Problèmes sur l'oscillateur harmonique

I_{46}.

Un corps de masse m glisse sur une table horizontale. Il est attaché par un ressort de raideur k à un point fixe situé à sa hauteur. On suppose que le ressort et le mouvement du corps restent parallèles à une direction fixe.

On suppose d'abord qu'il n'y a pas de frottement.

1.a) Ecrire l'équation différentielle du second ordre régissant l'allongement x du ressort fonction du temps t.

1.b) Exprimer, en le démontrant, l'énergie potentielle du corps.

1.c) Ecrire la conservation de l'énergie ; en dérivant par rapport au temps l'équation obtenue, retrouver l'équation de 1.a).

1.d) On pose $\omega = \sqrt{k/m}$. A l'instant 0, l'allongement est x_0 et la vitesse v_0. Exprimer x(t).

1.e) Exprimer en fonction de l'énergie totale E les valeurs moyennes au cours du temps des énergies cinétique et potentielle.

On suppose à présent qu'il y a frottement sur la table ; ce frottement obéit à la loi de Coulomb du frottement solide : l'action de contact entre deux corps a deux composantes N normale à la surface de contact et T tangente à la surface de contact ; T s'oppose au glissement ; s'il y a glissement, T = fN et s'il n'y a pas glissement, T < fN, où f est un coefficient qui ne dépend que des substances dont sont faites les surfaces des corps et de leur état de surface, plus ou moins rugueux ou lisse. On pose $\omega = \sqrt{k/m}$ et α = fmg/k où f est le coefficient de frottement du corps et de la table et g la pesanteur et on utilisera ces notations pour alléger les expressions demandées.

2.a) Quelle est la dimension de α ?

2.b) Montrer que lorsque le corps a une vitesse nulle, il est en équilibre ou non selon que |x| est inférieur ou supérieur à α

2.c) On lâche le corps sans vitesse initiale alors que l'allongement est $x_0 > \alpha$. Ecrire l'équation différentielle du mouvement jusqu'au premier arrêt.

2.d) Exprimer x(t) jusqu'à cet arrêt.

2.e) Quelle est la durée de cette phase du mouvement ?

2.f) Quel est l'allongement x_1 à cet arrêt ?

2.g) A quelle condition y a-t-il arrêt définitif en x_1 ?

On suppose cette condition non vérifiée. Le mobile repart, puis s'arrête à nouveau à l'abscisse x_2. Il peut y rester ou en repartir. On considère la suite (x_0, x_1, ... ,x_N) des valeurs de l'allongement du ressort à chaque arrêt, x_N étant le dernier, pour lequel le mobile s'immobilise, ainsi que la suite $u_i = (-1)^i x_i$.

3.a) Que pensez-vous, sans démonstration, des signes des termes de l'une de ces deux suites autres que le dernier terme ? et du signe du dernier terme de la suite ?

3.b) Trouver une relation de récurrence déterminant la suite x_i ou la suite u_i, Cette relation est-elle vérifiée par le dernier terme de la suite ? On peut reprendre le raisonnement de la partie 2), mais la solution la plus simple utilise le théorème de l'énergie cinétique.

3.c) En déduire N en fonction de la partie entière d'une expression.

3.d) Dessiner schématiquement le graphique de x(t) si $x_0 = 4{,}5.\alpha$.

II_{26}.

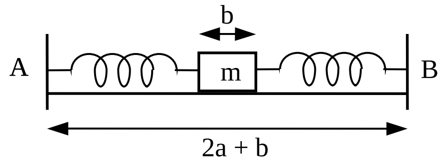
1) Définir la notion de champ.

2) Définir la notion d'énergie potentielle.

3) Définir la notion de gradient.

4) Un corps, attaché par un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ à un point fixe O, se meut dans l'espace à trois dimensions. Montrer que la tension du ressort dérive de l'énergie potentielle $\frac{1}{2}kx^2$, où x est l'allongement du ressort.

5) Un corps de masse m glisse sans frottement sur une table horizontale. Il est attaché par deux ressorts identiques de longueur naturelle ℓ et de raideur k à deux points fixes A et B situés dans le plan de la table, conformément à la figure, avec la condition $a > \ell$. Quelle est la position du corps à l'équilibre ?



6) On prend cette position comme origine et on repère la position du corps par sa coordonnée x dans la direction AB et y dans la direction perpendiculaire. Déterminer la pulsation des oscillations longitudinales selon l'axe des x .

7) Déterminer la pulsation des petites oscillations transversales de ce corps selon l'axe des y .

8) Montrer que la force totale subie par le corps dérive d'une énergie potentielle qu'on n'explicitera pas en fonction de x, y, k, a, ℓ .

9) Le développement de cette énergie potentielle au voisinage de l'origine est à priori de la forme

$E_p = b + cx + dy + ex^2 + fxy + gy^2 + \ldots$

On néglige les termes d'ordre supérieur. En donnant des arguments précis utilisant par exemple la symétrie de la figure, montrer que $c = 0$, $d = 0$, $f = 0$.

10) Déterminer e et g. Le plus simple est d'utiliser les études des oscillations longitudinales et transversales qui ont déjà été faites.

11) En déduire l'expression de la force totale subie par le mobile au voisinage de l'origine à l'approximation linéaire.

12) En déduire les équations différentielles régissant les petites oscillations du corps.

13) En déduire la loi horaire de petites oscillations du corps au voisinage de l'origine.

14) A quelle condition la trajectoire se referme-t-elle après deux oscillations dans le sens des x et une oscillation dans le sens des y ?

III.

A77.

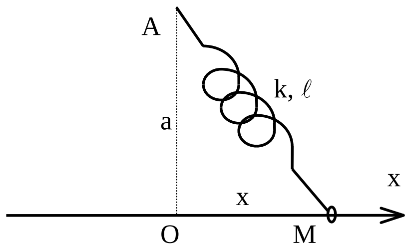
1) Exprimer, sans démonstration, un déplacement élémentaire quelconque d'un mobile de coordonnées polaires r, θ (élémentaire signifie linéaire par rapport à des différentielles) sur la base formée par le vecteur unitaire radial $\vec{u}_r$ et le vecteur unitaire orthoradial $\vec{u}_\theta$.

2) Un mobile est soumis à une force radiale $\vec{F} = F(r).\vec{u}_r$ dont la grandeur ne dépend que de la coordonnée r. Montrer qu'il existe une énergie potentielle associée à cette force que l'on peut exprimer à l'aide de la primitive de $F(r)$.

3) Un mobile dans l'espace à deux dimensions est attaché à un point fixe O par un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur naturelle ℓ. Montrer qu'il existe une énergie potentielle associée à la tension du ressort et exprimer cette énergie potentielle en fonction de la distance $r = OM$.

B37.

Un anneau M de masse m coulisse sans frottement sur un axe horizontal Ox. Il est lié à un point fixe A par un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur naturelle ℓ. OA est perpendiculaire à Ox et de longueur a. La position du point M est repérée par son abscisse x sur l'axe Ox.



1) Quelle est la pulsation ω_0 des oscillations si $a = 0$?

2) On suppose dorénavant $a \neq 0$. Montrer qu'il existe une énergie potentielle E_p associée à la force totale subie par M et exprimer cette énergie potentielle.

3) Montrer que la force subie par le mobile est $F = -kx\left(1 - \dfrac{\ell}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$.

On pourra utiliser par la suite : $\dfrac{dF}{dx} = -k\left[1 - \dfrac{a^2\ell}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}\right]$.

4) Discuter le nombre des positions d'équilibre et leur stabilité et exprimer leurs abscisses x_{eq} si $a \neq \ell$.

5) Tracer schématiquement le graphe de x_{eq} / ℓ pour les positions d'équilibre stable en fonction de a / ℓ.

Exprimer en fonction de ω_0 et de a / ℓ la pulsation ω des petites oscillations près d'une position d'équilibre stable :

6) si $a > \ell$;

7) si $a < \ell$. On pourra considérer $\dfrac{dF}{dx}(x = x_{eq})$.

8) Tracer schématiquement le graphe de ω / ω_0 en fonction de a / ℓ.

9) M étant dans une position d'équilibre stable, on lui applique une petite force δF. La position d'équilibre se déplace de δx_{eq}. On appelle susceptibilité le rapport $\chi = \dfrac{\delta x_{eq}}{\delta F}$. Montrer que $\chi = \dfrac{1}{m\omega^2}$.

10) Tracer schématiquement le graphe de $k\chi$ en fonction de a / ℓ.

11) Pour mesurer des forces, on peut utiliser un dispositif semblable fonctionnant au voisinage de $a = \ell$. Quel est l'intérêt de le régler au voisinage de $a = \ell$?

C28.

On s'intéresse dorénavant aux petites oscillations dans le cas $a = \ell$.

1) Quelle est alors la position d'équilibre stable ?

2) En utilisant le développement de $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$ jusque cet ordre, trouver une expression approximative simple de la force quand x est petit. En déduire une expression approximative de l'énergie potentielle.

3) En utilisant cette expression, exprimer la conservation de l'énergie si l'amplitude des oscillations est x_m.

4) En déduire une équation différentielle du premier ordre à variables séparables reliant le temps t et l'abscisse x.

5) Exprimer la période des petites oscillations. On donne $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1{,}31$.

6) Application numérique : $m = 10\,\mathrm{kg}$; $k = 490\,\mathrm{N/m}$; $a = \ell = 15\,\mathrm{cm}$;

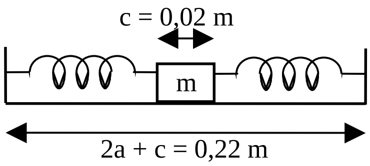
a) $x_m = 1\,\mathrm{cm}$;

b) $x_m = 2\,\mathrm{cm}$.

7) En quoi cette période se comporte-t-elle différemment de celle d'un oscillateur harmonique ?

IV_{45}. Oscillateur.

On prend g = 10 m.s^{-2}.



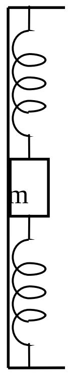
Le système ci-contre comporte deux ressorts semblables, de raideur k = 500 N/m et de longueur naturelle b = 0,08 m, attachés à un corps mobile de masse m = 0,1 kg et à deux points fixes. Le corps glisse sans frottement sur un plan horizontal et son mouvement est guidé, de sorte que le corps se meut parallèlement aux ressorte.

1) Quelles sont les tensions des ressorts à l'équilibre ?

2) Soit x le déplacement vers la droite du corps à partir de cette position. Dans la suite de ce problème, on comptera positivement vers la droite (ou vers le bas) les grandeurs algébriques. Montrer que la force F subie par le corps est de la forme F = –k'x et exprimer k'.

3) A partir de la position d'équilibre, on donne à l'instant 0 une pichenette au corps, de sorte qu'il part vers la droite à la vitesse v_0 = 3 m/s. Exprimer littéralement et numériquement x en fonction du temps t et des autres données.

4) Au bout de combien de temps le corps revient-il à sa position de départ ? Quelle est alors sa vitesse ?



5) Le système précédent étant à l'équilibre, on le bloque, on le bascule à la verticale et on le libère. Quel serait alors la position d'équilibre du corps ?

6) Comme le corps n'est pas lorsqu'on le débloque dans un état d'équilibre, il se met en mouvement. Exprimer la force qu'il subit et l'énergie potentielle associée en fonction de son abscisse X par rapport à sa position d'équilibre.

7) Quelle est l'équation différentielle du mouvement ?

8) Quelle est sa période ?

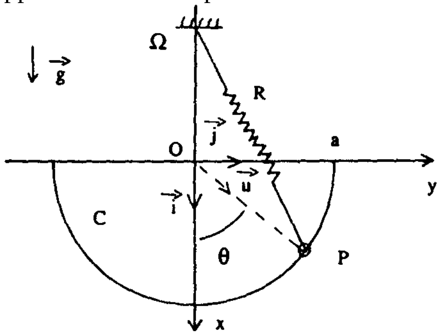
9) Quelles sont ses positions extrêmes ?

10) A partir du point le plus bas atteint par le corps, un opérateur exerce sur le corps une force F_{op} telle qu'au bout d'un certain temps le corps est immobile à sa position d'équilibre. Proposer un exemple simple de loi gouvernant F_{op}.

11) Calculer le travail W_{op} de cette force.

12) Que se passe-t-il si la force exercée par l'opérateur a un travail égal à l'opposé de la valeur précédente ?

V. Étude d'un système masse-ressort.



On se place dans le repère ($\mathcal{R}$) (O x y z) orthonormé, direct, galiléen, de vecteurs unitaires de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Le système envisagé est constitué d'un ressort R, d'un demi cercle C et d'une perle P. Le ressort R est partait, c'est-à-dire de masse négligeable et développant selon sa propre direction une force proportionnelle à son élongation. On note K ce coefficient de proportionnalité et ℓ la longueur à vide de R. Le demi cercle (fixe dans ($\mathcal{R}$)) C, de rayon a, de centre O, est contenu dans le demi plan xOy, x ≥ 0, supposé vertical, Ox étant la verticale descendante. On assimile la perle P à un point matériel de masse m astreint à se déplacer sans frottement sur C. Le ressort R a une extrémité liée à P et l'autre à un point Ω situé aux cotes x = – a, y = 0, z = 0 de ($\mathcal{R}$).

La position de P dans ($\mathcal{R}$) est repérée par l'angle $\theta = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OP}\right)$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OP}$, $\vec{v}$ le vecteur unitaire déduit de $\vec{u}$ par la rotation de $+\pi/2$ autour de $\vec{k}$. Le système est placé dans le champ de pesanteur d'accélération $\vec{g} = g\vec{i}$ de module g constant.

A_{77}. Introduction.

1. Exprimer la longueur PΩ en fonction de a et θ .
2. Exprimer la tension T du ressort en fonction de a, K, ℓ et θ .
3. Donner l'expression de la vitesse V de P dans ($\mathcal{R}$) en fonction de a et $\dot{\theta}$.
4. Quelles sont les forces appliquées au mobile ? Montrer qu'il existe une énergie potentielle associée à la force totale et exprimer cette énergie potentielle E_p .
5. En déduire, lorsque le mouvement de P a lieu, son équation différentielle en fonction de $a, g, K, \ell, m, \theta, \ddot{\theta}$.

B_{19}. *Etude des positions d'équilibres.*

6. Déterminer l'expression des positions d'équilibre $\theta = \theta_i$ envisageables pour le système.

7. On veut imposer l'existence d'une position d'équilibre pour une valeur $\theta_1 \neq 0$ de θ comprise entre 0 et $\pi/2$ (ce qui implique par symétrie une position équivalente $-\theta_1$ entre 0 et $-\pi/2$). Écrire les inégalités que cela implique sur le poids mg . Donner une interprétation physique de ces conditions.

8. Ces conditions étant réalisées, étudier la stabilité des équilibres ainsi obtenus.

C_5. *Étude d'un cas particulier.*

On se donne ici les relations entre paramètres suivants : $K = 2mg/a$ et $\ell = \sqrt{3}a/2$

9. Vérifier que les conditions établies à la question 7 sont réalisées. Expliciter les positions d'équilibre. Sont-elles stables ?

10. Pour étudier les petits mouvements autour de la position d'équilibre θ_1 , on pose $\theta = \theta_1 + \varepsilon$. Établir l'équation différentielle linéaire en ε de ces petits mouvements. On posera $\omega^2 = K/m$, où ω est la pulsation naturelle intrinsèque du système masse-ressort libre.

11. Peut-on utiliser le résultat précédent pour les conditions initiales $\varepsilon(0) = 0$, $\dfrac{d\varepsilon}{dt}(0) = \dot{\varepsilon}_0 = \sqrt{\dfrac{Ka - mg}{2ma}}$? Décrire qualitativement le mouvement.

12. Soient les valeurs numériques : g = 9,81 rn.s^{-2}, K = 10^3 N.m^{-1}, m = 1 kg. Calculer la constante K' du ressort donnant la même pulsation naturelle en régime de vibrations libres que celle obtenue à la question 10. Interpréter physiquement.

13. Calculer la longueur L du pendule simple synchrone équivalent. Interpréter le rôle de a.

D_{14}. *Approche complémentaire.*

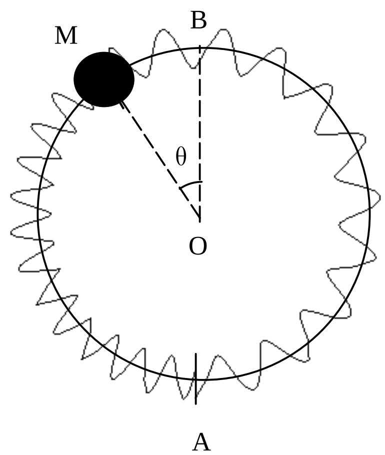
14. Donner, dans le repère ($\mathcal{R}$) l'expression du moment cinétique σ_0 de la masse m par rapport à 0 en fonction de a, m et $\dot{\theta}$.

15. Donner en fonction de F_θ , composante orthoradiale de la force totale, l'expression du produit vectoriel $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$.

16. En déduire, par application du théorème du moment cinétique, l'expression de l'équation différentielle du mouvement de P.

VI_{15}.

Un cercle de centre O et de rayon R est situé dans un plan vertical. Soit A son point le plus bas, B son point le plus haut. Une bille pesante M de masse m assimilable à un point matériel coulisse sans frottement sur ce cercle. On repère sa position par l'angle $\theta = (\mathrm{OB}, \mathrm{OM})$ que OM fait avec la verticale. La bille est reliée au point A par deux ressorts courbes semblables qui exercent sur M des forces tangentes au cercle et d'intensités égales au produit d'une constante, leur raideur k , par leur allongement, qui est la différence entre la longueur de l'arc de cercle AM et la longueur naturelle commune L de ces ressorts.



1) On appelle sinus cardinal la fonction $y = \operatorname{sinc}(x)$ définie par $\operatorname{sinc} x = \dfrac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $\operatorname{sinc}(0) = 1$. Montrer que cette fonction est décroissante pour $0 \leq x \leq \pi$. Tracer son graphique pour $-\pi \leq x \leq \pi$.

2) Exprimer la composante orthoradiale f de la force totale qui agit sur la bille.

3.a) Montrer que B est une position d'équilibre.

Discuter sa stabilité :

3.b) si $2kR > mg$;

3.c) si $2kR < mg$;

3.d) si $2kR = mg$.

4) Exprimer la pulsation des petites oscillations au voisinage de B.

5) Discuter l'existence d'autres positions d'équilibre. On notera θ_0 la racine, si elle existe, de $\operatorname{sinc}\theta_0 = \dfrac{2kR}{mg}$.

6) Discuter la stabilité de ces positions d'équilibre.

7) Exprimer la période des petites oscillations au voisinage de ces positions d'équilibre.

8) On étudie les petites oscillations si $2kR = mg$.

8.a) Montrer que $f \simeq -\dfrac{mg\theta^3}{6}$ en utilisant $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6} + \dots$.

8.b) Exprimer approximativement l'énergie potentielle associée à f .

8.c) En déduire une expression de la vitesse angulaire en fonction de θ et de son amplitude θ_m.

8.d) Exprimer la période en fonction de θ_m et de l'intégrale non exprimable à l'aide des fonctions élémentaires $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \simeq 1,311029$.

9) Appliquons à M une petite force supplémentaire F indépendante du temps et tangente au cercle ; soit $\Delta\theta$ le petit déplacement de la position d'équilibre stable que F provoque. On appelle susceptibilité la quantité $\chi = \frac{\Delta\theta}{F}$.

9.a) Montrer que $\chi = -\frac{1}{\frac{df}{d\theta}(\theta_{équilibre})}$.

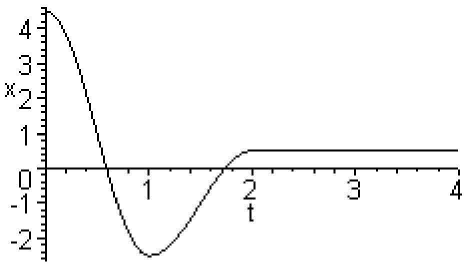
Exprimer χ en fonction de k, R, m, g, θ_0 :

9.b) si $2kR > mg$;

9.c) si $2kR < mg$.

9.d) Si on se sert de ce système pour mesurer les variations de la pesanteur, quel est l'intérêt de choisir mg voisin de $2kR$? Une mesure est-elle rapide ?

Réponses



I. 1.a) $m\ddot{x} = -kx$; 1.b) $E_p = \frac{1}{2}kx^2$; 1.d) $x = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$; 1.e) $\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle = \frac{E}{2}$;

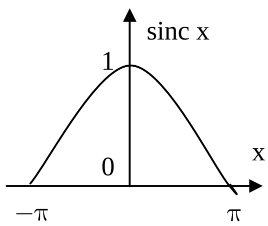
2.a) longueur ; 2. c) $m\ddot{x} + kx = fmg$; 2.d) $x = \alpha + (x_0 - \alpha)\cos\omega t$; 2.e) π / ω ; 2.f) $x_1 = 2\alpha - x_0$; 2.g) $\alpha < x_0 \leq 3\alpha$; 3.a) x_i est une suite alternée et $u_i = (-1)^i x_i$ est une suite de signe constant, sauf pour leur dernier terme, de signe indéterminé ; 3.b) $u_{i+1} - u_i = -2\alpha$ valable jusqu'au dernier terme ; 3.c) N est la partie entière de $\frac{x_0 + \alpha}{2\alpha}$.

II. 1) Un champ est une fonction de la position d'un point ; 2) L'énergie potentielle associée à une loi de force est la fonction de la position, si elle existe, dont la variation est égale à l'opposé du travail de la force ; 3) Si f est un champ scalaire, fonction des coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point, $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$; 5) le milieu de AB ; 6) $\omega_x = \sqrt{\frac{2k}{m}}$; 7) $\omega_y = \sqrt{\frac{2k}{m}(1 - \ell / a)}$; 10) $e = k$; $g = k(1 - \ell / a)$; 11) $T_x = -2kx$; $T_y = -2k(1 - \ell / a)y$; 12) $m\ddot{x} = -2kx \quad m\ddot{y} = -2k(1 - \ell / a)y$; 13) $x = x_m \cos(\omega_x t + \varphi_x)$; $y = y_m \cos(\omega_y t + \varphi_y)$; 14) $\omega_x = 2\omega_y \Rightarrow \ell = \frac{3a}{4}$.

III.

IV.

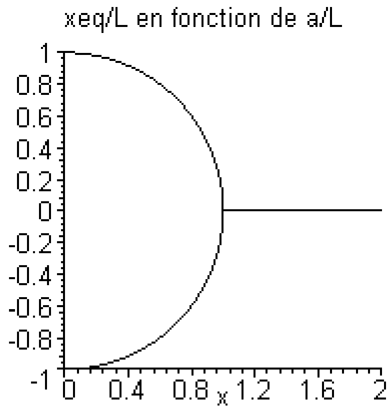
V.



VI. 2) $f(\theta) = mg\sin\theta - 2kR\theta$; 3.b) stable ; 3.c) instable ; 3.d) stable ; 4) $\omega = \sqrt{\frac{2kR - mg}{mR}}$; 5) si $2kR < mg$, deux autres positions d'équilibre, $\theta = \theta_0$ et $\theta = -\theta_0$; 6) stables ; 7) $T = \frac{8}{\theta_m}\sqrt{\frac{3R}{g}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 9.b) $\chi = \frac{1}{2kR - mg}$; 9.c) $\chi = \frac{1}{2kR - mg\cos\theta_0}$; 9.d) système très sensible ; une mesure prend beaucoup de temps.

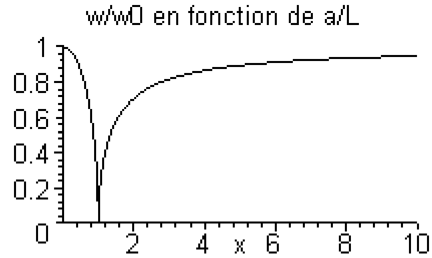
III.

A. 1) $\overrightarrow{dr} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta$; 3) $E_p = \frac{1}{2}k(r-\ell)^2$.



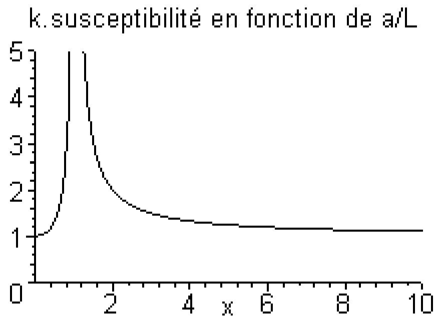
B. 1) $m\ddot{x} = -k(x-\ell)$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; 2) $E_p = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2+x^2}-\ell\right)^2$;

4) si $a < \ell$, il y a trois positions d'équilibre, $x = 0$ instable, et $x = \pm\sqrt{\ell^2 - a^2}$ stables ; si $a > \ell$, il y a une position d'équilibre, $x = 0$ stable ; 5) voir ci-contre ; 6) $\omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{\ell}{a}}$; 7)



$\omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{a^2}{\ell^2}}$; 8) voir ci-contre ; 10) voir à droite le graphe de $k\chi$ en fonction de a/ℓ ; 11) mesurer de faibles variations de force.

D.1) $x = 0$; 2) $F \simeq -\dfrac{kx^3}{2\ell^2}$ $\quad E_p =$



; 3) $E = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{kx^4}{8\ell^2} = \dfrac{kx_m^4}{8\ell^2}$; 4) $\dfrac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\dfrac{k\left(x_m^4 - x^4\right)}{4m\ell^2}}$; 5) $T = 10{,}5\dfrac{\ell}{x_m}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; 6.a) $T = 22{,}5\,\mathrm{s}$; 6.b) $T = 11{,}2\,\mathrm{s}$; 7) période inversement proportionnelle à l'amplitude.

IV. 1) $k(a-b) = 10\,\mathrm{N}$; 2) $k' = 2k$; 3) $x = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t = 0{,}03\sin 100t$ (x en mètre, t en seconde) ; 4) $t = \dfrac{\pi}{\omega} = 0{,}0314\,\mathrm{s}$; $\dot{x} = -v_0$; 5) $x = mg/k' = 0{,}001\,\mathrm{mm}$; 6) $F = -k'X$ $\quad E_p = \frac{1}{2}k'X^2$; 7) $m\ddot{X} = -k'X$; 8) $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0{,}0628\,\mathrm{s}$; 9) $X = \pm\dfrac{mg}{k'} = \pm 0{,}001\,\mathrm{m}$; 10) $F_{op} = f\dot{x}$ où $f < 0$; 11) $W_{op} = -\dfrac{m^2g^2}{2k'} = -0{,}0005\,\mathrm{J}$; 12) amplitude des oscillations multipliée par $\sqrt{2}$.

V. 1) $P\Omega = 2a\cos\dfrac{\theta}{2}$; 2) $T = K\left(2a\cos\dfrac{\theta}{2} - \ell\right)$; 3) $V = a\dot{\theta}$; 4) le poids, la tension du ressort et la réaction du demi cercle ; $E_p = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}K(2a\cos(\theta/2) - \ell)^2$; 5) $ma\ddot{\theta} = \left(2(Ka - mg)\cos\dfrac{\theta}{2} - K\ell\right)\sin\dfrac{\theta}{2}$; 6) $\theta = 0$ ou $\theta = \pm\theta_1$, où $\theta_1 = 2\arccos\dfrac{K\ell}{2(Ka-mg)}$; 7) $K\left(a - \dfrac{\ell}{\sqrt{2}}\right) \le mg < K\left(a - \dfrac{\ell}{2}\right)$; 8) θ = 0 est stable si $mg \le K\left(a - \dfrac{\ell}{2}\right)$ et instable dans le cas contraire ; si θ_1 existe, $\theta = \pm\,\theta_1$ sont des positions d'équilibre stable ; 9) θ = 0, instable, et $\theta = \pm\pi/3$, stables ; 10) $a\ddot{\varepsilon} = -\dfrac{g}{4}\varepsilon$ qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation Ω telle que $\Omega^2 = \dfrac{g}{4a} = \dfrac{K}{8m}$; 11) la perle a un mouvement approximativement uniforme $\varepsilon \approx \dot{\varepsilon}_0 t$ jusqu'à ce qu'elle parvienne à l'extrémité du demi cercle ; 12) $K' = 125\,\mathrm{N/m}$; 13) $L = 4a = 7{,}8\,\mathrm{cm}$; 14) $\vec{L}_O = ma^2\dot{\theta}\vec{k}$; 15) $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = aF_0\vec{k}$.

Corrigés

I.

1.a) La loi fondamentale de la dynamique projetée sur la direction du mouvement donne $m\ddot{x} = -kx$.

1.b) E_p est la fonction de x , si elle existe, telle que $dE_p = -Fdx = kxdx \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2$.

1.c) Comme il existe une énergie potentielle associée à la force totale, l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ est une constante du mouvement. Par conséquent, $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$. Or $\dot{x} = 0 \quad x = cste$ vérifie la conservation de l'énergie, mais, en général, pas la loi fondamentale de la dynamique, car, si la force est non nulle, le mobile ne reste pas immobile ; donc $m\ddot{x} + kx = 0$.

1.d) La solution de l'équation différentielle est $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad \dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$.

Les conditions initiales s'écrivent $x_0 = A \quad v_0 = B\omega$.

La solution du problème est donc : $x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$.

1.e) $\langle E_c \rangle = \frac{m}{2}\left\langle(-x_0\omega\sin\omega t + v_0\cos\omega t)^2\right\rangle = \frac{m}{2}\left(x_0^2\omega^2\left\langle\sin^2\omega t\right\rangle + v_0^2\left\langle\cos^2\omega t\right\rangle + 2x_0\omega v_0\langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle\right)$.

Or $\left\langle\sin^2\omega t\right\rangle = \left\langle\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right\rangle = \frac{1}{2} \quad \left\langle\cos^2\omega t\right\rangle = \left\langle\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\right\rangle = \frac{1}{2} \quad \langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle = \left\langle\frac{\sin 2\omega t}{2}\right\rangle = 0$.

D'où $\langle E_c \rangle = \frac{m}{4}\left(x_0^2\omega^2 + v_0^2\right) = \frac{kx_0^2 + mv_0^2}{4} \Rightarrow \langle E_c \rangle = \frac{E}{2}$.

Comme $E = E_c + E_p$, $\left\langle E_p \right\rangle = \frac{E}{2}$.

2.a) f est sans dimension, mg a la dimension d'une force et k a la dimension du rapport d'une force à une longueur ; donc α a la dimension d'une longueur.

2.b) Le corps, soumis à son poids $m\vec{g}$, à la réaction de la table $\vec{N} + \vec{T}$ et à la tension du ressort $\vec{F}$, est en équilibre si sa vitesse est nulle et si $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$, soit $N = mg$ et $T = |F| = k|x| < fmg \Rightarrow |x| \le \alpha$.

2.c) $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}$, soit en projetant sur la verticale $mg = N$ et en projetant sur la direction du mouvement $m\ddot{x} = -kx + T$. Comme $x_0 > 0$, le mobile se met en mouvement dans le sens négatif ; le frottement freinant le mouvement, $T > 0$, donc $T = fmg$, d'où $m\ddot{x} + kx = fmg$

2.d) La solution générale de l'équation sans second membre est $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$.
Une solution particulière est $x = \alpha$.
La solution générale est donc $x = \alpha + A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad \dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$.

Les conditions initiales donnent $x_0 = \alpha + A \quad 0 = B\omega$.

La solution du problème est donc $x = \alpha + (x_0 - \alpha)\cos\omega t \quad \dot{x} = -\omega(x_0 - \alpha)\sin\omega t$.

2.e) Le mobile s'arrête au premier instant où sa vitesse s'annule, soit à $t = \pi/\omega$. La durée de cette phase du mouvement est π/ω .

2.f) Alors $x = x_1 = 2\alpha - x_0$

2.g) Il y a arrêt définitif si $|2\alpha - x_0| < \alpha \Leftrightarrow \alpha < x_0 \le 3\alpha$.

3.a) Si on ne considère pas leur dernier terme, la suite x_i est une suite alternée et la suite $u_i = (-1)^i x_i$ est une suite de signe constant, celui de x_0 ; toutefois, le dernier terme de ces deux suites n'a qu'une chance sur deux d'obéir à cette règle.

3.b) Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les arrêts de rang i et $i+1$; la force totale est la somme d'une force conservative, la tension du ressort, à laquelle est associée une énergie potentielle E_p , et d'une force non conservative, le frottement, dont le travail, toujours négatif, satisfait à $W = \Delta\left(E_c + E_p\right)$:

$$-fmg|x_{i+1} - x_i| = \frac{1}{2}kx_{i+1}^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

$$-fmg(u_{i+1} + u_i) = \frac{1}{2}k\left(u_{i+1}^2 - u_i^2\right)$$

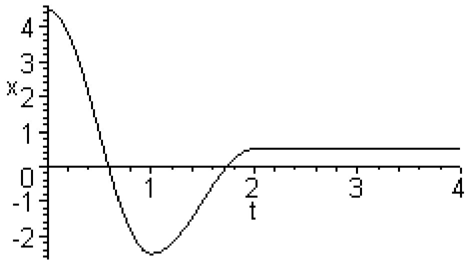
$$u_{i+1} - u_i = -2\alpha$$

$$u_i = x_0 - 2\alpha i \Leftrightarrow x_i = (-1)^i(x_0 - 2\alpha i)$$

Cette relation est valable jusqu'au dernier terme de la suite.

Remarque : si $x_0 < 0$, $u_i = x_0 + 2\alpha i$.

3.c) Il y a arrêt définitif à l'arrêt de rang N si $-\alpha < x_0 - 2\alpha N < \alpha \Leftrightarrow \dfrac{x_0 - \alpha}{2\alpha} < N < \dfrac{x_0 + \alpha}{2\alpha}$, donc N est la partie entière de $\dfrac{x_0 + \alpha}{2\alpha}$.



Remarques

- Si $\dfrac{x_0 + \alpha}{2\alpha}$ est entier, il y a arrêt à $N = \dfrac{x_0 - \alpha}{2\alpha}$, alors que la partie entière est $\dfrac{x_0 + \alpha}{2\alpha}$. Ce cas est académique, car x_0 variant continûment, la probabilité de cette circonstance est nulle.
- Si le signe de x_0 est inconnu, N est la partie entière de $\dfrac{|x_0| + \alpha}{2\alpha}$.

3.d) Si $x_0 = 4{,}5\alpha$, $N = 2$, $u_1 = 2{,}5\alpha$ $\quad x_1 = -2{,}5\alpha$ $\quad u_2 = x_2 = 0{,}5\alpha$. D'où le graphe ci-dessus.

Mais si $x_0 = 3{,}5\alpha$, $N = 2$, $u_1 = 1{,}5\alpha$ $\quad x_1 = -1{,}5\alpha$ $\quad u_2 = x_2 = -0{,}5\alpha$. On voit que le signe du dernier terme de chacune des suites x_i, u_i n'est pas déterminé par la règle énoncée en 3.a.

II.

1) Un champ est une fonction de la position d'un point.

2) L'énergie potentielle associée à une loi de force est la fonction de la position, si elle existe, dont la variation est égale à l'opposé du travail de la force.

3) Si f est un champ scalaire, fonction des coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point, $\overrightarrow{\text{grad}} f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$. On peut aussi définir le gradient de f comme le champ vectoriel tel que $\forall d\vec{r}$, $\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{r} = df$

4) $dE_p = -\vec{T} \cdot \overrightarrow{dr} = kx\vec{u}_r \cdot \overrightarrow{dr} = kxdr = kxd(\ell + x) = kxdx \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2$. Réciproquement $\vec{T} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$.

5) A l'équilibre, le corps est au milieu de AB.

6) $m\ddot{x} = -k(a + x - \ell) + k(a - x - \ell) = -2kx \Rightarrow \omega_x = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

7) $m\ddot{y} = -2T\sin\theta = -2k(\sqrt{a^2 + y^2} - \ell)\dfrac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \approx -2ky(1 - \ell/a) \Rightarrow \omega_y = \sqrt{\dfrac{2k}{m}(1 - \ell/a)}$

8) La force totale est la somme des deux tensions des ressorts qui dérivent toutes deux d'une énergie potentielle. Donc la force totale dérive d'une énergie potentielle qui est la somme des énergies potentielles des deux forces.

9) Les axes Ox et Oy sont des axes de symétrie de la figure, donc E_p est une fonction paire de x et une fonction paire de y.

10) Sur l'axe des x, $y = 0$, donc $E_p = b + ex^2$; d'autre part,

$E_p = -\int F dx = -\int -2kxdx = kx^2 + cste \Rightarrow e = k$.

Sur l'axe des y, $x = 0$, donc $E_p = b + gy^2$; d'autre part,

$E_p = -\int F dy = -\int -2k(1 - \ell/a)ydy = k(1 - \ell/a)y^2 + cste \Rightarrow g = k(1 - \ell/a)$.

11)

$$\vec{T} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

$$T_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -2ex = -2kx$$

$$T_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = -2gy = -2k(1 - \ell/a)y$$

12)

$$m\ddot{x} = -2kx$$

$$m\ddot{y} = -2k(1 - \ell/a)y$$

13)

$x = x_m \cos(\omega_x t + \varphi_x)$

$y = y_m \cos(\omega_y t + \varphi_y)$

14) $\omega_x = 2\omega_y \Rightarrow \dfrac{2k}{m} = \omega_x^2 = 4\omega_y^2 = 4\dfrac{2k}{m}(1 - \ell/a) \Rightarrow \ell = \dfrac{3a}{4}$

III.

A.

1) $\overrightarrow{dr} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta$.

2) L'énergie potentielle est la fonction de la position, si elle existe, telle que $dE_p = -\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = -F(r)dr \Rightarrow E_p = -\int F(r)dr$, qui existe et est bien une fonction de la seule position.

3) C'est un cas particulier de ce qui précède. $E_p = -\int -k(r-\ell)dr = \frac{1}{2}k(r-\ell)^2$.

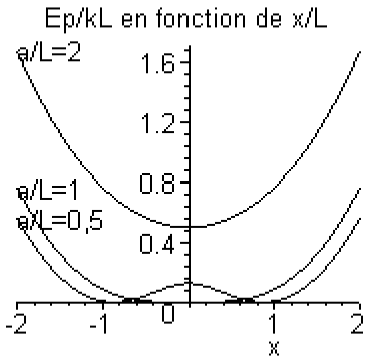
B.

1) $m\ddot{x} = -k(x-\ell) \quad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

2) Comme il n'y a pas de frottement, la réaction de l'axe ne travaille pas ; comme l'axe Ox est horizontal, le travail du poids es t nul. L'énergie potentielle associée à la force totale est donc celle associée à la tension du ressort, soit $E_p = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2+x^2} - \ell\right)^2$

3) $F = -\dfrac{dE_p}{dx} = -k\left(\sqrt{a^2+x^2} - \ell\right)\dfrac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} = -kx\left(1 - \dfrac{\ell}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$ en utilisant $\left(u^2\right)' = 2uu'$.

4) Les positions d'équilibre satisfont à $F = 0$, soit $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\ell^2 - a^2}$.



Une position d'équilibre est stable si $F(x)$ est une fonction décroissante de x. Examinons le signe de $\dfrac{dF}{dx}$.

$\dfrac{dF}{dx}(0) = -k\left(1 - \dfrac{\ell}{a}\right) < 0$ si $a > \ell$.

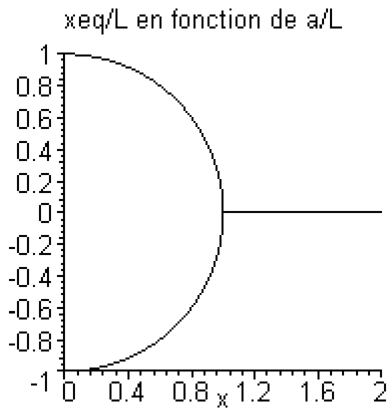
$\dfrac{dF}{dx}\left(\pm\sqrt{\ell^2 - a^2}\right) = -\dfrac{kx^2}{\ell^2} < 0$.

D'où

- Si $a < \ell$, il y a trois positions d'équilibre, $x = 0$ instable, et $x = \pm\sqrt{\ell^2 - a^2}$ stables ;
- si $a > \ell$, il y a une position d'équilibre, $x = 0$ stable.

On peut aussi obtenir ce résultat en discutant la forme du graphe de $E_p(x)$. Un point où la tangente à ce graphe est horizontale est une position d'équilibre. L'équilibre est stable s'il s'agit d'un minimum. Le graphe est tracé ci-dessus pour plusieurs valeurs de a/ℓ.

5) Si $\dfrac{a}{\ell} < 1$, $\dfrac{x_{eq}}{\ell} = \pm\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{\ell^2}} \Rightarrow \left(\dfrac{x_{eq}}{\ell}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{\ell}\right)^2 = 1$. Donc le graphe (ci-contre) de x_{eq}/ℓ en fonction de a/ℓ se compose d'un demi cercle de rayon 1 et d'une demi droite.



6) Si la position d'équilibre stable est $x = 0$, à son voisinage,

$m\ddot{x} = F \simeq -kx\left(1 - \dfrac{\ell}{a}\right) \Rightarrow \omega^2 = \dfrac{k}{m}\left(1 - \dfrac{\ell}{a}\right) \quad \omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{\ell}{a}}$

7) Si les positions d'équilibre stables sont $x_{eq} = \pm\sqrt{\ell^2 - a^2}$, en leur voisinage,

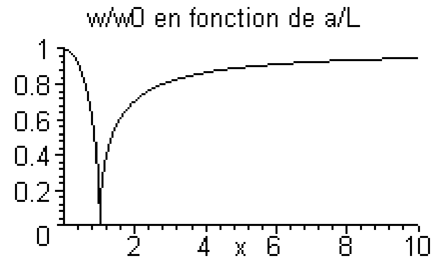
$m\ddot{x} = F(x) \simeq (x - x_{eq})\dfrac{dF}{dx}(x_{eq}) = -k\left(1 - \dfrac{a^2}{\ell^2}\right)(x - x_{eq})$

$\omega^2 = \dfrac{k}{m}\left(1 - \dfrac{a^2}{\ell^2}\right) \quad \omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{\ell^2}}$

8) Voir ci-contre le graphe de ω/ω_0 en fonction de a/ℓ.

9) Près d'une position d'équilibre, la force sur le mobile est approximativement $F(x) \simeq (x - x_{eq})F'(x_{eq})$.

Si l'on exerce en outre une force δF, le mobile est soumis au total à la force $\delta F + (x - x_{eq})F'(x_{eq})$. Si l'équilibre est stable, sa nouvelle position d'équilibre est telle que $\delta F + (x - x_{eq})F'(x_{eq}) = 0$. La susceptibilité est donc $\chi = \dfrac{x - x_{eq}}{\delta F} = -\dfrac{1}{F'(x_{eq})}$.

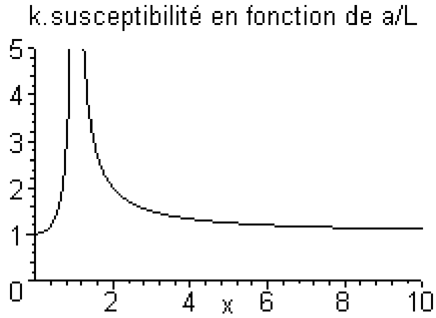


Or la pulsation des oscillations près de la position d'équilibre est $\omega^2 = -\dfrac{1}{m}F'(x_{eq})$.

D'où $\chi = \dfrac{1}{m\omega^2}$.

10) Voir à droite le graphe de $k\chi$ en fonction de a/ℓ.

11) Alors χ est très grand ; le dispositif, très sensible, peut mesurer de faibles variations de force.



D.

1) $F = -kx\left(1 - (1 + x^2/\ell^2)^{-1/2}\right)$. Il n'y a qu'une position d'équilibre, $x = 0$, qui est stable, car $1 - (1 + x^2/\ell^2)^{-1/2} > 0$, donc F est du signe contraire de x.

2)

$$\left(1 + \frac{x^2}{\ell^2}\right)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{x^2}{2\ell^2} \Rightarrow F \simeq -\frac{kx^3}{2\ell^2}$$

$$dE_p = -Fdx = \frac{kx^3dx}{2\ell^2} \qquad E_p = \frac{kx^4}{8\ell^2}$$

3) $E = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{kx^4}{8\ell^2} = \dfrac{kx_m^4}{8\ell^2}$

4) $\dfrac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\dfrac{k(x_m^4 - x^4)}{4m\ell^2}} \qquad t = \pm\displaystyle\int\sqrt{\frac{4m\ell^2}{k}}\frac{dx}{\sqrt{x_m^4 - x^4}}$

5) $\dfrac{T}{4} = \dfrac{2\ell}{\omega_0}\displaystyle\int_0^{x_m}\frac{dx}{\sqrt{x_m^4 - x^4}}$.

Faisons le changement de variable $x = x_m u \quad dx = x_m du \quad T = \dfrac{8\ell}{\omega_0 x_m}\displaystyle\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} = 10{,}5\frac{\ell}{x_m}\sqrt{\frac{m}{k}}$.

6) $\omega_0 = 7\,\mathrm{rad/s} \quad a) \quad T = \dfrac{8 \times 15}{7} \times 1{,}31 = 22{,}5\,\mathrm{s} \quad$ b) $\quad T = 11{,}2\,\mathrm{s}$.

7) Contrairement au cas de l'oscillateur harmonique, la période est inversement proportionnelle à l'amplitude.

IV.

1) A l'équilibre, les tensions des ressorts sont égales, donc la position d'équilibre est équidistante des deux points d'attache des ressorts ; leur tension est $k(a - b) = 500 \times (0{,}1 - 0{,}08) = 10\,\mathrm{N}$.

2) La force subie par le corps est la somme des tensions des ressorts, soit $F = -k(a + x - b) + k(a - x - b) = -2kx$, de la forme $-k'x$, où $k' = 2k$.

3) L'équation du mouvement est $m\ddot{x} = -k'x$. Posons $\omega = \sqrt{k'/m} = \sqrt{1000/0{,}1} = 100\,\mathrm{rad.s^{-1}}$. La solution générale est $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad \dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$.

Les conditions initiales sont $x_0 = A = 0 \quad \dot{x}_0 = B\omega = v_0$. D'où la solution $x = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t = 0{,}03\sin 100t$ (x en mètre, t en seconde).

4) Le corps revient à sa position d'équilibre au bout d'une demi période : $t = \dfrac{\pi}{\omega} = 0{,}0314\,\mathrm{s}$. Alors $\dot{x} = -v_0$.

5) Orientons l'axe vertical vers le bas. La force sur le corps est $F = mg - k'x$; l'équilibre a lieu pour $F = 0 \Rightarrow x = mg/k' = 0{,}1 \times 10/1000 = 0{,}001\,\mathrm{mm}$.

6) $x = \dfrac{mg}{k'} + X \Rightarrow F = -k'X \quad E_p = -\int F dX = \frac{1}{2}k'X^2$.

7) $m\ddot{X} = -k'X$.

8) $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0{,}0628\,\mathrm{s}$.

9) Les positions extrêmes sont $X = \pm\dfrac{mg}{k'} = \pm 0{,}001\,\mathrm{m}$.

10) On peut considérer une force de freinage visqueux $F_{op} = f\dot{x}$ (ou bien proportionnelle au carré de la vitesse).

11) $W_{op} = \Delta\left(\frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}k'X^2\right) = 0 - \frac{1}{2}k'\left(\dfrac{mg}{k'}\right)^2 = -\dfrac{m^2g^2}{2k'} = -\dfrac{0{,}1^2 \times 10^2}{2 \times 1000} = -0{,}0005\,\mathrm{J}$.

12) L'amplitude des oscillations est multipliée par $\sqrt{2}$.

V.

1) $P\Omega = 2a\cos\dfrac{\theta}{2}$ s'obtient en raisonnant sur le triangle isocèle OPΩ dont les angles P et Ω valent θ/2.

2) $T = K\left(2a\cos\dfrac{\theta}{2} - \ell\right)$

3) $V = a\dot{\theta}$.

4) P est soumis au poids, à la tension du ressort et à la réaction du demi cercle. Les deux premières forces sont conservatives et ont pour énergie potentielles $-mga\cos\theta$ et $\frac{1}{2}K(2a\cos(\theta/2) - \ell)^2$ tandis que la troisième ne travaille pas. D'où : $E_p = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}K(2a\cos(\theta/2) - \ell)^2$.

5) La conservation de l'énergie s'écrit : $E = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + E_p(\theta)$; en dérivant par rapport au temps :

$ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\dfrac{dE_p}{d\theta} = 0$, soit en éliminant la solution parasite $\dot{\theta} = 0$:

$$ma\ddot{\theta} = F_\theta = -\frac{1}{a}\frac{dE_p}{d\theta} = -mg\sin\theta + K\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell\right)\sin\frac{\theta}{2} = \left(2(Ka - mg)\cos\frac{\theta}{2} - K\ell\right)\sin\frac{\theta}{2}.$$

6) Les positions d'équilibres sont celles pour lesquelles: $F_\theta = 2(Ka - mg)\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} - K\ell\sin\dfrac{\theta}{2} = 0$, soit :

– ou bien $\theta = 0$;

– ou bien $\theta = \pm\theta_1$ tel que $\cos\dfrac{\theta_1}{2} = \dfrac{K\ell}{2(Ka - mg)}$ si cette équation a des racines.

7) θ_1, compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$(soit $\dfrac{\theta_1}{2}$ compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{4}$), existe si $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{K\ell}{2(Ka - mg)} < 1$, ce qui exige $Ka > mg$ et $1 < \dfrac{2(Ka - mg)}{K\ell} \leq \sqrt{2}$. Donc θ_1 existe si $K\left(a - \dfrac{\ell}{\sqrt{2}}\right) \leq mg < K\left(a - \dfrac{\ell}{2}\right)$

Le poids ne doit être, ni trop grand (alors il n'y a qu'une position d'équilibre, qui est stable, en θ = 0), ni trop petit (alors l'action du ressort l'emporte, la position d'équilibre θ = 0 est instable et lorsqu'on s'en écarte, la perle est rappelée au delà de sa position extrême $\theta = \dfrac{\pi}{2}$).

8) L'équilibre est stable si $\dfrac{dF_\theta}{d\theta} < 0$ et instable si $\dfrac{dF_\theta}{d\theta} > 0$. Comme $\dfrac{dF_\theta}{d\theta} = -(Ka - mg)\cos\theta - \dfrac{K\ell}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$, la position d'équilibre θ = 0 est stable si $mg \leq K\left(a - \dfrac{\ell}{2}\right)$(alors, c'est la seule position d'équilibre) et instable dans le cas contraire.

Si θ_1 existe, $\theta = \pm\,\theta_1$ sont des positions d'équilibre stable, parce que les positions d'équilibres sont alternativement stables et instables. On peut aussi le montrer en examinant le signe de

$$\frac{dF_\theta}{d\theta} = (Ka - mg)\cos\theta_1 - \frac{K\ell}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}$$

$= (Ka - mg)\left\{2\left[\dfrac{K\ell}{2(Ka - mg)}\right]^2 - 1\right\}_1 - \dfrac{K\ell}{2}\dfrac{K\ell}{2(Ka - mg)} = \dfrac{K^2\ell^2}{4(Ka - mg)} - (Ka - mg)$ qui est négatif puisque $\dfrac{K\ell}{2(Ka - mg)} < 1$.

9) $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$. Les positions d'équilibre sont donc $\theta=-\dfrac{\pi}{3}, \theta=0 \; et \; \theta=+\dfrac{\pi}{3}$.

Comme $\dfrac{dF_\theta}{d\theta}(\theta=0)=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)mg>0$, la position d'équilibre θ = 0 est instable.

Comme $\dfrac{dF_\theta}{d\theta}(\theta=\pm\theta_1)=-\dfrac{1}{4}mg<0$, les positions d'équilibre $\theta=\pm\theta_1$ sont stables.

Si ε est petit, une expression approximative de la force au voisinage de la position d'équilibre est :

$F_\theta\approx\varepsilon\dfrac{dF_\theta}{d\theta}(\theta=\pm\theta_1)=-\dfrac{mg}{4}\varepsilon$. La loi fondamentale de la dynamique s'écrit $ma\ddot{\varepsilon}=-\dfrac{mg}{4}\varepsilon$ qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation Ω telle que $\Omega^2=\dfrac{g}{4a}=\dfrac{K}{8m}$.

11) L'énergie cinétique initiale est $E_c(0)=\dfrac{1}{2}ma^2\dot{\varepsilon}_0^2=\dfrac{mga}{4}=0{,}25mga$.

La différence d'énergie potentielle entre le point de départ (minimum) et la position extrême possible est $E_p\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)-E_p\left(\theta=\dfrac{\pi}{3}\right)=mga\left(\dfrac{5}{2}-\sqrt{6}\right)\approx 0{,}05mga$, nettement plus petit que l'énergie cinétique initiale. Donc la perle a un mouvement approximativement uniforme $\varepsilon\approx\dot{\varepsilon}_0 t$ jusqu'à ce qu'elle parvienne à l'extrémité du demi cercle. L'énoncé ne permet pas de savoir ce qu'il advient ensuite.

12) $\Omega^2=\dfrac{K}{8m}=\dfrac{K'}{m}$. Donc $K'=\dfrac{K}{8}=125\,\mathrm{N/m}$. K' est nettement plus petit que K, car le poids s'oppose à l'action du ressort et le ressort résultant est donc plus faible.

13) $\Omega^2=\dfrac{g}{4a}=\dfrac{g}{L}$. Donc $L=4a=\dfrac{8mg}{K}=7{,}8\,\mathrm{cm}$. A noter l'irréalisme de la petitesse de a. En l'absence de ressort, le système est équivalent à un pendule de longueur a, donc on aurait L = a. Le ressort jouant contre le poids, tout se passe comme si la pesanteur était plus faible, ou, ce qui revient au même, comme si la longueur du pendule était plus grande.

14) $\vec{L}_O=ma^2\dot{\theta}\vec{k}$.

15) $\overrightarrow{OP}\wedge\vec{F}=aF_\theta\vec{k}$.

16) $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt}=\overrightarrow{OP}\wedge\vec{F}$ soit $ma^2\ddot{\theta}=aF_\theta$ qui au facteur a près est identique à l'équation de la question 5.

VI.

1) La fonction $\mathrm{sinc}(x)$ est continue en $x=0$. Pour $0\le x\le\pi$, elle est décroissante ; en voici deux démonstrations :

Démonstration 1.

$\dfrac{d\,\mathrm{sinc}\,x}{dx}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$; $\dfrac{d\sin cx}{dx}<0\Leftrightarrow x\cos x<\sin x$. Cette proposition est vraie, car de deux choses l'une :

– si $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, la condition équivaut à $x<\tan x$ qui est toujours vrai ;

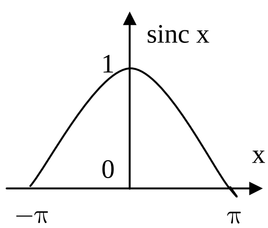
– si $\dfrac{\pi}{2}\le x<\pi$, $x\cos x\le 0$ et $\sin x>0$.

Démonstration 2.

$\dfrac{d\,\mathrm{sinc}\,x}{dx}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

Posons $g(x)=x\cos x-\sin x$.

$g'(x)=-x\sin x<0$ pour $0<x<\pi$ et $g(0)=0$ montrent que $g(x)<0$ pour $0<x<\pi$, donc que $\dfrac{d\,\mathrm{sinc}\,x}{dx}=\dfrac{g(x)}{x^2}<0$.



$\mathrm{sinc}\,x$ est une fonction paire, d'où son graphe ci-contre.

2) La force résulte du poids, des tensions $\mathcal{T}_1=k[(\pi-\theta)R-L]$ et $\mathcal{T}_2=k[(\pi+\theta)R-L]$ des ressorts et de la réaction du cercle. Sa projection sur la tangente au cercle est $mg\sin\theta+\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_2=\boxed{f(\theta)=mg\sin\theta-2kR\theta}$.

3.a) $\theta=0$ est une position d'équilibre, car alors $f=0$.

Si θ est petit, $\sin\theta\approx\theta$, donc $f\approx(mg-2kR)\theta$.

3.b) Si $2kR>mg$, la force est du signe contraire de θ, donc tend à rappeler M vers B : B est une position d'équilibre stable.

3.c) Si $2kR<mg$, la force est du signe de θ, donc tend à écarter M de B : B est une position d'équilibre instable.

3.d) Enfin si $2kR = mg$, $|\theta| > \sin|\theta|$ montre que la force est du signe contraire de θ , donc tend à rappeler M vers B : B est une position d'équilibre stable.

4) Si $2kR > mg$, au voisinage de $\theta = 0$, $f \approx (mg - 2kR)\theta = mR\ddot{\theta}$ qui est de la forme de l'équation $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ d'un oscillateur harmonique de pulsation ω telle que $\omega = \sqrt{\dfrac{2kR - mg}{mR}}$.

5) $f = mg\sin\theta - 2kR\theta = 0 \Leftrightarrow \left\{\theta = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{sinc}\theta = \dfrac{2kR}{mg}\right\}$. Or, d'après le graphe de la fonction sinus cardinal, l'équation $\operatorname{sinc}\theta = \dfrac{2kR}{mg}$ pour $0 < \theta < \pi$ a une racine positive en θ si $\dfrac{2kR}{mg} < 1$ et n'a pas de racine dans le cas contraire.

Donc, si et seulement si $2kR < mg$, il existe, outre la position $\theta = 0$, deux autres positions d'équilibre, $\theta = \theta_0$ et $\theta = -\theta_0$, où θ_0 est la solution positive unique de $\operatorname{sinc}\theta_0 = \dfrac{2kR}{mg}$

6) Si ces deux positions supplémentaires d'équilibre existent, alors elles sont stables. En effet, elles le sont si f est une fonction décroissante de θ , soit $\dfrac{df}{d\theta}(\theta_0) < 0 \Leftrightarrow mg\cos\theta_0 - 2kR < 0 \Leftrightarrow \cos\theta_0 < \dfrac{2kR}{mg} = \dfrac{\sin\theta_0}{\theta_0}$.

Si $0 < \theta_0 < \pi/2$, cela équivaut à $\theta_0 < \tan\theta_0$ qui est toujours vrai.

Si $\dfrac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$, $\cos\theta_0 < 0$, donc l'inégalité est toujours vérifiée.

7) Soit $\dfrac{df}{d\theta}(\theta_0) = mg\cos\theta_0 - 2kR$. Près de θ_0 , l'équation du mouvement est $mR\ddot{\theta} = f(\theta) \approx (\theta - \theta_0)\dfrac{df}{d\theta}(\theta_0)$ qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω telle que

$$\omega^2 = -\frac{1}{mR}\frac{df}{d\theta}(\theta_0) = -\frac{mg\cos\theta_0 - 2kR}{mR} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{mR}{2kR - mg\cos\theta_0}} \text{ où } \operatorname{sinc}\theta_0 = \frac{2kR}{mg}}$$

8.a) Dans le cas limite $mg = 2kR$, $f = mg(-\theta + \sin\theta) = mg\left(-\theta + \theta - \dfrac{\theta^3}{6} + ...\right) \simeq -\dfrac{mg\theta^3}{6}$.

8.b) $E_p \simeq \int -fRd\theta = \dfrac{mgR\theta^4}{24}$ en omettant la constante d'intégration.

8.c) La conservation de l'énergie donne $\dfrac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \dfrac{mgR\theta^4}{24} = \dfrac{mgR\theta_m^4}{24} \Rightarrow \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \pm\sqrt{\dfrac{g\left(\theta_m^4 - \theta^4\right)}{12R}}$.

8.d) $t = \displaystyle\int dt = \int\frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \pm\int\frac{d\theta}{\sqrt{\dfrac{g\left(\theta_m^4 - \theta^4\right)}{12R}}} \Rightarrow \frac{T}{4} = \sqrt{\frac{12R}{g}}\int_0^{\theta_m}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta_m^4 - \theta^4}}$

qui se calcule en faisant le changement de variable $\theta = \theta_m x \quad d\theta = \theta_m dx \Rightarrow T = \dfrac{8}{\theta_m}\sqrt{\dfrac{3R}{g}}\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$.

9.a) Près d'une position d'équilibre stable θ_0 , la force totale est $F + f(\theta)$. A l'équilibre, elle est nulle : $F + f(\theta_0 + \Delta\theta) = 0$. Si θ_0 est une position d'équilibre stable en l'absence de F , $F = -f(\theta_0 + \Delta\theta) \approx -\Delta\theta\dfrac{df}{d\theta}(\theta_0)$. D'où $\chi = \dfrac{\Delta\theta}{F} = -\dfrac{1}{\dfrac{df}{d\theta}(\theta_0)}$.

9.b) Si $2kR > mg$, $\chi = \dfrac{1}{2kR - mg}$.

9.c) Si $2kR < mg$, $\chi = \dfrac{1}{2kR - mg\cos\theta_0}$.

9.d) Si $2kR$ est voisin de mg , χ est très grand : le système est très sensible, il peut détecter et mesurer les variations de la pesanteur, qui sont très petites.

La période d'oscillation est très grande, car, d'après 8.d), $\lim_{(\theta_m \to 0)} T = \infty$: une mesure prend beaucoup de temps.