qA_j) (p_j - qA_j) ,$$

où $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ et \vec{A} ne dépend pas explicitement du temps ($\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$).

b) Montrer que les équations de Hamilton sont équivalentes aux équations du mouvement de Newton.

c) Résoudre les équations du mouvement pour un champ magnétique constant dirigé selon le troisième axe. A l'instant initial la particule est à l'origine et sa vitesse est \vec{v}_0 .

Exercice 2 :

1) Soit $H(p_i, q_i, t)$ l'hamiltonien d'un système et $F(p_i, q_i, t)$ une variable dynamique quelconque. Montrer que $\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$. Conclusion.

En déduire la forme des équations d'Hamilton en terme des crochets de Poisson.

2) Une particule de masse m se déplace dans l'espace à trois dimensions (x_1, x_2, x_3) . Son hamiltonien est

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m} - \frac{k}{r} ,$$

où k est une constante positive et r est le module du vecteur position \vec{r} .

a) Montrer que le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ est conservé (le vecteur \vec{p} a comme composantes les p_i). En déduire que le mouvement s'effectue dans un plan. Donner (sans faire de calcul) une autre constante du mouvement. Que représente-t-elle?

- b)** Ecrire le hamiltonien dans les coordonnées sphériques (r, θ, φ) .
- c)** Déterminer la coordonnée cyclique et la constante du mouvement correspondante. Que représente cette constante? Cette constante peut être choisie égale à zéro. Pourquoi? Retrouver alors le résultat en **a)**. Avec ce choix, donner l'expression du nouveau hamiltonien.
- d)** Ecrire les équations de Hamilton.
- e)** Etudier graphiquement le mouvement et montrer qu'il y a trois types de mouvements possibles. Donner un exemple physique (parmi les mouvements d'objets célestes) pour chaque cas.

502 P - Mécanique analytique - 2009/2010
Examen du 07/06/2010. Durée: 2h00mn
Exercice 1 :

Une particule de charge q et de masse m se déplace dans un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) . Ces coordonnées sont notées x_i ($i = 1, 2, 3$) et son vecteur vitesse est \vec{v} .

a) Ecrire, sous forme vectorielle, les équations du mouvement de Newton pour cette particule. Le hamiltonien décrivant ce mouvement est donné par

$$H(p_i, x_i) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 (p_j - qA_j)(p_j - qA_j) + q\varphi ,$$

où $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$ et $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.

b) Montrer que les équations de Hamilton sont équivalentes aux équations du mouvement de Newton.

c) résoudre les équations du mouvement pour un champ magnétique constant dirigé selon le troisième axe et un champ électrique constant dirigé selon le premier axe. A l'instant initial la particule est à l'origine et sa vitesse est \vec{v}_0 .

Exercice 2 :

On étudie classiquement le mouvement d'un électron de masse m et de charge $-e$ soumis à l'attraction électrostatique d'un noyau de charge $+Ze$.

1) Ecrire le potentiel $V(\vec{r})$ en coordonnées sphériques (r, θ, φ) . On posera $k = Ze^2/(4\pi\epsilon_0)$.

2) Ecrire le lagrangien du système en coordonnées sphériques.

3) Donner l'expression du hamiltonien et s'assurer qu'il est conservé. Que représente-t-il?

4) Trouver une autre constante du mouvement. Quelle est son interprétation? Cette constante peut être choisie égale à zéro. Pourquoi?

Montrer que ce choix est équivalent à prendre $\varphi(t) = \text{constante}, \forall t$. Avec ce choix, donner l'expression du nouveau hamiltonien.

5) Ecrire les équations de Hamilton et identifier une nouvelle constante du mouvement.

6) Montrer qu'un mouvement circulaire stable est possible. Donner le rayon, r_c , du cercle

en fonctions des donnée initiales r_0 et θ_0 . En déduire l'expression de la vitesse angulaire à communiquer à l'électron pour que r_c soit égal à r_0 .

502 P - Mécanique analytique - 2008/2009

Examen du 08/06/2009. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Le lagrangien d'un système à deux degrés de liberté est donné par

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2} (x^2 + y^2) + \alpha xy \quad , \quad (25)$$

où ω_0 et α sont des constantes.

- a) Donner l'expression de l'hamiltonien de ce système.
- b) Trouver $x(t)$ et $y(t)$.

Exercice 2 :

Soit un pendule simple de masse m dans lequel la tige rigide est remplacée par un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide l . Les deux degrés de liberté sont l'angle θ que fait le ressort avec la verticale et la longueur du ressort r .

- 1) Ecrire le lagrangien du pendule et en déduire les équations du mouvement.
- 2) Est-ce-qu'un mouvement pour lequel la masse m décrit un arc de cercle est possible?
- 3) Expliquer, sans calcul, pourquoi le hamiltonien H du pendule satisfait $\frac{dH}{dt} = 0$.
- 4) Montrer que le moment cinétique de m par rapport à O n'est pas une quantité conservée.

Exercice 3 :

Soit la transformation donnée par:

$$\begin{aligned} q_1 &= q'_1 \cos \lambda + \frac{p'_2}{m\omega} \sin \lambda \quad , \quad q_2 = q'_2 \cos \lambda + \frac{p'_1}{m\omega} \sin \lambda \quad , \\ p_1 &= -m\omega q'_2 \sin \lambda + p'_1 \cos \lambda \quad , \quad p_2 = -m\omega q'_1 \sin \lambda + p'_2 \cos \lambda \quad . \end{aligned} \quad (26)$$

Si cette transformation est une transformation canonique, alors il existe une fonction $F_2(q_i, p'_i)$, $i = 1, 2$, tel que

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad , \quad q'_i = \frac{\partial F_2}{\partial p'_i} \quad . \quad (27)$$

- 1) Quel est l'intérêt des transformations canoniques?
- 2) Déterminer la fonction génératrice F_2 (m , ω et λ sont des constantes).
- 3) Trouver la nouvelle fonction d'Hamilton $H'(p'_i, q'_i)$ si

$$H(p_i, q_i) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2) \quad . \quad (28)$$

502 P - Mécanique analytique - 2008/2009
Examen du 16/12/2008. Durée: 2h00mn
Exercice 1 :

Déterminer le mouvement d'un système à deux degrés de liberté si sa fonction de Lagrange est

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2} (x^2 + y^2) + \alpha xy \quad , \quad (29)$$

où ω_0 et α sont des constantes.

Exercice 2 :

Un point matériel de masse m se déplace, sans frottement, sur la surface intérieure d'un cône dans le champ de la pesanteur. Le cône a un angle au sommet égale à 2α et est placé verticalement, le sommet en bas.

- 1) Ecrire la fonction de Lagrange de ce point.
- 2) Donner les expressions (et les interprétations physiques) de deux constantes du mouvement.
- 3) Montrer que l'une de ces deux constantes peut se mettre sous la forme $\frac{M}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \text{constante}$, où M et V_{eff} sont à déterminer.
- 4) Montrer, par un raisonnement graphique (solution graphique et sans trop de calcul), que les valeurs possibles de r sont nécessairement comprises entre deux valeurs r_1 et r_2 .

Exercice 3 :

Le hamiltonien, en coordonnées sphériques (r, θ, φ) , d'une particule de masse m est donnée par

$$H = \frac{1}{2m} \left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2} + \frac{P_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} \quad , \quad (30)$$

où $a(r)$ et $b(\theta)$ sont deux fonctions données.

- 1) Ecrire le lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i)$ du système.
- 2) Expliquer pourquoi l'énergie totale E et le moment P_φ sont des constantes du mouvement.
- 3) Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi pour la fonction génératrice S (on suppose que S dépend explicitement du temps).
- 4) Cherchons des solutions à cette équation du type $S = -Et + P_\varphi\varphi + W_1(r) + W_2(\theta)$, où E est une constante. En déduire les équations différentielles satisfaites par $W_1(r)$ et $W_2(\theta)$ et expliciter les solutions.

502 P - Mécanique analytique - 2007/2008

Examen du 10/06/2008. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Un point matériel de masse m se déplace, sans frottement, sur la surface intérieure d'une sphère de rayon R dans le champ de la pesanteur.

- 1) Ecrire la fonction de Lagrange de ce point.
- 2) Donner les expressions (et les interprétations physiques) de deux constantes du mouvement.
- 3) Montrer que l'une de ces deux constantes peut se mettre sous la forme $\frac{M}{2}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) = \text{constante}$, où M et V_{eff} sont à déterminer.
- 4) L'équation de la question précédente peut être regardée comme une équation en $\alpha = \cos(\theta)$. Montrer, par un raisonnement graphique (solution graphique et sans trop de calcul), que les valeurs possibles de θ sont nécessairement comprises entre deux valeurs θ_1 et θ_2 .

Exercice 2 :

Etudions la dynamique hamiltonienne dans un référentiel tournant (par exemple lié à un manège) à une vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ autour de la direction \vec{k} . On suppose que les deux référentiels coïncident au temps $t = 0$. Les coordonnées dans le référentiel fixe sont $q_i = (x, y, z)$ et celles du référentiel mobile sont $q'_i = (X, Y, Z)$.

- 1) Montrer que les coordonnées q_i et q'_i sont reliées par

$$x = X \cos(\omega t) - Y \sin(\omega t) \quad , \quad y = X \sin(\omega t) + Y \cos(\omega t) \quad , \quad z = Z \quad . \quad (31)$$

- 2) Exprimer l'énergie cinétique $T(q'_i, \dot{q}'_i)$ d'un point matériel libre de masse m .
- 3) Si $V(q'_i)$ désigne le potentiel dans lequel est plongé le point matériel, donner l'expression du lagrangien $L(q'_i, \dot{q}'_i)$ du système.
- 4) En déduire le hamiltonien $H(p'_i, q'_i)$.

Le hamiltonien $H(p'_i, q'_i)$ est-il une constante du mouvement? Si oui, préciser si cette constante est l'énergie du système $E(p'_i, q'_i)$.

- 5) Calculer le crochet de Poisson $\{E(p'_i, q'_i), H(p'_i, q'_i)\}_{(q', p')}$. Conclure.

- 6) Ecrire les équations de Hamilton dans le référentiel tournant et identifier les différentes forces.
- 7) Résoudre les équations du mouvement pour le potentiel $V(q'_i) = m\omega^2 \left(X^2 + \frac{1}{2}Y^2 \right)$.
- 8) Montrer que les moments généralisés (p_X, p_Y, p_Z) dans le référentiel tournant et les moments généralisés (p_x, p_y, p_z) dans le référentiel fixe sont liés par

$$p_X = p_x \cos(\omega t) + p_y \sin(\omega t) \quad , \quad p_Y = -p_x \sin(\omega t) + p_y \cos(\omega t) \quad , \quad p_Z = p_z \quad . \quad (32)$$

502 P - Mécanique analytique - 2007/2008
Examen du 11/12/2007. Durée: 2h00mn
Exercice 1 :

Un point matériel de masse m se déplace, sans frottement, sur la surface intérieure d'une sphère de rayon R dans le champ de la pesanteur.

- 1) Ecrire la fonction de Lagrange de ce point.
- 2) Donner les expressions (et les interprétations physiques) de deux constantes du mouvement.
- 3) Montrer que l'une de ces deux constantes peut se mettre sous la forme $\frac{M}{2}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) = \text{constante}$, où M et V_{eff} sont à déterminer.
- 4) L'équation de la question précédente peut être regardée comme une équation en $\alpha = \cos(\theta)$. Montrer, par un raisonnement graphique (solution graphique et sans trop de calcul), que les valeurs possibles de θ sont nécessairement comprises entre deux valeurs θ_1 et θ_2 .

Exercice 2 :

Etudions la dynamique hamiltonienne dans un référentiel tournant (par exemple lié à un manège) à une vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ autour de la direction \vec{k} . On suppose que les deux référentiels coïncident au temps $t = 0$. Les coordonnées dans le référentiel fixe sont $q_i = (x, y, z)$ et celles du référentiel mobile sont $q'_i = (X, Y, Z)$.

- 1) Montrer que les coordonnées q_i et q'_i sont reliées par

$$x = X \cos(\omega t) - Y \sin(\omega t) \quad , \quad y = X \sin(\omega t) + Y \cos(\omega t) \quad , \quad z = Z \quad . \quad (33)$$

- 2) Exprimer l'énergie cinétique $T(q'_i, \dot{q}'_i)$ d'un point matériel libre de masse m .
- 3) Si $V(q'_i)$ désigne le potentiel dans lequel est plongé le point matériel, donner l'expression du lagrangien $L(q'_i, \dot{q}'_i)$ du système.
- 4) En déduire le hamiltonien $H(p'_i, q'_i)$.

Le hamiltonien $H(p'_i, q'_i)$ est-il une constante du mouvement? Si oui, préciser si cette constante est l'énergie du système $E(p'_i, q'_i)$.

- 5) Calculer le crochet de Poisson $\{E(p'_i, q'_i), H(p'_i, q'_i)\}_{(q', p')}$. Conclure.

- 6) Ecrire les équations de Hamilton dans le référentiel tournant et identifier les différentes forces.
- 7) Résoudre les équations du mouvement pour le potentiel $V(q'_i) = m\omega^2 \left(X^2 + \frac{1}{2}Y^2 \right)$.
- 8) Montrer que les moments généralisés (p_X, p_Y, p_Z) dans le référentiel tournant et les moments généralisés (p_x, p_y, p_z) dans le référentiel fixe sont liés par

$$p_X = p_x \cos(\omega t) + p_y \sin(\omega t) \quad , \quad p_Y = -p_x \sin(\omega t) + p_y \cos(\omega t) \quad , \quad p_Z = p_z \quad . \quad (34)$$

502 P - Mécanique analytique - 2006/2007
Contrôle Continu du 15/11/2006. Durée: 1h30mn
Exercice 1 :

Le mouvement d'un système mécanique est décrit par les équations différentielles suivantes:

$$2\ddot{x} + \ddot{y} = -2x \quad \ddot{x} + \ddot{y} = -y$$

- a) Montrer que le système est un système hamiltonien.
- b) Déterminer les modes propres du mouvement et écrire la solution générale.

Exercice 2 :

Un point matériel M de masse m est soumis à une accélération centrale dirigée vers un point fixe O et proportionnelle à:

$$\frac{1}{r^2} \times e\left(\frac{k}{r}\right) ,$$

où r est la distance de M à l'origine O et k est une constante.

- 1) Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O et montrer que le mouvement de M est un mouvement plan. Le mouvement de M sera par la suite étudié dans ce plan. Quel est le système de coordonnées le plus adapté à ce mouvement?
- 2) Calculer le lagrangien correspondant à ce mouvement.
- 3) Ecrire les équations du mouvement dans le formalisme lagrangien.
- 4) Donner deux constantes du mouvement (et montrer quelles sont indépendantes du temps).
- 5) Montrer qu'une orbite circulaire, du point M , est possible et donner l'expression de son rayon. Démontrer que cette orbite n'est stable que si son rayon est supérieur à k .
- 6) Donner l'expression du hamiltonien correspondant à ce mouvement.
- 7) Ecrire les équations du mouvement dans le formalisme hamiltonien et comparer avec les résultats des questions 3 et 4.

502 P - Mécanique analytique - 2006/2007
Examen du 18/12/2006. Durée: 2h00mn
Exercice 1 :

Soit un pendule simple de masse m dans lequel la tige rigide est remplacée par un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide l . L'angle que fait le ressort avec la verticale est θ et r est la longueur du ressort.

- 1) Ecrire le lagrangien du pendule et en déduire les équations du mouvement.
- 2) Est-ce-qu'un mouvement pour lequel la masse m décrit un arc de cercle est possible?
- 3) Expliquer, sans calcul, pourquoi le hamiltonien H du pendule satisfait $\frac{dH}{dt} = 0$.
- 4) Montrer que le moment cinétique de m par rapport à O n'est pas une quantité conservée.

Exercice 2 :

Le lagrangien d'un système est donnée par

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - mgq_2 + \lambda(q_1 \operatorname{tg} \alpha - q_2) \quad , \quad (35)$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange, $g = 9,81\text{m/s}^2$ et α et m sont des constantes.

- 1) Quelle est la trajectoire de ce système? Quel système physique est représenté par ce lagrangien?
- 2) Résoudre les équations du mouvement si $\dot{q}_1(0) = v_0 \cos \alpha$, $\dot{q}_2(0) = v_0 \sin \alpha$ et $q_1(0) =$

$q_2(0) = 0$. Déterminer λ .

3) Que représentent les deux quantités $\lambda \operatorname{tg} \alpha$ et $-\lambda$?

Exercice 3 :

Soit M un point de l'espace des phases d'un système à un degré de liberté. Les coordonnées de ce point sont (q, p) . Le point M' est le point de l'espace des phases de coordonnées (q', p') obtenu à partir de M par une rotation d'un angle α .

On voudrait montrer que cette rotation définit une transformation canonique:

1) Montrer que les coordonnées du point M' sont données par

$$q' = q \cos \alpha - p \sin \alpha \quad , \quad p' = q \sin \alpha + p \cos \alpha \quad . \quad (36)$$

2) On cherche une fonction génératrice du type $F_1(q, q')$ satisfaisant

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad , \quad p' = -\frac{\partial F_1}{\partial q'} \quad (37)$$

Déterminer $F_1(q, q')$.

3) Soient $X(q, p)$ et $Y(q, p)$ deux grandeurs dynamiques. Montrer que le crochet de Poisson de X et Y satisfait

$$[X, Y]_{q,p} = \frac{\partial X}{\partial q'} \frac{\partial Y}{\partial p'} - \frac{\partial X}{\partial p'} \frac{\partial Y}{\partial q'} \quad . \quad (38)$$

Conclure.

502 P - Mécanique analytique - 2006/2007
Examen du 22/06/2007. Durée: 2h00mn
Exercice 1 :

Un point matériel de masse m se déplace sans frottement sous l'action de son poids sur un support dont l'allure est régie par l'équation $x^2 + y^2 = \mu z$, où μ est paramètre fixe ayant la dimension d'une longueur.

- 1) Quel est le système de coordonnées le plus adapté à ce problème?
- 2) Donner le lagrangien de ce mouvement.
- 3) Ecrire les équations de Euler-Lagrange en se servant d'un multiplicateur de Lagrange λ .
- 4) Donner l'expression de la force de réaction du support.
- 5) Etude d'un cas particulier: le mouvement dans le plan $z = h$. Montrer que dans ce cas, un mouvement circulaire stable est possible. Déterminer alors les conditions initiales pour obtenir ce mouvement et calculer λ .

Exercice 2 :

On donne la fonction de Lagrange suivante:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - eg\dot{\varphi} \cos \theta \quad , \quad (39)$$

où g et e sont des constantes.

- 1) Que représente ce lagrangien sans le dernier terme?
- 2) Ecrire les équations du mouvement et identifier les forces agissant sur m .
- 3) Montrer que ce lagrangien décrit le mouvement d'une particule de charge e dans le champ magnétique $\vec{B} = g \frac{\vec{r}}{r^3}$, où \vec{r} est le vecteur position de la particule.
- 4) Donner l'expression de p_φ , le moment conjugué de φ , et montrer que p_φ reste constant au cours du temps.
- 5) Trouver une autre constante du mouvement.

Exercice 3 :

Soit la transformation donnée par:

$$\begin{aligned} q_1 &= q'_1 \cos \lambda + \frac{p'_2}{m\omega} \sin \lambda \quad , \quad q_2 = q'_2 \cos \lambda + \frac{p'_1}{m\omega} \sin \lambda \quad , \\ p_1 &= -m\omega q'_2 \sin \lambda + p'_1 \cos \lambda \quad , \quad p_2 = -m\omega q'_1 \sin \lambda + p'_2 \cos \lambda \quad . \end{aligned} \quad (40)$$

Si cette transformation est une transformation canonique, alors il existe une fonction $F_2(q_i, p'_i)$, $i = 1, 2$, tel que

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad , \quad q'_i = \frac{\partial F_2}{\partial p'_i} \quad . \quad (41)$$

- 1) Déterminer la fonction génératrice F_2 (m , ω et λ sont des constantes).
- 2) Trouver la nouvelle fonction d'Hamilton $H'(p'_i, q'_i)$ si

$$H(p_i, q_i) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2) \quad . \quad (42)$$