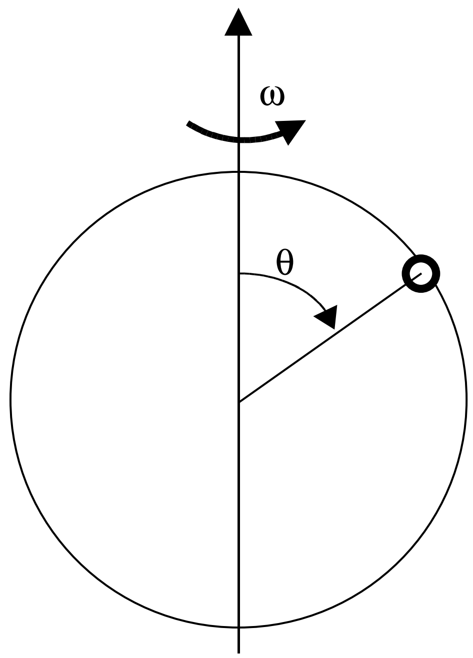
MÉCANIQUE DU POINT CHAP 00

Anneau sur cercle en rotation

Un petit anneau de masse *m* est astreint à se déplacer sans frottement sur la circonférence de rayon *a* qui tourne autour de l'axe vertical à la vitesse angulaire constante ω.

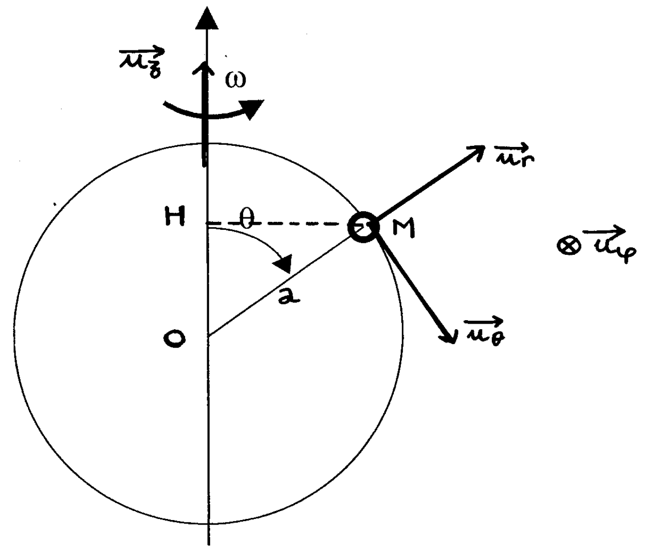


1. Etude cinématique:
   - Exprimer en fonction de θ la vitesse et l'accélération relatives au référentiel tournant pour l'anneau.
   - Exprimer la vitesse et l'accélération d'entrainement pour l'anneau.
   - Exprimer l'accélération de Coriolis.
2. Etude dynamique:
   - Préciser les forces agissant sur l'anneau dans le référentiel tournant.
   - Exprimer leur moment par rapport au centre.
   - En déduire l'équation différentielle du mouvement dans le référentiel tournant.
3. Equilibre relatif:

- Trouver les positions d'équilibre relatif.On posera $p=\frac{(g/a)}{\omega^2}$.
- Etudier la stabilité (on étudiera le cas $p<1$ et le cas $p>1$).
- Déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

4. Déterminer la réaction de la circonférence sur l'anneau.
5. Etudier le cas $p=1$.

Corrigé



Dans le référentiel tournant (lié à la circonférence), l'anneau se déplace selon $\overrightarrow{u_\theta}$. On travaillera donc dans la base directe $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$

1) cinématique

- le mouvement relatif est celui sur la circonférence, repéré par θ.

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{v_r} &= a\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{a_r} &= a\ddot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} - a\dot\theta^2\,\overrightarrow{u_r} \end{aligned}}$$

- le mouvement d'entraînement est celui du point de la circonférence coïncidant avec M. C'est un mouvement circulaire (rayon HM) à vitesse constante ω

$$\overrightarrow{v_e} = \|\overrightarrow{HM}\|\,\omega\,\overrightarrow{u_\varphi}$$
$$\overrightarrow{a_e} = -\omega^2\,\overrightarrow{HM}$$

avec $\overrightarrow{u_{HM}} = \sin\theta\,\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{v_e} &= a\sin\theta\,\omega\,\overrightarrow{u_\varphi} \\ \overrightarrow{a_e} &= -a\sin\theta\,\omega^2\,(\sin\theta\,\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_\theta}) \end{aligned}}$$

- l'accélération de Coriolis vaut

$$\vec{a_c} = 2\vec{\omega_e} \wedge \vec{v_r}$$
$$= 2\omega\,\vec{u_z} \wedge a\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

avec $\vec{u_z} \wedge \vec{u_\theta} = \cos\theta\,\vec{u_\varphi}$

$$\begin{array}{c|c|c} & \cos\theta & 0 \\ & -\sin\theta & 1 \\ \vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi} & 0 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\vec{a_c} = 2a\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u_\varphi}}$$

---

2) dynamique

- forces : - le poids
  - la réaction de la circonférence sur l'anneau M
    (en l'absence de frottement, la puissance totale des actions de contact est nulle
    $P = \vec{R}_{circ \to M} \cdot \vec{v}_{M/circ}$
    $= \vec{R} \cdot \vec{v_r} = 0$
    $\vec{R} \perp \vec{v_r}$
    donc
    $\vec{R} \perp \vec{u_\theta}$)
  - la force d'inertie d'entraînement.
    Ici, le mouvement d'entraînement est à ω constant.
    Donc cette force est centrifuge et vaut $m\omega^2\,\vec{HM}$
  - la force d'inertie de Coriolis.

$$\boxed{\begin{aligned} m\vec{g} &= -mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}) \\ \vec{R} &= R_r\,\vec{u_r} + R_\varphi\,\vec{u_\varphi} \\ \vec{F_{ie}} &= m\omega^2 a\sin\theta\,(\sin\theta\,\vec{u_r} + \cos\theta\,\vec{u_\theta}) \\ \vec{F_{ic}} &= -2ma\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u_\varphi} \end{aligned}}$$

- moments en O

le mouvement relatif est une rotation.
Pour l'étudier, on peut travailler en considérant $F_\theta(\theta)$

ou $\mathcal{M}(\theta)$ ou travailler par l'énergie. Ici on choisit $\mathcal{M}$.

avec $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$

$= a\,\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{F}$

$$\boxed{\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathcal{M}}_{m\vec{g}}(O) &= m g a \sin\theta \ \overrightarrow{u_\varphi} \\
\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{R}}(O) &= -a R_\varphi \ \overrightarrow{u_\theta} \\
\overrightarrow{\mathcal{M}}_{ent}(O) &= m\omega^2 a^2 \sin\theta \cos\theta \ \overrightarrow{u_\varphi} \\
\overrightarrow{\mathcal{M}}_{cor}(O) &= 2 m a^2 \omega \dot{\theta} \cos\theta \ \overrightarrow{u_\theta}
\end{aligned}}$$

- équation du mouvement dans le référentiel tournant

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(O) = \frac{d\overrightarrow{\sigma}(O)}{dt}$$

avec $\overrightarrow{\sigma}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}$ $\quad (\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}/\text{ref tournant})$

$= a\,\overrightarrow{u_r} \wedge m a \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$

$= m a^2 \dot{\theta} \underbrace{\overrightarrow{u_\varphi}}_{\text{fixe dans le ref tournant}}$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma}(O)}{dt} = m a^2 \ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
/\overrightarrow{u_\theta} &: \quad -a R_\varphi + 2 m a^2 \omega \dot{\theta} \cos\theta = 0 \quad \text{d'où } R_\varphi \\
/\overrightarrow{u_\varphi} &: \quad \underbrace{m g a \sin\theta + m\omega^2 a^2 \sin\theta \cos\theta}_{(\text{noté } \mathcal{M} \text{ dans la suite})} = m a^2 \ddot{\theta}
\end{aligned}}$$

$$\mathcal{M} = m\omega^2 a^2 \sin\theta\,(\cos\theta + p)$$

avec $p = \dfrac{g}{a\omega^2}$

---

3) équilibre relatif

- à l'équilibre relatif :

$$\mathcal{M}(\theta) = m\omega^2 a^2 \sin\theta_e\,(\cos\theta_e + p) = 0$$

donc

$$\boxed{\begin{aligned}
&\sin\theta_e = 0 && \theta_e = 0 \\
& && \theta_e = \pi \\
&\cos\theta_e = -p && (\text{si } p \leq 1)
\end{aligned}}$$

– stabilité

→ on doit étudier $\mathcal{M}(\theta)$ au voisinage de θ_e. On fait un D.L.

$$\boxed{\mathcal{M}(\theta) = \underbrace{\cancel{\mathcal{M}(\theta_e)}}_{\text{nul}} + (\theta-\theta_e)\left(\frac{d\mathcal{M}}{d\theta}\right)_{\theta_e}}$$

en supposant que $\left(\frac{d\mathcal{M}}{d\theta}\right)_{\theta_e}$ est différent de zéro et en travaillant alors au premier ordre en $(\theta-\theta_e)$

- $\boxed{\text{si } \left(\frac{d\mathcal{M}}{d\theta}\right)_{\theta_e} < 0}$ — $\theta > \theta_e$: $\mathcal{M}(\theta) < 0$ donc $\ddot\theta < 0$ $\theta \searrow$; $\theta < \theta_e$: $\mathcal{M}(\theta) > 0$ donc $\ddot\theta > 0$ $\theta \nearrow$

<u>L'équilibre est stable</u> (retour vers la position d'équilibre

- si $\left(\frac{d\mathcal{M}}{d\theta}\right)_{\theta_e} > 0$ l'équilibre est instable

→ $$\left(\frac{d\mathcal{M}}{d\theta}\right)_{\theta_e} = m a^2 \omega^2 \left[\cos\theta_e(\cos\theta_e + p) - \sin^2\theta_e\right]$$

- en $\theta_e = 0$: $\left(\frac{d\mathcal{M}}{d\theta}\right)_{\theta_e=0} = m a^2\omega^2(1+p) > 0$ équilibre instable

- en $\theta_e = \pi$: $\left(\frac{d\mathcal{M}}{d\theta}\right)_{\theta_e=\pi} = m a^2\omega^2(1-p)$

  - $p > 1$: < 0 équilibre stable
  - $p < 1$: > 0 équilibre instable

- en θ_e tel que $\cos\theta_e = -p$ $(p<1)$

$$\left(\frac{d\mathcal{M}}{d\theta}\right)_{\theta_e} = m a^2\omega^2(p^2-1) < 0$$ équilibre stable

en résumé :

$p < 1$	$(\omega^2 > \frac{g}{a})$	équilibre stable pour θ_e tel que $\cos\theta_e = -p$
$p > 1$	$(\omega^2 < \frac{g}{a})$	équilibre stable pour $\theta_e = \pi$

– période des oscillations au voisinage de l'équilibre stable

<u>$p<1$</u> $(\cos\theta_e = -p)$

$$\mathcal{M}(\theta) \simeq (\theta-\theta_e)\, m a^2\omega^2(p^2-1) = m a^2 \ddot\theta$$

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 (\theta - \theta_e) = 0$$

avec $\boxed{\Omega = \omega\sqrt{1-p^2}}$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

<u>p > 1</u> $(\theta_e = \pi)$

$$\mathcal{M}(\theta) \simeq (\theta - \pi)\, m a^2 \omega^2 (1-p) = m a^2 \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 (\theta - \pi) = 0$$

avec $\boxed{\Omega = \omega\sqrt{p-1}}$

---

4) → On a précédemment obtenu :

$$R_\varphi = 2 m a \omega \dot{\theta} \cos\theta$$

→ Pour obtenir R_r il faut écrire le principe fondamental

$$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}} = m\vec{a}_{/\text{ref tournant}}$$

$/\vec{u_r}$ $\quad -mg\cos\theta + R_r + m\omega^2 a \sin^2\theta + 0 = -m a \dot{\theta}^2$

... etc

---

5) étude du cas $p = 1$

$$\mathcal{M}_{(\theta)} = m\omega^2 a^2 \sin\theta \, (\cos\theta + 1)$$

La position d'équilibre $\theta = 0$ reste instable.

La <u>position d'équilibre $\theta = \pi$ est racine double.</u>

La dérivée $\left(\frac{d\mathcal{M}}{d\theta}\right)_{\theta=\pi}$ est nulle. Il faut donc poursuivre le développement limité de $\mathcal{M}$ plus loin avec :

$$\mathcal{M}(\theta) = \cancel{\mathcal{M}(\pi)} + \cancel{(\theta-\pi)\left(\frac{d\mathcal{M}}{d\theta}\right)_\pi} + \frac{(\theta-\pi)^2}{2!}\left(\frac{d^2\mathcal{M}}{d\theta^2}\right)_\pi + \frac{(\theta-\pi)^3}{3!}\left(\frac{d^3\mathcal{M}}{d\theta^3}\right)_\pi + \cdots$$

en calculant $\left(\frac{d^2\mathcal{M}}{d\theta^2}\right)_\pi$, $\left(\frac{d^3\mathcal{M}}{d\theta^3}\right)_\pi$ ... etc si nécessaire.

Ici, il est plus rapide de faire $\theta = \pi + \alpha$. <u>L'équilibre est en $\alpha = 0$</u>

$$\mathcal{M}_{(\alpha)} = m\omega^2 a^2 \sin\alpha \, (\cos\alpha - 1)$$

Travaillons au 3e ordre en α :

$$= m\omega^2 a^2 \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6}\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} - 1\right)$$

$$\boxed{\mathcal{M}(\alpha) = -m\omega^2 a^2 \frac{\alpha^3}{2}}$$

L'équation pour α "petit" devient :

$$-m\omega^2 a^2 \frac{\alpha^3}{2} = m a^2 \ddot{\alpha}$$

Le moment est un moment de rappel, l'équilibre est stable

$$\ddot{\alpha} < 0 \text{ si } \alpha > 0$$
$$\ddot{\alpha} > 0 \text{ si } \alpha < 0$$

L'équation au voisinage de l'équilibre est

$$\boxed{\ddot{\alpha} + \frac{\omega^2}{2}\alpha^3 = 0}$$

Les oscillations ne sont pas harmoniques.