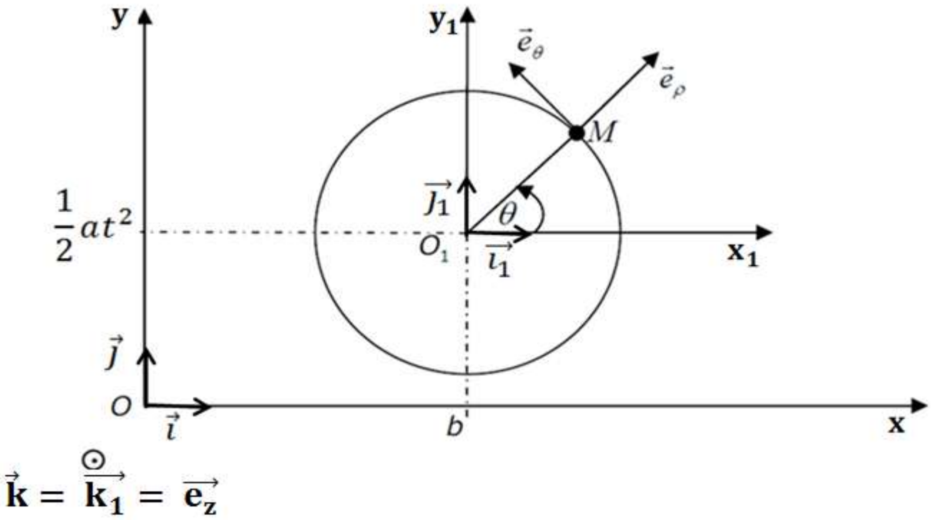
Examen de la Mécanique du Point Matériel

On considère le repère fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), (xOy) étant le plan vertical.

Soit un cerceau (C) de centre O_1 et de rayon R, en mouvement dans le plan (xOy) tel que $\overrightarrow{OO_1} = b\vec{i} + \frac{1}{2}at^2\vec{j}$ avec: a et b étant des constantes positives non nulles. On désigne par $\Re_1(O_1,\vec{i_1},\vec{j_1},\vec{k_1})$ un repère lié au cerceau (repère relatif) tel que $\vec{i_1} = \vec{i}$, $\vec{j_1} = \vec{j}$, $\vec{k_1} = \vec{k}$. Soit un point M, de masse m, se déplaçant sans frottement sur le cerceau (C) et repéré dans $\Re_1$ par l'angle θ (voir la figure ci-dessous). On suppose qu'à $t = 0$, $\theta = 0$ et $E_p(M/\Re) = E_p(M/\Re_1) = 0$.



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base ($\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$).

I-Etude cinématique de M

1- Par calcul direct

1- 1- Exprimer les vecteurs de base $\vec{i_1}$, $\vec{j_1}$ et $\vec{k_1}$ dans ($\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$) — 0.75

1- 2- Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$. — 0.5

1- 3- Exprimer la vitesse absolue de M : $\vec{V}_a(M)$. — 0.5

1- 4- Exprimer l'accélération absolue de M : $\vec{\gamma}_a(M)$. — 1

2- Par les lois de décomposition de mouvement

2- 1- Exprimer la vitesse relative $\vec{V}_r(M)$, la vitesse d'entrainement $\vec{V}_e(M)$ et retrouver la vitesse absolue $\vec{V}_a(M)$. — 1

2- 2- Exprimer l'accélération relative $\vec{\gamma}_r(M)$, l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e(M)$, l'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$ et retrouver l'accélération absolue $\vec{\gamma}_a(M)$. — 1.5

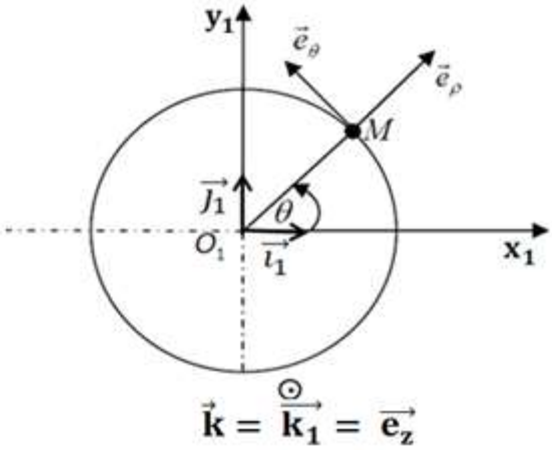
II-Etude dynamique de M

1- Le repère $\Re_1$ est-il Galiléen ou non Galiléen ? Justifier votre réponse. — 0.25

2- En appliquant le principe fondamentale de la dynamique dans le repère $\Re_1$, déterminer une équation différentielle du second ordre en t vérifiée par θ et les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par la tige. — 3.25

III- Théorèmes généraux	
1- Application du théorème du moment cinétique dans le repère $\Re_1$	
1- 1- Exprimer le moment cinétique en O_1 du point M : $\overrightarrow{\sigma_{O_1}}(M/\Re_1)$	0.75
1- 2- Exprimer les moments des forces dans le repère $\Re_1$	1
1- 3- En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du second ordre en *t* vérifiée par θ.	1.5
2- Application des théorèmes d'énergie cinétique et d'énergie mécanique	
2- 1- Montrer que la force $\overrightarrow{F_{ie}}$ est conservative.	0.5
2- 2- Calculer l'énergie potentielle de M par rapport à $\Re_1$, sachant que : $$E_p(M/\Re_1) = E_p(\vec{P}/\Re_1) + E_p(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1).$$	3
2- 3- Calculer l'énergie cinétique de *M* par rapport au repère $\Re_1$.	0.5
2- 4- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du second ordre en *t* vérifiée par θ.	2
2- 5- En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du second ordre en *t* vérifiée par θ.	2

Correction de l'examen de Mécanique du Point Matériel



$$\begin{cases} \vec{e_\rho} = \cos\theta\ \vec{\imath_1} + \sin\theta\ \vec{\jmath_1} \\ \vec{e_\theta} = -\sin\theta\ \vec{\imath_1} + \cos\theta\ \vec{\jmath_1} \\ \vec{e_z} = \vec{k_1} \end{cases}$$

$$\left.\frac{d(\vec{e_\rho})}{dt}\right)_{\Re_1} = \dot{\theta}\vec{e_\theta} \qquad \left.\frac{d(\vec{e_\theta})}{dt}\right)_{\Re_1} = -\dot{\theta}\vec{e_\rho} \qquad \left.\frac{d(\vec{e_z})}{dt}\right)_{\Re_1} = \vec{0}$$

$\Re_1$ est en translation par rapport à $\Re \Longrightarrow \vec{\Omega}\,(\Re/\Re_1) = \vec{0}$

I-Etude de la cinématique de M

1- Par calcul direct

1- 1- On exprime les vecteurs de base $\vec{\imath_1}, \vec{j_1}$ et $\vec{k_1}$ dans $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$\begin{cases} \vec{\imath_1} = \cos\theta\ \vec{e_\rho} - \sin\theta\ \vec{e_\theta} \\ \vec{\jmath_1} = \sin\theta\ \vec{e_\rho} + \cos\theta\ \vec{e_\theta} \\ \vec{k_1} = \vec{e_z} \end{cases}$$

1- 2- On exprime le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = b\vec{\imath} + \frac{1}{2}at^2\vec{\jmath} + R\vec{e_\rho}$ (a et b étant des constantes positives non nulles)

$\vec{\imath_1} = \vec{\imath} \qquad \vec{\jmath_1} = \vec{\jmath} \qquad \vec{k_1} = \vec{k}$

$$\Longrightarrow \qquad \overrightarrow{OM} = b\cos\theta\ \vec{e_\rho} - b\sin\theta\ \vec{e_\theta} + \frac{1}{2}at^2(\sin\theta\ \vec{e_\rho} + \cos\theta\ \vec{e_\theta}) + R\vec{e_\rho}$$

$$= \left(R + b\cos\theta + \frac{1}{2}at^2\sin\theta\right)\vec{e_\rho} + \left(-b\sin\theta + \frac{1}{2}at^2\cos\theta\right)\vec{e_\theta}$$

1- 3- On exprime la vitesse absolue de M : $\vec{V}_a(M)$ par calcul direct

<u>**Première méthode :**</u>

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{V_a}(M) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{\Re} + \left.\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{\Re} + \left.\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\Re_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M} = at\,\vec{\jmath_1} + R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$= at\sin\theta\ \vec{e_\rho} + (R\dot{\theta} + at\cos\theta)\ \vec{e_\theta}$$

<u>**Deuxième méthode :**</u>

$$\vec{V_a}(M) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re} = \frac{d}{dt}\left[\left(R + b\cos\theta + \frac{1}{2}at^2\sin\theta\right)\vec{e_\rho} + \left(-b\sin\theta + \frac{1}{2}at^2\cos\theta\right)\vec{e_\theta}\right]$$

$$= \left(R + b\cos\theta + \frac{1}{2}at^2\sin\theta\right)\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \left(-b\dot{\theta}\sin\theta + at\sin\theta + \frac{1}{2}at^2\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{e_\rho}$$

$$-\left(-b\sin\theta + \frac{1}{2}at^2\cos\theta\right)\dot{\theta}\vec{e_\rho} + \left(-b\dot{\theta}\cos\theta + at\cos\theta - \frac{1}{2}at^2\dot{\theta}\sin\theta\right)\vec{e_\theta}$$

$$= \left[-b\dot{\theta}\sin\theta + at\sin\theta + \frac{1}{2}at^2\dot{\theta}\cos\theta + b\dot{\theta}\sin\theta - \frac{1}{2}at^2\dot{\theta}\cos\theta\right]\vec{e_\rho}$$

$$+\left[R\dot{\theta} + b\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}at^2\dot{\theta}\sin\theta - b\dot{\theta}\cos\theta + at\cos\theta - \frac{1}{2}at^2\dot{\theta}\sin\theta\right]\vec{e_\theta}$$

$$= at\sin\theta\vec{e_\rho} + (R\dot{\theta} + at\cos\theta)\vec{e_\theta}$$

1- 4- On exprime l'accélération absolue de M : $\vec{\gamma}_a(M)$ par calcul direct

Première méthode :

$$\vec{\gamma_a}(M) = \left.\frac{d\,\vec{V_a}(M)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\,\vec{V_a}(M)}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V_a}(M)$$

$$= asin\theta\,\vec{e_\rho} + at\dot{\theta}cos\theta\,\vec{e_\rho} + at\dot{\theta}sin\theta\,\vec{e_\theta} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{e_\rho} + acos\theta\,\vec{e_\theta} - at\dot{\theta}sin\theta\,\vec{e_\theta} - at\dot{\theta}cos\theta\vec{e_\rho}$$

$$= (asin\theta + at\dot{\theta}cos\theta - R\dot{\theta}^2 - at\dot{\theta}cos\theta)\vec{e_\rho} + (acos\theta + at\dot{\theta}sin\theta - at\dot{\theta}sin\theta + R\ddot{\theta})\,\vec{e_\theta}$$

$$= (asin\theta - R\dot{\theta}^2)\vec{e_\rho} + (acos\theta + R\ddot{\theta})\,\vec{e_\theta}$$

Deuxième méthode :

$$\vec{\gamma_a}(M) = \left.\frac{d\,\vec{V_a}(M)}{dt}\right|_R = \frac{d}{dt}[atsin\theta\vec{e_\rho} + (R\dot{\theta} + atcos\theta)\vec{e_\theta}]$$

$$= asin\theta\vec{e_\rho} + at\dot{\theta}cos\theta\vec{e_\rho} + at\dot{\theta}sin\theta\vec{e_\theta} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{e_\rho} + acos\theta\vec{e_\theta} - at\dot{\theta}sin\theta\vec{e_\theta} - at\dot{\theta}cos\theta\vec{e_\rho} = (asin\theta - R\dot{\theta}^2)\vec{e_\rho} + (R\ddot{\theta} + acos\theta)\vec{e_\theta}$$

2- Par lois de décomposition de mouvement

2- 1-

- L'expression de la vitesse relative $\vec{V_r}(M)$

$$\vec{V}(M/\Re_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{\Re_1} = \left.\frac{d(R\vec{e_\rho})}{dt}\right)_{\Re_1} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(M/\Re_1) = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

- L'expression de la vitesse d'entrainement $\vec{V_e}(M)$

$$\vec{V_e}(M) = \vec{V}(O_1/\Re) + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M} = at\,\vec{j_1} = atsin\theta\,\vec{e_\rho} + atcos\theta\,\vec{e_\theta}$$

- On déduit la vitesse absolue $\vec{V_a}(M)$.

$$\vec{V_a}(M) = \vec{V_r}(M) + \vec{V_e}(M) = atsin\theta\,\vec{e_\rho} + (R\dot{\theta} + atcos\theta)\,\vec{e_\theta}$$

2- 2-

- L'expression de l'accélération relative $\vec{\gamma_r}(M)$

$$\vec{\gamma_r}(M) = -R\dot{\theta}^2\vec{e_\rho} + R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

- L'expression de l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma_e}(M)$

$$\vec{\gamma_e}(M) = \vec{\gamma}(O_1/\Re) + \left.\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt}\right)_{\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\Re/\Re_1) \wedge (\vec{\Omega}(\Re/\Re_1) \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

$$\vec{\gamma}(O_1/\Re) = \left.\frac{d^2\left(\frac{1}{2}at^2\vec{j_1}\right)}{dt^2}\right)_{\Re} = a\,\vec{j_1} = asin\theta\,\vec{e_\rho} + acos\theta\,\vec{e_\theta}$$

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}(\Re/\Re_1)}{dt}\right)_{\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(\Re/\Re_1) \wedge (\vec{\Omega}(\Re/\Re_1) \wedge \overrightarrow{O_1M}) = \omega\,\vec{k} \wedge (\omega\,\vec{k} \wedge R\vec{e_\rho}) = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma_e}(M) = asin\theta\,\vec{e_\rho} + acos\theta\,\vec{e_\theta}$$

- L'expression de Coriolis $\vec{\gamma_c}(M)$

$$\vec{\gamma_c}(M) = 2\vec{\Omega}(\Re/\Re_1) \wedge \vec{V_r}(M) = \vec{0}$$

- On déduit l'accélération absolue $\vec{\gamma_a}(M)$

$$\vec{\gamma_a}(M) = \vec{\gamma_r}(M) + \vec{\gamma_e}(M) + \vec{\gamma_c}(M) = (asin\theta - R\dot{\theta}^2)\vec{e_\rho} + (acos\theta + R\ddot{\theta})\,\vec{e_\theta}$$

II-Etude dynamique de M

1- Le repère $\Re_1$ est ou non Galiléen car il est en mouvement de translation non uniforme par rapport au repère fixe $\Re$ (galiléen).

2- Application du principe fondamentale de la dynamique dans le repère $\mathfrak{R}_1$

- On détermine une équation différentielle du second ordre en t vérifiée par θ

$\mathfrak{R}_1$ est non Galiléen $\Longrightarrow m\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}_1) = \sum \overrightarrow{F_{ext}} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}} = \vec{P} + \vec{R} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}}$

L'inventaire des forces :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{J_1} = -mgsin\theta\,\overrightarrow{e_\rho} - mgcos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$: Poids de M ;
- $\vec{R} = R_\rho\overrightarrow{e_\rho} + R_\theta\overrightarrow{e_\theta} + R_z\overrightarrow{e_z}$: La réaction

  Mouvement sans frottement ⇒ la composante tangentielle de la réaction est nulle c'est-à-dire :

$$R_\theta = 0 \quad \Longrightarrow \vec{R} = R_\rho\overrightarrow{e_\rho} + R_z\overrightarrow{e_z}$$

- $\overrightarrow{F_e} = -m\overrightarrow{\gamma_e}(M) = -masin\theta\,\overrightarrow{e_\rho} - macos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$: force d'inertie d'entrainement ;
- $\overrightarrow{F_c} = -m\overrightarrow{\gamma_c}(M) = \vec{0}$: force d'inertie de Coriolis.

  P.F.D dans $\mathfrak{R}_1$ s'écrit :

$$-mR\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_\rho} + mR\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = -mgsin\theta\,\overrightarrow{e_\rho} - mgcos\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + R_\rho\overrightarrow{e_\rho} + R_z\overrightarrow{e_z} - masin\theta\,\overrightarrow{e_\rho} - macos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \quad (mgsin\theta + masin\theta - mR\dot{\theta}^2 - R_\rho)\overrightarrow{e_\rho} + (mR\ddot{\theta} + mgcos\theta + macos\theta)\overrightarrow{e_\theta} - R_z\overrightarrow{e_z} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} mgsin\theta + masin\theta - mR\dot{\theta}^2 - R_\rho = 0 \\ mR\ddot{\theta} + mgcos\theta + macos\theta = 0 \\ R_z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{g+a}{R}cos = 0 \\ R_\rho = mgsin\theta + masin\theta - mR\dot{\theta}^2 \\ R_z = 0 \end{cases}$$

⇒ Equation différentielle du second ordre en *t* vérifiée par θ : $\ddot{\theta} + \frac{g+a}{R}cos\theta = 0$

- Les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par la tige.

$$R_\rho = mgsin\theta + masin\theta - mR\dot{\theta}^2 \qquad \text{et} \qquad R_z = 0$$

Réaction $\vec{R}$ exercée sur *M* par la tige : $\vec{R} = (mgsin\theta + masin\theta - mR\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_\rho}$

III- Théorèmes généraux

1- Application du théorème du moment cinétique dans le repère $\mathfrak{R}_1$

1- 1- Expression du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{O_1}}(M/\mathfrak{R}_1)$

$$\overrightarrow{\sigma_{O_1}}(M/\mathfrak{R}_1) = \overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{V}(M/\mathfrak{R}_1) = R\overrightarrow{e_\rho} \wedge mR\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \Longrightarrow \overrightarrow{\sigma_{O_1}}(M/\mathfrak{R}_1) = mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$$

1- 2- Expression des moments des forces dans le repère $\mathfrak{R}_1$

- $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}(\vec{P}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{P} = R\overrightarrow{e_\rho} \wedge (-mgsin\theta\,\overrightarrow{e_\rho} - mgcos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}) = -mgR\,cos\theta\overrightarrow{e_z}$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}(\vec{R}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{R} = R\overrightarrow{e_\rho} \wedge (R_\rho\overrightarrow{e_\rho} + R_z\overrightarrow{e_z}) = -RR_z\overrightarrow{e_\theta}$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}(\overrightarrow{F_{ie}}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \overrightarrow{F_e} = R\overrightarrow{e_\rho} \wedge (-masin\theta\,\overrightarrow{e_\rho} - macos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}) = -maRcos\theta\overrightarrow{e_z}$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}(\overrightarrow{F_{ic}}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \overrightarrow{F_c} = R\overrightarrow{e_\rho} \wedge \vec{0} = \vec{0}$

1- 3- En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\mathfrak{R}_1$, pour retrouver les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur *M* par la tige.

N.B : Pour appliquer le théorème du moment cinétique dans le référentiel $\mathfrak{R}_1$, il est préférable de choisir un point fixe dans $\mathfrak{R}_1$.

Pour un point mobile A dans $\mathfrak{R}_1$, ce théorème, s'écrit :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}(M/\mathfrak{R}_1)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_1} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}\left(\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\overrightarrow{F_{ie}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\overrightarrow{F_{ic}}) + m\vec{V}(M/\mathfrak{R}_1) \wedge \vec{V}(A/\mathfrak{R}_1)$$

$\mathfrak{R}_1$ est non galiléen et O_1 est fixe dans $\mathfrak{R}_1$ ⇒

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O_1}}(M/\mathfrak{R}_1)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_1} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}\left(\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}(\overrightarrow{F_{ie}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}(\overrightarrow{F_{ic}})$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O_1}}(M/\Re_1)}{dt}\right)_{\Re_1} = mR^2\ddot{\theta}\overrightarrow{e_z}$$

$\Rightarrow \quad -mgR\,cos\theta\overrightarrow{e_z} - RR_z\overrightarrow{e_\theta} - maRcos\theta\overrightarrow{e_z} = mR^2\ddot{\theta}\overrightarrow{e_z}$

$\Rightarrow \quad -(mgR\,cos\theta + maRcos\theta)\overrightarrow{e_z} - RR_z\overrightarrow{e_\theta} = mR^2\ddot{\theta}\overrightarrow{e_z}$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} mgR\,cos\theta + maRcos\theta = mR^2\ddot{\theta} \\ R_z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{g+a}{R}cos\theta = 0 \\ R_z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ On retrouve l'équation du mouvement $\ddot{\theta} + \frac{g+a}{R}cos\theta = 0$

2- Application des théorèmes d'énergie cinétique et d'énergie mécanique

2- 1- Montrons que la force $\overrightarrow{F_{ie}}$ est conservative.

$$\overrightarrow{F_{ie}} = -masin\theta\,\overrightarrow{e_\rho} - macos\theta\,\overrightarrow{e_\theta} = -ma\overrightarrow{j_1}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{F_{ie}}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i_1} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \overrightarrow{j_1} & \frac{\partial}{\partial y_1} & -ma \\ \overrightarrow{k_1} & \frac{\partial}{\partial z_1} & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{F_{ie}} \text{ est conservative dans } \Re_1$$

2- 2- Calculons l'énergie potentielle de M par rapport à $\Re_1$, sachant que $E_p(M/\Re_1) = E_p(\vec{P}/\Re_1) + E_p(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1)$

Energie potentielle dérivée par $\overrightarrow{F_{ie}}$ par rapport au repère $\Re_1$:

$$dE_p\left(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1\right) = -\mathrm{dW}\left(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1\right) = -\overrightarrow{F_{ie}}\,d\overrightarrow{O_1M} = ma\overrightarrow{j_1}.(dx_1\overrightarrow{i_1} + dy_1\overrightarrow{j_1} + dz_1\overrightarrow{k_1})$$

$$M \in (x_1\,Oy_1)\ \forall\ \mathrm{t} \Longrightarrow \quad dz_1 = z_1 = 0$$

$$\Longrightarrow dE_p(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1) = mady_1$$

$$E_p(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1) = may_1 + cste$$

$$y_1 = Rsin\theta \qquad \Longrightarrow \quad E_p(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1) = maRsin\theta + cste$$

Energie potentielle dérivée par $\vec{P}$ par rapport au repère $\Re_1$:

$$dE_p\left(\vec{P}/\Re_1\right) = -\mathrm{dW}\left(\vec{P}/\Re_1\right) = -\vec{P}\,d\overrightarrow{O_1M} = mg\,\overrightarrow{j_1}.(dx_1\overrightarrow{i_1} + dy_1\overrightarrow{j_1} + dz_1\overrightarrow{k_1})$$

$$M \in (x_1\,Oy_1)\ \forall\ \mathrm{t} \Longrightarrow \quad dz_1 = z_1 = 0$$

$$\Longrightarrow dE_p((\vec{P}/\Re_1) = mg\,\overrightarrow{j_1}.dy_1\overrightarrow{j_1} = mgdy_1$$

$$\Longrightarrow E_p(\vec{P}/\Re_1) = mgy_1 + cste$$

$$\Longrightarrow \qquad E_p(\vec{P}/\Re_1) = mgRsin\theta + cste$$

Alors l'énergie potentielle de M par rapport à $\Re_1$ est :

$$E_p(M/\Re_1) = maRsin\theta + mgRsin\theta + cste$$

$\forall\ \mathrm{t} = 0\ ,\theta = 0 \qquad E_p(M/\Re_1) = 0 \Longrightarrow \mathrm{cste} = 0$

$$E_p(M/\Re_1) = mRsin\theta(a+g)$$

2- 3- Calculons l'énergie cinétique de *M* par rapport au repère $\Re_1$.

$$E_c(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\left\|\vec{V}(M/\Re_1)\right\|^2$$

$$\Longrightarrow \quad E_c(M/\Re_1) = \frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2$$

2- 4- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re_1$, pour retrouver l'équation différentielle du second ordre en t vérifiée par θ.

$\Re_1$ est non galiléen $\Rightarrow dE_c(M/\Re_1) = dW(\sum\overrightarrow{F_{ext}}) + dW(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1)$

$dW(\overrightarrow{F_{ic}}/\Re_1) = 0$ (Voir le cours)

$$\sum\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{R} \qquad \text{où} \qquad \vec{R} = R_\theta\overrightarrow{e_\theta} + R_z\overrightarrow{e_z}$$

$$\Longrightarrow \quad dE_c(M/\Re_1) = dW(\vec{P}/\Re_1) + dW(\vec{R}/\Re_1) + dW(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1)$$

$$\Rightarrow \ \frac{dE_c(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} = \frac{dW(\vec{P}\,/\mathfrak{R}_1)}{dt} + \frac{dW(\vec{R}/\mathfrak{R}_1\,)}{dt} + \frac{dW(\overrightarrow{F_{ie}}/\mathfrak{R}_1)}{dt}$$

$\Rightarrow \ \frac{dE_c(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} = P(\vec{P}/\mathfrak{R}_1) + P(\vec{R}/\mathfrak{R}_1) + P(\overrightarrow{F_{ie}}/\mathfrak{R}_1)$ (P : puissance)

$$\frac{dE_c(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$P\big(\vec{P}/\mathfrak{R}_1\big) = \ \vec{P}.\vec{V}(M/\mathfrak{R}_1) = \big(-mgsin\theta\,\overrightarrow{e_\rho} - mgcos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\big).R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho} \ = -mg\dot{\theta}cos\theta$$

$$P(M/\mathfrak{R}_1) = \ \vec{P}.\vec{V}(M/\mathfrak{R}_1) = (R_\theta\overrightarrow{e_\theta} + \ R_z\overrightarrow{e_z}).R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho} \ = 0$$

$$P\big(\vec{R}/\mathfrak{R}_1\big) = \overrightarrow{F_{ie}}.\vec{V}(M/\mathfrak{R}_1) = \big(-masin\theta\,\overrightarrow{e_\rho} - macos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\big).R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho} \ = -macos\theta R\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgcos\theta - macos\theta.R\dot{\theta} \Rightarrow \ R\ddot{\theta} + mgcos\theta + acos\theta = 0$$

⇒ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} + \frac{g+a}{R}cos\theta = 0$

2- 5- En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\mathfrak{R}_1$, pour retrouver l'équation différentielle du second ordre en *t* vérifiée par θ.

<u>Rappel</u> : $\overrightarrow{F_{nc}}$: Les forces non conservatives
Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel non galiléen $\mathfrak{R}_1$
$dE_m(M/\mathfrak{R}_1) = dW(\overrightarrow{F_{nc}}/\mathfrak{R}_1) \ + \ dW(\overrightarrow{F_{ie}}/\mathfrak{R}_1)$ si $\overrightarrow{F_{ie}}$ est non conservative
Si $\overrightarrow{F_{ie}}$ est conservative, ce théorème s'écrit : $dE_m(M/\mathfrak{R}_1) = dW(\overrightarrow{F_{nc}}/\mathfrak{R}_1)$
En tenant compte de l'énergie potentielle dérivée par $\overrightarrow{F_{ie}}$ dans le référentiel $\mathfrak{R}_1$.

$\mathfrak{R}_1$ est non Galiléen ⇒ $dE_m(M/\mathfrak{R}_1) = dW(\overrightarrow{F_{nc}}/\mathfrak{R}_1)$ en tenant compte de l'énergie potentielle dérivée par $\overrightarrow{F_{ie}}$ dans le référentiel $\mathfrak{R}_1$ ($\overrightarrow{F_{ie}}$ est conservative dans $\mathfrak{R}_1$).

$$\frac{dE_m(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} = \frac{dW(\overrightarrow{F_{nc}}\,/\mathfrak{R}_1)}{dt} = P(\overrightarrow{F_{nc}}\,/\mathfrak{R}_1)$$

$$E_m(M/\mathfrak{R}_1) \ = E_c(M/\mathfrak{R}_1) + E_p(M/\mathfrak{R}_1) = \frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2 + mRsin\theta(a+g)$$

$$\frac{dE_m(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mR\dot{\theta}sin\theta(a+g)$$

$$\overrightarrow{F_{nc}} = \vec{R} \ \ \Rightarrow \ P(\overrightarrow{F_{nc}}\,/\mathfrak{R}_1) \ = P(\vec{R}\,/\mathfrak{R}_1) \ = \vec{R}.\vec{V}(M/\mathfrak{R}_1)) = (R_\theta\overrightarrow{e_\theta} + \ R_z\overrightarrow{e_z}).R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho} \ = 0$$

$$\Rightarrow \ R\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgcos\theta + acos\theta = 0 \Rightarrow \ R\ddot{\theta} + mgcos\theta + acos\theta = 0$$

⇒ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} + \frac{g+a}{R}cos\theta = 0$