Quelques contrôles corrigés

Contrôle continu : Novembre 2013

EXERCICE 1 (6 points)

Dans un référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées d'un point matériel M sont données par les fonctions du temps $x(t) = t$, $y(t) = t(t-1)$ et $z(t) = 0$ où t est le temps.

1) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du point M. En déduire sa nature.

2) Déterminer les composantes et le module de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ à l'instant t.

3) Déterminer l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$.

4) Discuter la nature du mouvement de M en fonction de t.

5) Déterminer les vecteurs de la base de Fresnet $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$, sachant que $\vec{b} = \vec{k}$.

6) En déduire les composantes tangentielle et normale de l'accélération du point M.

7) Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire en fonction de t.

PROBLÈME (14 points)

Dans un repère $\mathcal{R}(O, XYZ)$ supposé fixe et muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un cercle (C) de centre O_1 et de rayon a passe par l'origine O. On désigne par $\mathcal{R}_1(O_1, X_1Y_1Z_1)$ le repère lié au cercle et muni de la base orthonormé directe $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$. Le cercle (C) tourne dans le plan (OXY) avec la vitesse angulaire constante ω telle que $(\widehat{\vec{i}, \vec{i}_1})$=$(\widehat{\vec{j}, \vec{j}_1}) = \varphi(t) = \omega t$, comme l'indique la figure ci-dessous. Un point matériel M se déplace sur le cercle (C) avec une vitesse angulaire constante ω telle que $(\widehat{\vec{i}_1, \vec{e}_\rho})$=$(\widehat{\vec{j}_1, \vec{e}_\varphi}) = \varphi(t) = \omega t$. On désigne par $\mathcal{R}_2(O_1, X_2Y_2Z)$ le repère lié au point M et muni de la base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

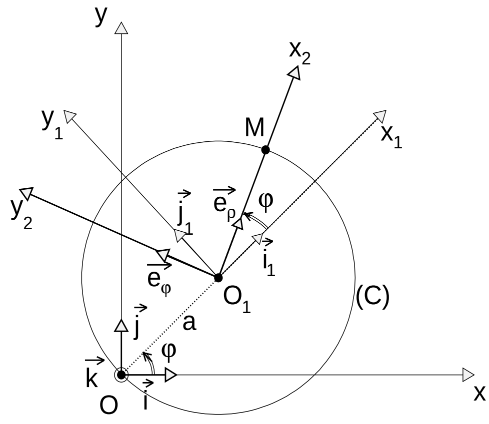
Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$.

I- Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}$

1) Exprimer les vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$ en fonction des vecteurs $\vec{i}_1$ et $\vec{j}_1$.

2) Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du point M.

3) En déduire la vitesse absolue et l'accélération absolue du point M.



II- Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}_1$

On suppose que $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$ est le repère relatif, $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant le repère absolu.

1) Vérifier que le vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \omega\vec{k}$.

2) Déterminer la vitesse relative $\vec{V}_r = \vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$ et la vitesse d'entrainement $\vec{V}_e$ du point M.

3) Déterminer l'accélération relative $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$, l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e$ et l'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c$ du point M .

4) En déduire la vitesse absolue $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et l'accélération absolue $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ du point M. Comparer les résultats trouvés avec ceux calculés en **I-3)**.

III- Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}_2$

On suppose dans ce cas que le repère $\mathcal{R}_2(O_2, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est le repère relatif, $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant le repère absolu.

1) Déterminer $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$. En déduire que $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) = 2\omega\vec{k}$.

2) Déterminer la vitesse relative $\vec{V}_r = \vec{V}(M/\mathcal{R}_2)$ et la vitesse d'entrainement $\vec{V}_e$ du point M.

3) Déterminer l'accélération relative $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_2)$, l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e$ et l'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c$ du point M.

4) En déduire la vitesse absolue $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et l'accélération absolue $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ du point M. Comparer les résultats trouvés avec ceux calculés en **I-3)** et **II-4)**. Que peut-on conclure ?

Corrigé Contrôle continu : Novembre 2013

Note : *Deux méthodes sont proposées pour la solution de certaines questions. Pour éviter toute confusion à propos du barème, seule la première méthode est notée. Prière d'appliquer le même barème à la deuxième méthode.*

Exercice 1 (6 points)

Les coordonnées d'un point M sont données dans le référentiel $\mathcal{R}(O, XYZ)$ par les fonctions du temps $x(t) = t$, $y = t(t-1)$ et $z(t) = 0$ où t est le temps.

0.75pt

1) L'équation cartésienne de la trajectoire du point M est obtenue en exprimant $y = y(x)$:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t(t-1) = x(x-1) \Longrightarrow \boxed{y = x^2 - x} \quad \text{et} \quad z = 0. \end{cases}$$

0.5pt

C'est l'équation d'une parabole. 0.25pt

0.75pt

2) Calculons la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$, sachant que le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \\ &= \vec{i} + (2t-1)\vec{j}. \end{aligned}$$

0.5pt

Le module de la vitesse est égal à

$$\begin{aligned} V &= \|\vec{V}(M/\mathcal{R})\| = \sqrt{\vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R})} \\ &= \sqrt{(\vec{i} + (2t-1)\vec{j}) \cdot (\vec{i} + (2t-1)\vec{j})} = \sqrt{1 + (2t-1)^2} = \sqrt{4t^2 - 4t + 2}. \end{aligned}$$

0.25pt

0.5pt

3) L'accélération du point M par rapport à $\mathcal{R}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= 2\vec{j}. \end{aligned}$$

0.5pt

4) Le module de la vitesse, $V = \sqrt{1 + (2t-1)^2}$, varie avec le temps donc c'est un mouvement non uniforme. 0.5pt

1.5pt

Pour établir s'il est accéléré ou bien retardé, nous avons deux méthodes.

Méthode 1 : On utilise le produit scalaire entre l'accélération et la vitesse

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= V\frac{dV}{dt} \\ &= (\vec{i} + (2t-1)\vec{j}) \cdot 2\vec{j} \\ &= 2(2t-1) \end{aligned}$$

ce qui implique que $\frac{dV}{dt}$ a le même signe que $(2t-1)$:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 2t - 1 \geq 0 \Longrightarrow t \geq \frac{1}{2} \quad \text{mouvement accéléré} \\ \frac{dV}{dt} < 0 \quad \Longrightarrow \quad 2t - 1 < 0 \Longrightarrow 0 \leq t < \frac{1}{2} \quad \text{mouvement retardé ou décéléré} \end{cases}$$

0.5pt 0.5pt

Méthode 2 : On calcule directement la dérivée par rapport au temps du module de la vitesse V :

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\sqrt{1+(2t-1)^2}\right] \\ &= \frac{2(2t-1)}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}\end{aligned}$$

on en déduit que $\frac{dV}{dt}$ a le même signe que $(2t-1)$, ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} \geq 0 \implies 2t-1 \geq 0 \Longrightarrow t \geq \frac{1}{2} & \text{mouvement accéléré} \\ \frac{dV}{dt} < 0 \implies 2t-1 < 0 \Longrightarrow 0 \leq t < \frac{1}{2} & \text{mouvement retardé ou décéléré} \end{cases}$$

1pt

5) Les vecteurs de la base de Fresnet sont donnés par

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \frac{\vec{V}(M/\mathcal{R})}{\|\vec{V}(M/\mathcal{R})\|} \\ &= \frac{\vec{i}+(2t-1)\vec{j}}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}.\end{aligned}$$ **0.5pt**

Le mouvement se fait dans le plan Oxy ce qui implique que $\vec{b} = \vec{k}$. D'où, l'expression de $\vec{n}$ est égale à

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \vec{k} \wedge \vec{\tau} \\ &= \vec{k} \wedge \frac{\vec{i}+(2t-1)\vec{j}}{\sqrt{1+(2t-1)^2}} \\ &= \frac{-(2t-1)\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}.\end{aligned}$$ **0.5pt**

1pt

6) Calcul de l'accélération tangentielle γ_t : deux méthodes

Méthode 1 : Connaissant l'expression de $\vec{\gamma}(M\mathcal{R})$ et de $\vec{\tau}$, on déduit l'accélération tangentielle par

$$\begin{aligned}\gamma_t &= \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{\tau} \\ &= 2\vec{j} \cdot \frac{\vec{V}(M/\mathcal{R})}{\|\vec{V}(M/\mathcal{R})\|} \\ &= \frac{2(2t-1)}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}.\end{aligned}$$ **0.5pt**

Méthode 2 : On calcule l'accélération tangentielle à partir de la dérivée par rapport au temps du module de la vitesse

$$\begin{aligned}\gamma_t &= \frac{dV}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left[\sqrt{1+(2t-1)^2}\right] \\ &= \frac{2(2t-1)}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}\end{aligned}$$

Calcul de l'accélération normale γ_n : deux méthodes

Méthode 1 : Connaissant $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{n}$, on déduit γ_n par

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \vec{\gamma}(M/\mathcal{R})\cdot\vec{n}\\ &= 2\vec{j}\cdot\frac{-(2t-1)\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}.\end{aligned}$$

0.5pt

Méthode 2 : On déduit γ_n à partir de $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ et γ_t par

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \sqrt{\gamma^2(M/\mathcal{R})-\gamma_t^2}\\ &= \sqrt{4-\frac{4(2t-1)^2}{1+(2t-1)^2}}\\ &= \sqrt{\frac{4-4(2t-1)^2+4(2t-1)^2}{1+(2t-1)^2}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}.\end{aligned}$$

0.5pt

7) Calcul du rayon de courbure R : deux méthodes

Méthode 1 : on utlise γ_n et on obtient

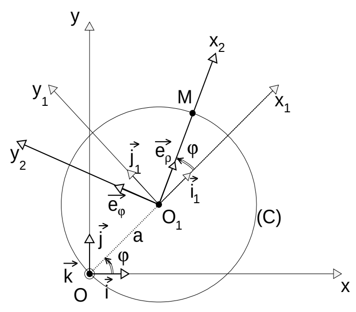
$$\begin{aligned}R=\frac{V^2}{\gamma_n} &= \frac{\left(1+(2t-1)^2\right)\times\left(\sqrt{1+(2t-1)^2}\right)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+(2t-1)^2\right)^{3/2}.\end{aligned}$$

0.5pt

Méthode 2 : on utilise $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ comme suit

$$\begin{aligned}R &= \frac{V^3}{\|\vec{V}(M/\mathcal{R})\wedge\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})\|}\\ &= \frac{\left(1+(2t-1)^2\right)^{3/2}}{\|2\vec{k}\|}=\frac{1}{2}\left(1+(2t-1)^2\right)^{3/2}.\end{aligned}$$

Problème (14 points)



Données du problème :

$\mathcal{R}(O, XYZ)$ est le référentiel fixe muni de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$;
$\mathcal{R}_1(O_1, X_1Y_1Z_1)$ est un référentiel mobile muni de la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k})$ tel que $\widehat{(\vec{i},\vec{i}_1)}=\widehat{(\vec{j},\vec{j}_1)}=\varphi(t)=\omega t,$;
$\mathcal{R}_2(O_2, X_2Y_2Z_2)$ est un référentiel mobile muni de la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ tel que $\widehat{(\vec{i}_1,\vec{e}_\rho)}=\widehat{(\vec{j}_1,\vec{e}_\varphi)}=\varphi(t)=\omega t$. ω est constante.

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$.

I- Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}$

1pt

1) Expressions de $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$ en fonction $\vec{i}_1$ et $\vec{j}_1$:
nous projetons les deux vecteurs respectivement comme suit

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1 \quad \textbf{0.5pt}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1 \quad \textbf{0.5pt}$$

0.5pt

2) Expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de M :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} &= a\vec{i}_1 + a\vec{e}_\rho \\ &= a\left(\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right) \\ &= a\left[(1+\cos\varphi)\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right]. \quad \textbf{0.5pt} \end{aligned}$$

2.5pt

3) Expressions de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et de l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$:

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= a\left[-\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{i}_1 + (1+\cos\varphi)\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \dot{\varphi}\cos\varphi\vec{j}_1 + \sin\varphi\left.\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}}\right] \\ &= a\omega\left[-2\sin\varphi\vec{i}_1 + (1+2\cos\varphi)\vec{j}_1\right]. \quad \textbf{1pt} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= a\omega^2\left[-2\cos\varphi\vec{i}_1 - 2\sin\varphi\vec{j}_1 - 2\sin\varphi\vec{j}_1 - (1+2\cos\varphi)\vec{i}_1\right] \\ &= -a\omega^2\left[(1+4\cos\varphi)\vec{i}_1 + 4\sin\varphi\vec{j}_1\right]. \quad \textbf{1.5pt} \end{aligned}$$

II- Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}_1$

1) Vérifions l'expression de $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})$:

$$\vec{i}_1 = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} \Longrightarrow \left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\varphi}\vec{j}_1 = \dot{\varphi}\vec{k}\wedge\vec{i}_1$$

comme

$$\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})\wedge\vec{i}_1 = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})\wedge\vec{i}_1$$

en comparant cette dernière expression avec celle calculée auparavant, on en déduit que

$$\boxed{\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\varphi}\vec{k}} \quad \textbf{0.5pt}$$

2) Expressions de $\vec{V}_r = \vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$ et de $\vec{V}_e$ de M : $\boxed{\text{1pt}}$

$$\begin{aligned}
\vec{V}_r &= \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} \\
&= \frac{d}{dt}\left[a\left(\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right)\right] \\
&= a\omega\left(-\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1\right). \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{V}_e &= \vec{V}(O_1/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\
&= a\omega\vec{j}_1 + a\omega\vec{k} \wedge \left[\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right] \\
&= a\omega\left[-\sin\varphi\vec{i}_1 + (1+\cos\varphi)\vec{j}_1\right]
\end{aligned}$$

3) Expressions de $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$, $\vec{\gamma}_e$ et de $\vec{\gamma}_c$: $\boxed{\text{1.5pt}}$

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_r &= \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} \\
&= -a\omega^2\left[\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right]. \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_e &= \left.\frac{d\vec{V}(O/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}) \\
&= a\omega^2\left[-\vec{i}_1 + \vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho\right)\right] \\
&= a\omega^2\left[-\vec{i}_1 - \vec{e}_\rho\right] \\
&= -a\omega^2\left[(1+\cos\varphi)\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right]. \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_c &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r \\
&= 2a\omega^2\vec{k} \wedge \left(-\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1\right) \\
&= -2a\omega^2\left(\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right). \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

4) Expressions de $\vec{V}_a = \vec{V}(M/\mathcal{R})$ et de $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}(M\mathcal{R})$: $\boxed{\text{1.5pt}}$

$$\begin{aligned}
\vec{V}_a &= \vec{V}_r + \vec{V}_e \\
&= a\omega\left(-\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1\right) + a\omega\left[-\sin\varphi\vec{i}_1 + (1+\cos\varphi)\vec{j}_1\right] \\
&= a\omega\left[-2\sin\varphi\vec{i}_1 + (1+2\cos\varphi)\vec{j}_1\right] \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_a &= \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c \\ &= -a\omega^2\left(\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right) - a\omega^2\left[(1+\cos\varphi)\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right] - 2a\omega^2\left(\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right) \\ &= -a\omega^2\left[(1+4\cos\varphi)\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right].\end{aligned}$$ **0.5pt**

On note que les résultats obtenus par décomposition des mouvements sont identiques à ceux obtenus par le calcul direct. **0.5pt**

III- Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}_2$

1pt

1) Expression de $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R})$:

<u>**Méthode 1 :**</u>

Expression de $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$:

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1 \Longrightarrow \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}\vec{k}\wedge\vec{e}_\rho$$

comme

$$\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)\wedge\vec{e}_\rho = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)\wedge\vec{e}_\rho$$

en comparant cette dernière expression avec celle calculée auparavant, on en déduit que

$$\boxed{\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \dot{\varphi}\vec{k}}.$$ **0.5pt**

Comme $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \omega\vec{k}$ et $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \omega\vec{k}$ ce qui implique que $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = 2\omega\vec{k}$. **0.5pt**

<u>**Méthode 2 :**</u>

$$\vec{e}_\rho = \cos(2\varphi)\vec{i} + \sin(2\varphi)\vec{j} \Longrightarrow \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = 2\dot{\varphi}\left(-\sin(2\varphi)\vec{i} + \cos(2\varphi)\vec{j}\right) = 2\omega\vec{e}_\varphi = 2\omega\vec{k}\wedge\vec{e}_\rho$$

avec $\vec{e}_\varphi = -\sin(2\varphi)\vec{i} + \cos(2\varphi)\vec{j}$. Comme

$$\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R})\wedge\vec{e}_\rho = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R})\wedge\vec{e}_\rho$$

et en identifiant cette dernière expression à celle trouvée dans l'expression précédente, on déduit que

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) = 2\omega\vec{k}.$$

1pt

2) Expressions de $\vec{V}_r = \vec{V}(M/\mathcal{R}_2)$ et de $\vec{V}_e$ de M :

$$\vec{V}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_2} = a\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}_2} = \vec{0}.$$ **0.5pt**

et

$$\begin{aligned}
\vec{V}_e &= \vec{V}(O_1/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\
&= a\omega\vec{j}_1 + 2a\omega\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho \\
&= a\omega\vec{j}_1 + 2a\omega\left(-\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1\right) \\
&= a\omega\left[-2\sin\varphi\vec{i}_1 + (1+2\cos\varphi)\vec{j}_1\right]. \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

3) Expressions de $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_2)$, $\vec{\gamma}_e$ et $\vec{\gamma}_c$: $\boxed{1.5\text{pt}}$

$$\vec{\gamma}_r = \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_2)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_2} = \vec{0} \quad \textbf{0.5pt}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_e &= \left.\frac{d\vec{V}(O_1/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) \\
&= -a\omega^2\vec{i}_1 + 2\omega\vec{k} \wedge \left(2\omega\vec{k} \wedge a\vec{e}_\rho\right) \\
&= -a\omega^2\vec{i}_1 - 4a\omega^2\vec{e}_\rho = -a\omega^2\left[(1+4\cos\varphi)\vec{i}_1 + 4\sin\varphi\vec{j}_1\right] \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

et

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(M\mathcal{R}_2) = \vec{0}. \quad \textbf{0.5pt}$$

5) Expressions de la vitesse absolue $\vec{V}_a = \vec{V}(M/\mathcal{R})$ et de $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$: $\boxed{1\text{pt}}$

$$\begin{aligned}
\vec{V}_a &= \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}_r + \vec{V}_e \\
&= a\omega\left[-2\sin\varphi\vec{i}_1 + (1+2\cos\varphi)\vec{j}_1\right] \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_a &= \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c \\
&= -a\omega^2\left[(1+4\cos\varphi)\vec{i}_1 + 4\sin\varphi\vec{j}_1\right]. \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

On constate de nouveau que $\vec{V}_a$ et $\vec{\gamma}_a$ sont identiques aux expressions trouvées en **I-3)** et **II-4)**. **0.5pt**
On en conclut que les expressions de $\vec{V}_a$ et de $\vec{\gamma}_a$ sont indépendantes du choix du référentiel relatif. Elles ne dépendent que du référentiel absolu. **0.5pt**.

Contrôle final : janvier 2014

Exercice

Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ un repère muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Une roue circulaire de rayon R et de centre C roule sans glisser [2] sur l'axe Ox tout en restant sur le plan Oxy, figure 4.1. Un point A de la roue coincide à l'instant initial $t = 0$ avec l'origine du repère O. Le centre C est repéré par les coordonnées x_c selon $\vec{i}$ et y_c selon $\vec{j}$ et sa vitesse est constante et égale à V_c.

1. Calculer les distances parcourues pendant la durée dt par A et par C. En déduire que $\varphi = \frac{V_c}{R}t$.
2. Déterminer les coordonnées du point A à l'instant t dans la base cartésienne.
3. Calculer le vecteur vitesse de A, $\vec{V}(A/\mathcal{R})$. En déduire l'expression de son module $V = \|\vec{V}(A/\mathcal{R})\|$.
4. Calculer les coordonnées des positions de A pour lesquelles la vitesse est nulle ?

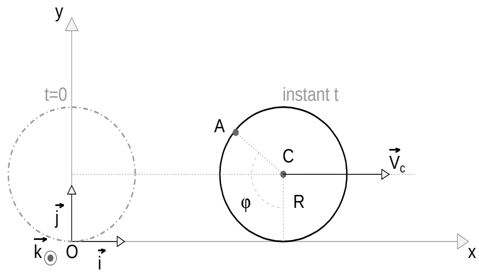


FIGURE 4.1 –

5. Calculer le vecteur unitaire $\vec{u}_R$ de la direction du vecteur $\overrightarrow{CA}$. En déduire le vecteur $\vec{u}_\varphi$ tangent à la roue au point A.

6. Montrer que le vecteur $\vec{V}(A/\mathcal{R})$ peut etre décomposé en deux vecteurs de même module, l'un est parallèle à Ox et l'autre est tangent à la roue.

2. Le roulement sans glissement de la roue implique que pendant une durée dt, la distance parcourue par A est égale à la distance parcourue par C.

Problème

Soit $\mathcal{R}(O, xyz)$ un référentiel muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère un système formé par deux tiges rigides de masses négligeables (OA) et (AB), avec $\|OA\| = L_1$. La tige (OA) est articulée en O et tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante $\dot{\theta}(t)$.

Soit $\mathcal{R}_1(A, x_1y_1z_1)$ un référentiel muni de la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$. La tige (AB) est articulée en A à la tige (OA) et tourne dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ avec une vitesse angulaire constante $\dot{\varphi}(t)$, voir figure 4.2.

Un anneau P se déplace sur la tige AB par rapport à $\mathcal{R}_1$ avec une vitesse constante v_0. A l'instant initial $t = 0$, les barres OA et OB sont colinéaires avec Ox, $\theta_0 = \varphi_0 = 0$, et l'anneau se trouve en A.

La position de l'anneau P est repérée dans $\mathcal{R}_1$ par $\overrightarrow{AP} = \rho\vec{e}_\rho$. Dans la suite du problème, $\mathcal{R}$ est le référentiel absolu et $\mathcal{R}_1$ est le référentiel relatif dont le vecteur de rotation est $\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\theta}$.

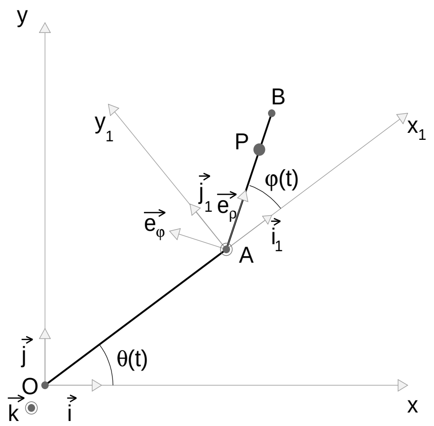


FIGURE 4.2 –

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$

1. Calculer ρ en fonction de t et de v_0.
2. Calculer la vitesse relative $\vec{V}_r = \vec{V}(P/\mathcal{R}_1)$ et la vitesse d'entrainement $\vec{V}_e$ de l'anneau P.
3. En déduire la vitesse absolue $\vec{V}_a = \vec{V}(P/\mathcal{R})$ de l'anneau P.
4. Calculer L'accélération relative $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(P/\mathcal{R}_1)$ de l'anneau P.
5. Calculer l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e$ et l'accélération de coriolis $\vec{\gamma}_c$ de l'anneau P.
6. En déduire l'expression de l'accélération absolue $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}(P/\mathcal{R})$.

Corrigé : contrôle final Janvier 2014

Questions de cours (4 points)

1pt

1. Sachant que $\mathcal{R}$ est galiléen et en dérivant $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ par rapport au temps dans $\mathcal{R}$ on obtient

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}) + \overrightarrow{OM} \wedge \left.\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \quad \textbf{0.5pt}$$

comme $\vec{p}(M/\mathcal{R}) = m\vec{V}(M/\mathcal{R})$ alors

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \left.\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \quad \textbf{0.25pt}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, $d\vec{p}(M/\mathcal{R})/dt = \vec{F}$, on obtient

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F}). \quad \textbf{0.25pt}$$

2. Etablissons la dérivée par rapport au temps du moment cinétique évalué par rapport à un point mobile A, sachant que $\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R})$ 2pt

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}) + \overrightarrow{AM} \wedge \left.\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \quad \mathbf{1pt}$$

Si l'on fait interposer le point O, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$ on obtient

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{AO}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{V}(M/\mathcal{R}) - \vec{V}(A/\mathcal{R}) \quad \mathbf{0.5pt}$$

ce qui donne

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}) + \vec{p}(M/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}). \quad \mathbf{0.5pt}$$

1pt

3. Appliquons le théorème du moment cinétique au point O_1, origine de $\mathcal{R}_1$ en notant par $\vec{f}_{ie}$ et $\vec{f}_{ic}$ respectivement les forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{\sigma}_{o_1}(M/\mathcal{R}_1)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} &= \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}_1) + \overrightarrow{O_1M} \wedge \left.\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R}_1)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} \\
&= \overrightarrow{O_1M} \wedge \left(\vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}\right) \\
&= \overrightarrow{\mathcal{M}_{o_1}}(\vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}) \quad \mathbf{1pt}
\end{aligned}$$

Corrigé du problème (16 points)

$\mathcal{R}(O, xyz)$ est le référentiel géocentrique supposé galiléen.
Le satellite S n'est soumis qu'à l'action de la force gravitationnelle $\vec{F}$ de la Terre, l'effet des autres interactions étant considéré négligeable.
Soient M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre. G est la constante gravitationnelle.
Soit m la masse du satellite, supposée négligeable devant celle de la terre, $m \ll M_T$.
La position du satellite est repérée par $\overrightarrow{OS}$.

0.5pt

1. L'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}$ est

$$\vec{F} = -\frac{GmM_T}{|\overrightarrow{OS}|^3}\overrightarrow{OS}. \quad \mathbf{0.5pt}$$

1pt

2. Comme la force gravitationnelle est une force centrale, $\vec{F} // \overrightarrow{OS}$, alors son moment par rapport à O est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F}) = \overrightarrow{OS} \wedge \frac{-GM_Tm}{|\overrightarrow{OS}|^3}\overrightarrow{OS} = \vec{0} \quad \mathbf{0.25pt}$$

Aussi le théorème du moment cinétique permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R})}{dt} &= \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F}) = \vec{0} \quad \mathbf{0.25pt} \\
\Longrightarrow \vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{\text{constante}} \quad \mathbf{0.25pt}
\end{aligned}$$

$\vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R})$ est constant en module, en direction et en sens. Comme il est perpendiculaire simultanément à $\overrightarrow{OS}$ et à la vitesse de S par rapport à $\mathcal{R}$ alors le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R})$. **0.25pt**

On choisit le plan du mouvement de S confondu avec le plan Oxy et on utilise les coordonnées polaires (ρ, φ) pour repérer la position de S.

1pt

3. Calculons la vitesse sachant que $\overrightarrow{OS} = \rho\vec{e}_\rho$

$$\vec{V}(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OS}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad \textbf{0.25pt}$$

ce qui donne pour le moment cinétique de S par rapport à O dans $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{OS} \wedge m\vec{V}(S/\mathcal{R}) \\ &= m\rho\vec{e}_\rho \wedge (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = m\rho^2\dot{\varphi}\vec{k}. \quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

La constante des aires $C = \dfrac{|\vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R})|}{m} = \rho^2\dot{\varphi}$ **0.25pt**

2.5pt

4. L'énergie cinétique E_c est donnée par

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right).$$

Comme $C = \rho^2\dot{\varphi} \Longrightarrow \dot{\varphi} = \dfrac{C}{\rho^2}$ ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \frac{C^2}{\rho^2}\right). \quad \textbf{1pt}$$

L'attraction gravitationnelle est conservative. On calcule directement son énergie potentielle comme suit

$$\begin{aligned}dE_p &= -\vec{F}\cdot d\overrightarrow{OS} = \frac{GmM_T}{\rho^2}\vec{e}_\rho \cdot (d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\vec{e}_\rho) \\ &= \frac{GmM_T}{\rho^2}d\rho \Longrightarrow E_p = -\frac{GmM_T}{\rho} + \text{Constante} \quad \textbf{1pt}\end{aligned}$$

nous avons utilisé $\vec{e}_\rho \cdot d\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho \cdot (d\varphi\vec{e}_\varphi) = 0$. Comme $E_p \to 0$ quand $\rho \to +\infty$, la constante est nulle. Ainsi $E_p = -\dfrac{GmM_T}{\rho}$ **0.25pt**

L'énergie mécanique E_m est égale à

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \frac{C^2}{\rho^2}\right) - \frac{GmM_T}{\rho}. \quad \textbf{0.25pt}$$

La trajectoire de S dans $\mathcal{R}$ est une conique d'équation $\rho = \dfrac{p}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}$ de paramètre $p = \dfrac{C^2}{GM_T}$, d'excentricité e et φ_0 qui est la valeur de φ à l'instant initial.

5. Calculons d'abord l'expression de $\dot{\rho}$ sachant que $\dot{\varphi} = C/\rho^2 = C\frac{(1+e\cos(\varphi-\varphi_0))^2}{p^2}$ 1pt

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{pe\sin(\varphi-\varphi_0)}{(1+e\cos(\varphi-\varphi_0))^2}\right) C\frac{(1+e\cos(\varphi-\varphi_0))^2}{p^2} = \frac{C}{p}e\sin(\varphi-\varphi_0).$$ **1pt**

1.5pt

6. Calculons la relation entre l'énergie mécanique E_m et l'excentricité e

$$\begin{aligned}
E_m &= \frac{1}{2}m\left(\frac{C^2}{p^2}e^2\sin^2(\varphi-\varphi_0) + C^2\frac{(1+e\cos(\varphi-\varphi_0))^2}{p^2}\right) - GmM_T\frac{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}{p}\\
&= \frac{1}{2}\frac{GmM_T}{p}\left[e^2\sin^2(\varphi-\varphi_0) + (1+e\cos(\varphi-\varphi_0))^2 - 2(1+e\cos(\varphi-\varphi_0))\right]\\
&= \frac{1}{2}\frac{GmM_T}{p}\left[e^2\sin^2(\varphi-\varphi_0) + 1 + 2e\cos(\varphi-\varphi_0) + e^2\cos^2(\varphi-\varphi_0) - 2 - 2e\cos(\varphi-\varphi_0)\right]\\
&= \frac{1}{2}\frac{GmM_T}{p}\left(e^2-1\right)
\end{aligned}$$ **1.5pt**

qui est la relation demandée. On a utilisé la relation $C^2 = pGM_T$.

7. Le satellite est mis sur une orbite circulaire de rayon ρ et dont la période de révolution est T_0 (la durée au bout de laquelle le satellite effectue un tour autour de la Terre).

1pt

7-a) Comme l'orbite est circulaire alors $e = 0$ et en utilisant l'équation polaire de la conique on obtient $\rho = p =$ constante, ce qui donne pour l'énergie mécanique E_m

$$E_m = -\frac{1}{2}\frac{GmM_T}{\rho}.$$ **1pt**

1.5pt

7-b) Comme ρ est constant, alors $\dot{\rho} = 0$ et $\dot{\varphi} = C/\rho^2$ est constante puisque C est constante. Or le vecteur vitesse est donné par

$$\vec{V}(S/\mathcal{R}) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \Longrightarrow |\vec{V}(S/\mathcal{R})| = \rho\dot{\varphi} = \rho\frac{C}{\rho^2} = \frac{C}{p} = \text{constante}$$ **0.5pt**

comme le module de la vitesse est constant alors le mouvement est uniforme. **0.5pt**
Sachant que $C = \sqrt{GM_T\rho}$, nous avons

$$|\vec{V}(S/\mathcal{R})| = \sqrt{\frac{GM_T}{\rho}}.$$ **0.5pt**

1.5pt

8. **8-a)** Calculons le travail de la force de frottement $\delta W(\vec{f})$:

$$\begin{aligned}
\delta W(\vec{f}) &= \vec{f}\cdot d\overrightarrow{OS} = -kmV\vec{V}(S/\mathcal{R})\cdot \left.\frac{d\overrightarrow{OS}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} dt\\
\Longrightarrow \delta W(\vec{f}) &= -kmV^3dt
\end{aligned}$$ **1pt**

comme V est constant, alors le travail de la force de frottement au cours d'une période de révolution $T_0 = \frac{2\pi\rho}{V}$ est

$$\begin{aligned}
W(\vec{f}) &= \int_0^{T_0}\delta W(\vec{f}) = -kmV^3\int_0^{T_0} dt\\
&= -kmV^3T_0 = -2\pi km\rho V^2 = -2\pi km\rho\frac{GM_T}{\rho} = -2\pi kGmM_T.
\end{aligned}$$ **0.5pt**

8-b) Calculons $E_m(\rho+\Delta\rho)$

$$\begin{aligned} E_m(\rho+\Delta\rho) &= -\frac{GmM_T}{2}\frac{1}{\rho+\Delta\rho} \\ &= -\frac{GmM_T}{2}\frac{1}{\rho(1+\frac{\Delta\rho}{\rho})} = -\frac{GmM_T}{2}\frac{1}{\rho}\frac{1}{1+\frac{\Delta\rho}{\rho}} \\ &\simeq -\frac{GmM_T}{2}\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \quad \textbf{1pt} \end{aligned}$$

1pt

8-c) Calculons $\Delta E_m = E_m(\rho+\Delta\rho) - E_m(\rho)$

$$\begin{aligned} \Delta E_m = E_m(\rho+\Delta\rho) - E_m(\rho) &= -\frac{GmM_T}{2}\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) + \frac{GmM_T}{2\rho} \\ &= \frac{GmM_T}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho^2}. \quad \textbf{1pt} \end{aligned}$$

1pt

8-d) Appliquons le théorème de l'énergie mécanique pour une révolution du satellite,

$$\Delta E_m = W(\vec{f}) \Longrightarrow \frac{GmM_T}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho^2} = -2\pi k GmM_T \Longrightarrow \Delta\rho = -4\pi k\rho^2 \quad \textbf{1pt}$$

qui est la relation recherchée.

8-e) Comme $k > 0$ alors $\Delta\rho < 0$ ce qui implique que le rayon de l'orbite diminue. **0.75pt** 1.5pt

Comme $V = \sqrt{\frac{GM_T}{\rho}}$ et ρ diminue alors le module de la vitesse augmente. **0.75pt**

Contrôle de rattrapage : Janvier 2014

Exercice I (10 points)

On considère le mouvement d'un point matériel M de masse m dans un référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$, supposé galiléen. Le point matériel M est soumis à l'action de la seule force $\vec{F}$ qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(x,y) = a\sqrt{x^2+y^2}$, a étant une constante postive.

1. Etablir l'expression de la force $\vec{F}$ à partir de son énergie potentielle $E_p(x,y)$. En déduire que $\vec{F}$ est une force centrale.
2. Montrer que le moment cinétique de M par rapport au point O dans $\mathcal{R}$, $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$, est conservé.

Dans la suite de l'exercice, la position du point matériel M est repérée par les coordonnées polaires (ρ, φ).

3. Etablir l'expression de la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}$ en fonction de ρ, $\dot{\rho}$ et $\dot{\varphi}$.
4. Déterminer l'expression $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$.
5. Etablir l'expression de l'énergie cinétique E_c de M. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m de M en fonction ρ, $\dot{\rho}$, $\sigma_o(M/\mathcal{R})$ et de la masse m.
6. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, montrer que l'équation du mouvement est donnée par $\ddot{\rho} - \frac{\sigma_o^2}{m^2\rho^3} + \frac{a}{m} = 0$ avec $\sigma_o = |\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})|$.

7. On considère le cas où M est animé d'un mouvement circulaire de rayon $\rho = \rho_0$. Que devient l'équation du mouvement ? En déduire que l'expression de ρ_0 est donnée par $\rho_0 = \left(\dfrac{\sigma_o^2}{am}\right)^{1/3}$.

8. Le point matériel M est soumis à des petites oscillations radiales telles que $\rho = \rho_0 + \epsilon$ avec $\epsilon \ll \rho_0$.

   8-a) A partir de l'éqquation du mouvement établie en 6, déterminer l'équation différentielle vérifiée par ϵ.
   On utilisera l'approximation : $\dfrac{1}{\left(1+\frac{\epsilon}{\rho_0}\right)^3} \simeq 1 - 3\dfrac{\epsilon}{\rho_0}$.

   8-b) En déduire que la pulsation propre ω_0 des petites oscillations radiales est égale à

$$\omega_0 = \left(\frac{27a^4}{m^2\sigma_o^2}\right)^{1/6}.$$

Exercice II (10 points)

On se propose d'étudier dans cet exercice le mouvement des chaises volantes d'un manège, voir photo ci-dessous(figure 4.5). Pour ce faire, on considère une chaise comme un point matériel M de masse m suspendu à un disque D par un fil de longueur inextensible L. Le disque (D) de rayon R tourne à une vitesse angulaire constante ω et reste à tout instant horizontal et à une hauteur h constante du sol, voir figure 4.6.
Considérons $\mathcal{R}(O, xyz)$ un référentiel fixe, supposé galiléen, muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{R}_1(O_1, x_1y_1z_1)$ un référentiel lié au disque D, que l'on utilise comme référentiel relatif, muni de la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 \equiv \vec{k})$. $\mathcal{R}_1$ tourne autour de l'axe Oz et le vecteur rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$ est donné par $\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\vec{k}$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ reste constament dans le plan $(O_1x_1z_1)$ et sa direction par rapport à la verticale est repérée par l'angle θ.
On donne $\overrightarrow{OO_1} = h\vec{k}$, $\overrightarrow{O_1A} = R\vec{i}_1$ et $\overrightarrow{AM} = L\vec{u}_1$. On pose $\vec{u}_3 = -\vec{j}_1$ ainsi la famille des vecteurs unitaires $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ forme une base orthonormée directe.

Toutes les expressions des grandeurs demandées doivent être exprimées dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

1. Déterminer les expressions des vecteurs $\vec{i}_1$ et $\vec{k}$ en fonction de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

2. Etablir les expressions des vecteurs vitesse relative $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$ et accélération relative $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$ de M.

3. Déterminer les expressions des accélérations d'entrainement, $\vec{\gamma}_e$ et de Coriolis, $\vec{\gamma}_c$, de M.

4. Donner les expressions des différentes forces exercées sur M dans $\mathcal{R}_1$.

5. Ecrire le principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué à M dans le référentiel $\mathcal{R}_1$.

6. Par projection du PFD sur la base :

   6-a) déterminer l'expression de la tension $\vec{T}$ exercée par le fil sur M.

   6-b) établir l'équation différentielle du mouvement de M.

FIGURE 4.3 – Manège de chaises volantes

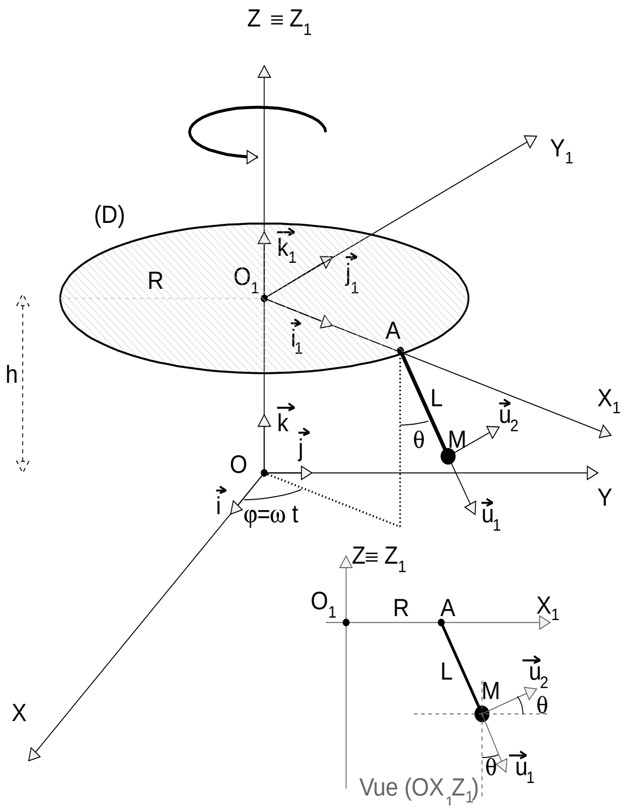


FIGURE 4.4 – Shéma utilisé pour résoudre l'exercice.

Corrigé du contrôle de rattrapage : Janvier 2014

EXERCICE I (10 points)

On considère le mouvement d'un point matériel M de masse m dans un référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$, supposé galiléen. Le point matériel M est soumis à l'action de la seule force $\vec{F}$ qui dérive du potentiel $E_p(x, y, z) = a\sqrt{x^2 + y^2}$, a étant une constante postive.

1pt

1. Etant donné que la force dérive du potentiel $E_p(x, y, z)$, alors

$$\vec{F} \quad = \quad -\overrightarrow{\text{grad}}\,(E_p(x, y, z)) = -\vec{\nabla}(E_p) \qquad \textbf{0.25pt}$$

sachant que le gradient s'exprime dans la base cartésienne comme suit [3] $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$,

3. On accepte la réponse si le gradient est exprimé dans la base cylindrique même s'elle n'est pas encore définie.

nous avons alors

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{F} = -a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - a\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} = -a\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} \quad \textbf{0.5pt}$$

avec $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

0.5pt Comme $\vec{F}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{OM}$ alors $\vec{F}$ est une force centrale **0.25pt**.

2. On utilise le théorème du moment cinétique

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F}) \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \left(-a\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}\right) \\ &= 0 \Longrightarrow \vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\text{Constante}} \quad \textbf{0.5pt} \end{aligned}$$

puisque $\vec{F}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.

1pt

3. Calculons l'expression de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$:

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi. \quad \textbf{1pt}$$

1pt

4. L'expression de $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ est

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) \\ &= m\rho\vec{e}_\rho \wedge (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) \\ &= m\rho^2\dot{\varphi}\vec{k}. \quad \textbf{1pt} \end{aligned}$$

1.5pt

5. L'expression de l'énergie cinétique est égale à

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right). \quad \textbf{0.5pt}$$

Sachant que le potentiel est donné par $E_p(\rho) = a\rho$, l'énergie mécanique est égale à

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) + a\rho. \quad \textbf{0.5pt}$$

Or $\dot{\varphi} = \frac{\sigma_o}{m\rho^2}$, ce qui donne

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{\sigma_o^2}{2m\rho^2} + a\rho. \quad \textbf{0.5pt}$$

1.5pt

6. La seule force à laquelle est soumis le point matériel M est conservative et l'énergie mécanique ne dépend pas explicitement du temps alors cette dernière est conservée et donc

$$\begin{aligned}\frac{dE_m}{dt} &= \frac{\partial E_m}{\partial \rho}\dot\rho + \frac{\partial E_m}{\partial \dot\rho}\ddot\rho \\ &= \dot\rho(a - \frac{\sigma_o^2}{m\rho^3}) + m\dot\rho\ddot\rho \\ &= 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot\rho = 0 \Longrightarrow \rho = \text{constant} \quad \textbf{0.5pt} \\ \text{ou } \ddot\rho - \frac{\sigma_o^2}{m^2\rho^3} + \frac{a}{m} = 0 \text{ et c'est l'équation recherchée.} \quad \textbf{1pt} \end{array}\right.\end{aligned}$$

7. Si M est animé d'un mouvement circulaire de rayon $\rho = \rho_0$, alors $\dot\rho = 0$ et $\ddot\rho = 0$ **0.25pt** 1pt
et l'équation du mouvement devient

$$-\frac{\sigma_o^2}{m^2\rho_0^3} + \frac{a}{m} = 0 \quad \textbf{0.5pt} \Longrightarrow \rho_0 = \left(\frac{\sigma_0}{am}\right)^{1/3}. \quad \textbf{0.25pt}$$

8. Si M est soumis à des petites oscillations radiales $\rho = \rho_0 + \epsilon \Longrightarrow \ddot\rho = \ddot\epsilon$ **0.5pt** 2.5pt

7-a) En substituant ρ par $\rho_0 + \epsilon$ dans l'équation du mouvement, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \ddot\epsilon - \frac{\sigma_0^2}{m^2\rho_0^3}\frac{1}{\left(1+\frac{\epsilon}{\rho_0}\right)^3} + \frac{a}{m} = 0 \\ \Longrightarrow\ & \ddot\epsilon - \frac{\sigma_0^2}{m^2\rho_0^3}\left(1 - 3\frac{\epsilon}{\rho_0}\right) + \frac{a}{m} = 0 \\ \Longrightarrow\ & \ddot\epsilon + 3\frac{a}{m\rho_0}\epsilon = 0 \\ \Longrightarrow\ & \ddot\epsilon + \left(\frac{27a^4}{m^2\sigma_0}\right)^{1/3}\epsilon = 0 \quad \textbf{1.5pt}\end{aligned}$$

et qui l'équation différentielle vérifiée par ϵ.

7-b) Les petites oscillations se font avec la pulsation propre ω_0 telle que

$$\omega_0 = \left(\frac{27a}{m^2\sigma_0}\right)^{1/6}. \quad \textbf{0.5pt}$$

Exercice II (10 points)

On se propose d'étudier dans cet exercice le mouvement des chaises volantes d'un manège, voir photo ci-dessous(figure 4.5). Pour ce faire, on considère une chaise comme un point matériel M de masse m suspendu à un disque D par un fil de longueur inextensible L. Le disque (D) de rayon R tourne à une vitesse angulaire constante ω et reste à tout instant horizontal et à une hauteur h constante du sol, voir figure 4.6.
Considérons $\mathcal{R}(O, xyz)$ un référentiel fixe, supposé galiléen, muni de la base orthonormée directe $(\vec\imath, \vec\jmath, \vec k)$. Soit $\mathcal{R}_1(O_1, x_1y_1z_1)$ un référentiel lié au disque D, que l'on utilise comme référentiel relatif, muni de la base $(\vec\imath_1, \vec\jmath_1, \vec k_1 \equiv \vec k)$. $\mathcal{R}_1$ tourne autour de l'axe de Oz et le vecteur rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$ est donné par $\vec\Omega(R_1/R) = \omega\vec k$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ reste constamment dans le plan $(O_1x_1z_1)$ et sa direction par rapport à la verticale est repérée par l'angle θ.
On donne $\overrightarrow{OO_1} = h\vec k$, $\overrightarrow{O_1A} = R\vec\imath_1$ et $\overrightarrow{AM} = L\vec u_1$. On pose $\vec u_3 = -\vec\jmath_1$ ainsi la famille des vecteurs unitaires $(\vec u_1, \vec u_2, \vec u_3)$ forme une base orthonormée directe.

Toutes les expressions des grandeurs demandées doivent être exprimées dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

FIGURE 4.5 – Manège de chaises volantes

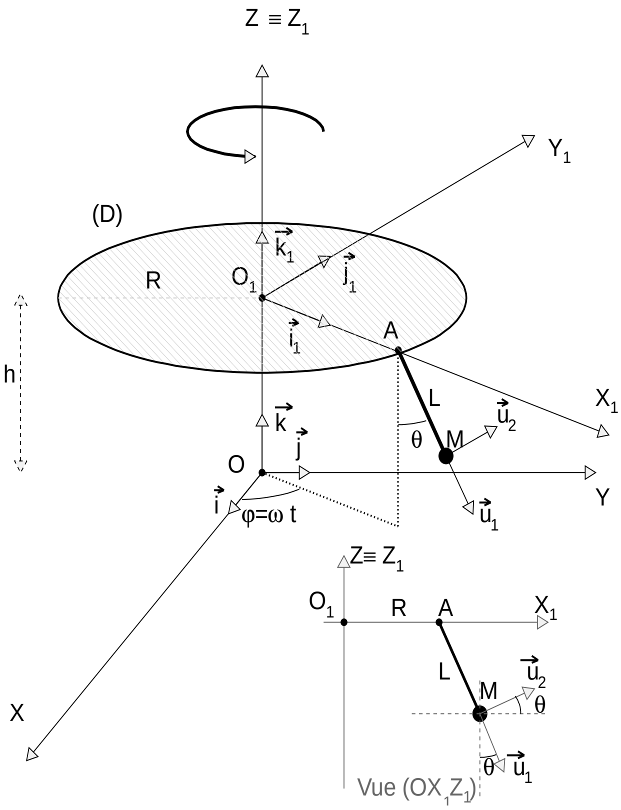


FIGURE 4.6 – Shéma utilisé pour résoudre l'exercice.

1pt 1. Calculons les expressions de $\vec{i}_1$ et de $\vec{k}$ en fonction $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

$$\vec{i}_1 = \sin\theta\vec{u}_1 + \cos\theta\vec{u}_2 \quad \textbf{0.5pt}$$

$$\vec{k} = -\cos\theta\vec{u}_1 + \sin\theta\vec{u}_2 \quad \textbf{0.5pt}.$$

2pt 2. Sachant que $\overrightarrow{O_1M} = L\vec{u}_1$, le vecteur vitesse relative est donné par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = L\left.\frac{d\vec{u}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = L\dot{\theta}\vec{u}_2. \quad \textbf{1pt}$$

Le vecteur accélération relative $\vec{\gamma}_r$ est donné par

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) = \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = -L\dot{\theta}^2\vec{u}_1 + L\ddot{\theta}\vec{u}_2. \quad \textbf{1pt}$$

2.5pt 3. Sachant que ω est constante, $\left.\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$, l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_e &= \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) \\
&= \omega\vec{k} \wedge \left(\omega\vec{k} \wedge \left(R\vec{i}_1 + L\vec{u}_1\right)\right) \\
&= \omega\vec{k} \wedge \left(R\omega\vec{j}_1 - L\omega\sin\theta\vec{u}_3\right) \\
&= \omega\vec{k} \wedge \left(R\omega + L\omega\sin\theta\right)\vec{j}_1 \\
&= -\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\vec{i}_1 \\
&= -\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\left(\sin\theta\vec{u}_1 + \cos\theta\vec{u}_2\right) \quad \textbf{1.5pt}
\end{aligned}$$

L'expression de l'accélération de Coriolis est donnée par

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_c &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) \\
&= 2\omega\vec{k} \wedge L\dot{\theta}\vec{u}_2 \\
&= -2L\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_3. \quad \textbf{1pt}
\end{aligned}$$

4. Les forces qui sont appliquée à M dans $\mathcal{R}_1$ sont : $\boxed{\text{1pt}}$

$$\begin{cases}
m\vec{g} = -mg\vec{k} = -mg\left(-\cos\theta\vec{u}_1 + \sin\theta\vec{u}_2\right) & \textbf{0.25pt} \quad \text{le poids ;} \\
\vec{T} = -T\vec{u}_1 & \textbf{0.25pt} \quad \text{la tension du fil ;} \\
\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e = m\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\left(\sin\theta\vec{u}_1 + \cos\theta\vec{u}_2\right) & \textbf{0.25pt} \quad \text{la force d'inertie d'entrainement ;} \\
\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c = 2mL\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_3 & \textbf{0.25pt} \quad \text{la force d'inertie de Coriolis}
\end{cases}$$

5. Comme $\mathcal{R}_1$ n'est pas galiléen, l'expression du PFD appliqué à M dans $\mathcal{R}_1$ est donnée par $\boxed{\text{1.5pt}}$

$$\begin{aligned}
m\vec{\gamma}(M\mathcal{R}_1) &= m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} \quad \textbf{0.5pt} \\
\Longrightarrow -mL\dot{\theta}^2\vec{u}_1 + mL\ddot{\theta}\vec{u}_2 &= -mg\left(-\cos\theta\vec{u}_1 + \sin\theta\vec{u}_2\right) - T\vec{u}_1 \\
&\quad + m\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\left(\sin\theta\vec{u}_1 + \cos\theta\vec{u}_2\right) + 2mL\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_3 \\
&= \left[mg\cos\theta - T + m\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\sin\theta\right]\vec{u}_1 \\
&\quad + \left[-mg\sin\theta + m\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\cos\theta\right]\vec{u}_2 + 2mL\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_3 \quad \textbf{1pt}
\end{aligned}$$

6. Par projection sur la base, on obtient $\boxed{\text{2pt}}$

6-a) l'expression de T : projection sur $\vec{u}_1$

$$mg\cos\theta - T + m\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\sin\theta = -mL\dot{\theta}^2$$

$$\Longrightarrow \quad T = mg\cos\theta + m\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\sin\theta + mL\dot{\theta}^2 \quad \textbf{1 pt}$$

6-b) l'expression de l'équation du mouvement : projection sur $\vec{u}_2$

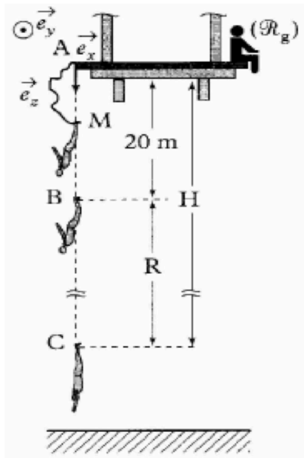
$$-mg\sin\theta + m\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\cos\theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta - \omega^2\left(\frac{R}{L} + \sin\theta\right)\cos\theta = 0 \quad \textbf{1pt}$$

Contrôle de Janvier 2015

Exercice 1 : Saut à la corde élastique

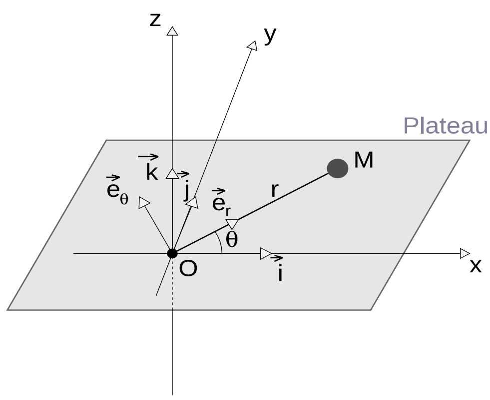
Un sportif de masse m, considéré comme un point matériel M, pratique le saut à l'aide d'une corde élastique du haut d'un pont, voir figure ci-contre. M tombe sans vitesse initiale du haut du pont en A avec une corde élastique, de longueur au repos $l_0 = 20$m, accrochée aux pieds.
Entre les points A et B, la corde élastique n'est pas encore tendue et M est en chute libre. A partir du point B, la corde élastique peut être considérée comme un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur $k = 120$N/m. On suppose que le référentiel $\mathcal{R}(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen. $\vec{e}_z$ est orienté vers le bas dans la direction de la chute de M. On néglige la résistance de l'air. La position du sportif est repérée par $\overrightarrow{AM} = z\vec{e}_z$. L'énergie potentielle de M au point A est nulle. On donne l'accélération de la pesanteur $g = 9.81\text{ms}^{-2}$.



1. Etablir les équations différentielles vérifiées par $z(t)$ en distinguant les cas où la corde élastique est tendue ou non. Donner les solutions générales sans calculer les contantes d'intégration.
2. Etablir l'expression de la vitesse atteinte par M au point B, $V_B = V_B(g, l_0)$. Donner son application numérique.
3. Déterminer l'expression de la hauteur totale H de la chute. Donner son application numérique dans le cas où $m = 70$Kg.

Exercice 2 : Mouvement à force centrale

Une bille M de masse m assimilée à un point matériel est attachée au point O par un fil tendu inextensible, voir figure ci-contre. M glisse sans frottement sur un plateau horizontal (Oxy) d'un repère $\mathcal{R}(Oxyz)$ supposé galiléen. La bille M reste tout au long de son mouvement sur le plan (Oxy). La position de M est repérée par les coordonées polaires r et θ, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. A l'instant initial $t = 0$, M est lancée à partir d'une position M_0 située à la distance r_0 du point O avec une vitesse initiale $\vec{V}_0(M/\mathcal{R}) = V_0\vec{e}_\theta$, et l'on tire le fil de manière à rapprocher régulièrement M du point O tel que $r(t) = r_0 - V_rt$, où V_r est la vitesse radiale qui est constante et postive.



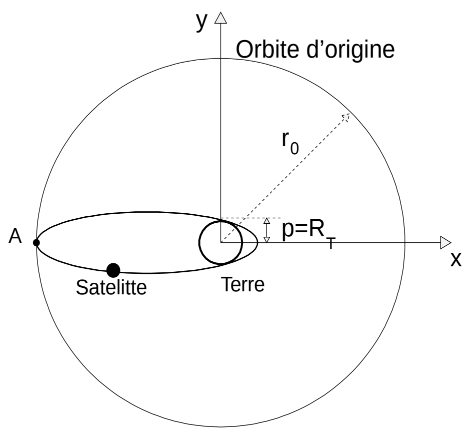
On admet que le fil exerce la force $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ sur M et qu'il reste tendu tout au long du mouvement, T étant le module de $\vec{T}$.

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

1. Déterminer les expressions des vecteurs vitesse et accélération de M dans $\mathcal{R}$.
2. Faire le bilan des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}$.
3. Etablir l'expression du moment cinétique de M par rapport au point O dans $\mathcal{R}$, $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$, et trouver sa valeur à l'instant $t = 0$, $\vec{\sigma}_0$.
4. Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans $\mathcal{R}$ et :
   a- Déterminer l'expression de la réaction $\vec{R}$ du plateau sur M.
   b- Montrer que le moment cinétique $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ est conservé et déduire la constante des aires C.
   c- Projeter le PFD sur $\vec{e}_\theta$ et montrer que $r^2\dot{\theta}$ est constante. En déduire que l'équation horaire $\theta(t)$ est donnée par :
   $$\theta(t) = \frac{V_0 t}{r_0 - V_r t}$$
   sachant que $\theta(t = 0) = 0$.
   d- Projeter le PFD sur $\vec{e}_r$ et déterminer l'expression de $T = T(r)$.
5. Etablir l'expression de l'énergie cinétique $E_c(M/\mathcal{R})$ et celle de l'énergie potentielle $E_p(M\mathcal{R})$, sachant que $E_p(r \to +\infty) = 0$. En déduire l'expression de l'énergie mécanique $E_m(M/\mathcal{R})$. Conclure.

Exercice 3 : Retombée d'un satellite sur Terre

Considérons un satellite S de masse m touché par une panne et on souhaite le faire retomber sur la Terre dans une zone non habitée. L'orbite du satellite est circulaire et de rayon r_0. Pour cela, à partir d'un point A de son orbite d'origine, on réduit sa vitesse brutalement et l'on souhaite qu'il retombe sur la Terre après avoir tourné d'un angle de $90°$ dans sa nouvelle orbite elliptique, voir figure ci-contre. On note par R_T, M_T respectivement le rayon et la masse de la Terre. G est la constante gravitationnelle.
Le point A sur l'orbite d'origine est l'apogée de la nouvelle orbite elliptique. On note par (ρ, φ) les coordonnées polaires du satelitte dans son orbite elliptique. Le paramètre p de l'orbite elliptique est $p = R_T$.



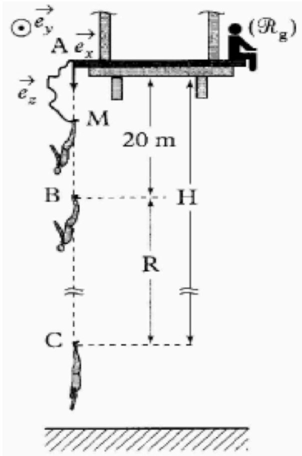
1. Quelles sont les coordonnées polaires ρ_A et φ_A du point A ?
2. En déduire l'excentricité e en fonction de r_0 et R_T.
3. En utilisant l'expression de e établie à la question 2., montrer que l'expression de l'énergie mécanique E_m est donnée par :
$$E_m = -\frac{GM_T m}{2}\left(\frac{2r_0 - R_T}{r_0^2}\right).$$
4. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, quelle est la vitesse à donner au satellite en A pour qu'il s'écrase à l'endroit souhaité indiqué sur la figure ?

On donne : $E_m = \frac{GM_T m}{2p}\left(e^2 - 1\right)$.

Corrigé du contrôle de Janvier 2015

Exercice 1 : Saut à la corde élastique (5pt)

Un sportif de masse m, considéré comme un point matériel M, pratique le saut à l'aide d'une corde élastique du haut d'un pont, voir figure ci-contre. M tombe sans vitesse initiale du haut du pont en A avec une corde élastique, de longueur au repos $l_0 = 20$m, accrochée aux pieds.
Entre les points A et B, la corde élastique n'est pas encore tendue et M est en chute libre. A partir du point B, la corde élastique peut être considérée comme un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur $k = 120$N/m. On suppose que le référentiel $\mathcal{R}(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen. $\vec{e}_z$ est orienté vers le bas dans la direction de la chute de M. On néglige la résistance de l'air. La position du sportif est repérée par $\overrightarrow{AM} = z\vec{e}_z$. L'énergie potentielle de M au point A est nulle. On donne l'accélération de la pesanteur $g = 9.81\text{ms}^{-2}$.



1.5p

1. La position de S est repérée par $\overrightarrow{AS} = z\vec{e}_z$. Les équations différentielles vérifiées par $z(t)$ sont obtenues en distinguant les cas suivants :
   — pour $0 < z < l_0$, S est en chute libre et la résistance de l'air est négligée donc

$$m\ddot{z}\vec{e}_z = mg\vec{e}_z \Longrightarrow \ddot{z} \quad = \quad g. \qquad \mathbf{0.5p}$$

   — pour $z > l_0$, S est soumis au poids et à la force de l'élastique, donc

$$m\ddot{z}\vec{e}_z \quad = \quad mg\vec{e}_z - k(z - l_0)\vec{e}_z \Longrightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}l_0 \qquad \mathbf{0.5p}$$

   qui est une équation différentielle de second ordre à coefficients constants et avec second membre.

   Quant aux solutions générales, elles sont données par

   — si $z < l_0 \Longrightarrow z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + k_1 t + k_2$ **0.25p** ;
   — si $z > l_0$: la solution générale est la somme de la solution sans second membre $z_{ssm}(t)$ et une solution particulière $z_p(t)$. En effet, la solution sans second membre s'obtient en résolvant l'équation caractéristique $r^2 + \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = \pm i\omega_0$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. La solution est alors

$$z_{ssm}(t) = a\cos(\omega_0 t - \psi)$$

   La solution particulière est $z_p(t) = \frac{m}{k}g - l_0$ et la solution générale a la forme

$$z(t) = a\cos(\omega_0 t - \psi) + \frac{m}{k}g - l_0 \qquad \mathbf{0.25p}$$

   .

1.5p

2. **Cette question peut être traitée par trois méthodes, veuillez bien en tenir compte.**

   Méthode 1 : Théorème de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique du système est $E_m = E_c + E_p$. Pour $z < l_0$, la seule force qui travaille est le poids. Son énergie potentielle est

$$\begin{aligned} dE_p &= -m\vec{g} \cdot d\overrightarrow{AS} = -mg\vec{e}_z \cdot dz\vec{e}_z = -mgdz \\ \Longrightarrow E_p &= -mgz + k \end{aligned}$$

avec $k = E_p(z = 0) = E_p(A) = 0 \Longrightarrow E_p = -mgz$ **0.25p.**

L'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$ et donc $E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$ **0.25p.** L'énergie mécanique est conservée car la seule force qui travaille est le poids et il est conservatif[4]. Sachant que l'énergie mécanique initiale $E_m(t = 0) = E_m(A) = E_c(A) + E_p(A) = 0$, la conservation de l'énergie mécanique donne

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= 0 \Longrightarrow E_m(B) = E_m(A) = 0 \quad \textbf{0.25p} \\ \Longrightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 - mgl_0 &= 0 \Longrightarrow V_B = \sqrt{2gl_0} \quad \textbf{0.5p.} \end{aligned}$$

A.N : $V_B = \sqrt{2 \times 9.81 \times 20} \sim 19.81\mathbf{ms}^{-1}$ **0.25p.**

Méthode 2 : Théorème de l'énergie cinétique

Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} dE_c &= \delta W(m\vec{g}) \\ \Longrightarrow dE_c &= mg\vec{e}_k \cdot dz\vec{e}_k \quad \textbf{0.25p} \\ \Longrightarrow E_c(B) - E_c(A) &= mg\int_{z_A}^{z_B} dz = mgz_B \quad \textbf{0.5p} \\ \Longrightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 &= mgl_0 \Longrightarrow V_B = \sqrt{2gl_0} \quad \textbf{0.5p} \end{aligned}$$

A.N : $V_B = \sqrt{2 \times 9.81 \times 20} \sim 19.81\mathbf{ms}^{-1}$ **0.25p.**

4. On accepte aussi la réponse : E_m ne dépend pas explicitement du temp.

Méthode 3 : Equation horaire

Dans ce cas, nous avons, sachant que $k_1 = 0$ **et** $k_2 = 0$**,**

$$z(t) \quad = \quad \frac{1}{2}gt^2 \text{ et } \dot{z}(t) = gt \quad \textbf{0.25p}$$

Comme $z_B = l_0 = \frac{1}{2}gt_B^2 \Longrightarrow t_B = \sqrt{\frac{2l_0}{g}}$ **0.5p alors**

$$V_B \quad = \quad \dot{z}_B = gt_B = g\sqrt{\frac{2l_0}{g}} = \sqrt{2gl_0} \quad \textbf{0.5p}$$

A.N : $V_B = \sqrt{2 \times 9.81 \times 20} \sim 19.81\mathbf{ms}^{-1}$ **0.25p.**

3. **Cette question peut être traitée également par deux méthodes.**

2.0p

Méthode 1 : Théorème de l'énergie mécanique

Pour ce faire nous avons besoin de l'énergie potentielle de la force élastique $\vec{F} = -k(z - l_0)\vec{e}_z$. D'où

$$dE_p(\vec{F}) \quad = \quad -\vec{F} \cdot d\overrightarrow{AS} = k\,(z - l_0)\,dz \Longrightarrow E_p(\vec{F}) = \frac{1}{2}\,(z - l_0)^2 + \text{Cst}.$$

Comme $E_p(\vec{F}) = 0$ pour $z = l_0$ alors Cst=0. D'où l'energie potentielle de S est donnée par $E_p = E_p(m\vec{g}) + E_p(\vec{F}) = -mgz + \frac{1}{2}k\,(z - l_0)^2$ **0.25p**
et l'énergie mécanique est

$$E_m \quad = \quad \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2}k\,(z - l_0)^2 \quad \textbf{0.25p.}$$

Au point C, la vitesse de S est nulle et donc son énergie mécanique est réduite à son énergie potentielle $E_m(C) = E_p(C) = -mgz_C + \frac{1}{2}k(z_C - l_0)^2$ **0.25p.**
La conservation de l'énergie mécanique donne, sachant que $z_C = H$,

$$\begin{aligned} E_m(C) = E_m(A) &= 0 \quad \textbf{0.25p} \\ \Longrightarrow -mgH + \frac{1}{2}k(H - l_0)^2 &= 0 \\ \Longrightarrow H^2 - 2H(l_0 + \frac{m}{k}g) + l_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

qui est un polynôme de second degré dont le discriminant réduit est égal à

$$\Delta' = (l_0 + \frac{m}{k}g)^2 - l_0^2 = \frac{m}{k}g\left(2l_0 + \frac{m}{k}g\right) > 0.$$

Les deux racines sont

$$H_\pm \quad = \quad (l_0 + \frac{m}{k}g) \pm \sqrt{\frac{m}{k}g\left(2l_0 + \frac{m}{k}g\right)} \quad \textbf{0.25p}$$

On vérifie que $H_- < l_0$ ce qui l'élimine puisque $H > l_0$ **0.25p** et donc la solution est

$$H = H_+ = (l_0 + \frac{m}{k}g) + \sqrt{\frac{m}{k}g\left(2l_0 + \frac{m}{k}g\right)} \quad \textbf{0.25p}$$

A.N : $H = (20. + \frac{70.}{120.} \times 9.81) + \sqrt{\frac{70.\times 9.81}{120.}[2 \times 20. + \frac{70.\times 9.81}{120.}]} = 41.9$**m.** **0.25p**

Méthode 2 : Théorème de l'énergie cinétique

Dans ce cas les forces qui travaillent sont le poids $mg\vec{e}_z$ et la force élastique $\vec{F} = -k(z - l_0)\vec{e}_z$ et nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
dE_c &= \delta W(m\vec{g}) + \delta W(\vec{F}) \\
&= \left(m\vec{g} + \vec{F}\right) \cdot d\overrightarrow{AS} \\
&= (mg\vec{e}_z - k(z - l_0)\vec{e}_z) \cdot dz\vec{e}_z \\
&= mgdz - k(z - l_0)dz \\
\Longrightarrow E_c(C) - E_c(B) &= \int_{z_B}^{z_C} (mg - k(z - l_0))\, dz. \quad \textbf{0.5p}
\end{aligned}$$

Comme $V_C = 0$ et $z_C - z_B = H - l_0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}mV_B^2 &= mg\,(H - l_0) - \frac{1}{2}k\left[(z_C - l_0)^2 - (z_B - l_0)^2\right] \\
\Longrightarrow -mgl_0 &= mg(H - l_0) - \frac{1}{2}k(H - l_0)^2 \quad \textbf{0.25p} \\
\Longrightarrow -mgH + \frac{1}{2}k(H - l_0)^2 &= 0 \\
\Longrightarrow H^2 - 2H(l_0 + \frac{m}{k}g) + l_0^2 &= 0 \quad \textbf{0.25p}
\end{aligned}$$

qui est un polynôme de second degré dont le discriminant réduit est égal à

$$\Delta' = (l_0 + \frac{m}{k}g)^2 - l_0^2 = \frac{m}{k}g\left(2l_0 + \frac{m}{k}g\right) > 0.$$

Les deux racines sont

$$H_\pm = (l_0 + \frac{m}{k}g) \pm \sqrt{\frac{m}{k}g\left(2l_0 + \frac{m}{k}g\right)} \quad \textbf{0.25p}$$

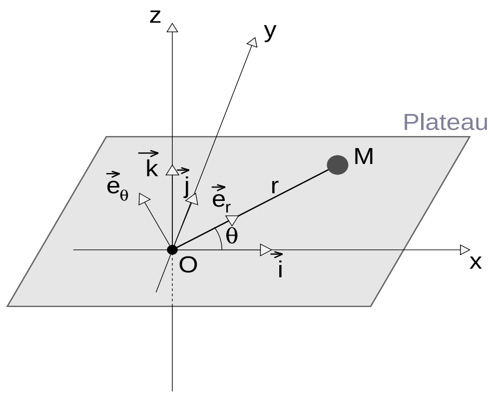
On vérifie que $H_- < l_0$ ce qui l'élimine puisque $H > l_0$ 0.25p et donc la solution est

$$H = H_+ = (l_0 + \frac{m}{k}g) + \sqrt{\frac{m}{k}g\left(2l_0 + \frac{m}{k}g\right)} \quad \textbf{0.25p}$$

A.N : $H = (20. + \frac{70.}{120.} \times 9.81) + \sqrt{\frac{70.\times 9.81}{120.}[2 \times 20. + \frac{70.\times 9.81}{120.}]} = 41.9$**m.** **0.25p**

Exercice 2 : Mouvement à force centrale (11p)

Une bille M de masse m assimilée à un point matériel est attachée au point O par un fil tendu inextensible, voir figure ci-contre. M glisse sans frottement sur un plateau horizontal (Oxy) d'un repère $\mathcal{R}(Oxyz)$ supposé galiléen. La bille M reste tout au long de son mouvement sur le plan (Oxy). La position de M est repérée par les coordonées polaires r et θ, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. A l'instant initial $t = 0$, M est lancée à partir d'une position M_0 située à la distance r_0 du point O avec une vitesse initiale $\vec{V}_0(M/\mathcal{R}) = V_0\vec{e}_\theta$, et l'on tire le fil de manière à rapprocher régulièrement M du point O tel que $r(t) = r_0 - V_rt$, où V_r est la vitesse radiale qui est constante et postive.



On admet que le fil exerce la force $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ sur M et qu'il reste tendu tout au long du mouvement, T étant le module de $\vec{T}$.

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$**.**

Les résultats finaux doivent être considérés justes même si r **n'est pas substitué par** $(r_0 - V_rt)$**.**

1.0p

1. Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. L'expression du vecteur vitesse est

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$= -V_r\vec{e}_r + (r_0 - V_rt)\,\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \textbf{0.5p}$$

et l'expression du vecteur accélération est donnée par

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d}{dt}\vec{V}(M/\mathcal{R})\right|_{\mathcal{R}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$= -\left(r_0 - V_rt\right)\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \left[(r_0 - V_rt)\,\ddot{\theta} - 2V_r\dot{\theta}\right]\vec{e}_\theta. \quad \textbf{0.5p}$$

1.5p

2. Les forces appliquées à la bille M sont

— Le poids de la bille $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$ **0.5p** ;

— La réaction du plateau sur la bille, elle est normale au plateau car la bille se déplace sans frottement et donc $\vec{R} = R\vec{k}$ **0.5p** ;

— La force qu'exerce le fil sur la bille, $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ **0.5p**.

1.0p

3. L'expression du moment cinétique de M par rapport à O dans $\mathcal{R}$ est donnée par

$$\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R})$$

$$= r\vec{e}_r \wedge m\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right) = mr^2\dot{\theta}\vec{k} = m\left(r_0 - V_rt\right)^2\dot{\theta}\vec{k}. \quad \textbf{0.5p}$$

A l'instant $t = 0$, $\vec{\sigma}_0 = \overrightarrow{OM}_0 \wedge m\vec{V}_0 = mr_0V_0\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = mr_0V_0\vec{k}$ 0.5p.

5p

4. Le PFD :

$$\begin{aligned} m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} \\ \Longrightarrow m\left[-r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta\right] &= -mg\vec{k} - T\vec{e}_r + R\vec{k} \\ m\left\{-(r_0 - V_rt)\,\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \left[(r_0 - V_rt)\,\ddot{\theta} - 2V_r\dot{\theta}\right]\vec{e}_\theta\right\} &= -mg\vec{k} - T\vec{e}_r + R\vec{k} \end{aligned}$$ 0.5p

a- En projetant le PFD sur $\vec{k}$ nous obtenons $-mg + R = 0 \Longrightarrow R = mg$ 0.5p.

b- Appliquons le théorème du moment cinétique

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \mathcal{M}_o(\vec{T} + \vec{P} + \vec{R}) = \mathcal{M}_o(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = -rT\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0} \\ \Longrightarrow \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{Constante}. \end{aligned}$$ 1.0p

La constante des aires est $C = \sigma_0/m = r_0V_0 = r^2\dot{\theta}$ 0.5p.

c- La projection du PFD sur $\vec{e}_\theta$ donne

$$\begin{aligned} r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= 0 \\ r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} &= 0 \\ \Longrightarrow r^2\frac{d\dot{\theta}}{dt} + \frac{dr^2}{dt^2}\dot{\theta} &= 0 \\ \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) &= 0 \Longrightarrow r^2\dot{\theta} = \text{constante} \end{aligned}$$ 0.5p

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} r^2\dot{\theta} &= C = \frac{\sigma_0}{m} = r_0V_0 \\ \Longrightarrow \dot{\theta} &= \frac{r_0V_0}{(r_0 - V_rt)^2} \\ \Longrightarrow \theta &= +\frac{r_0V_0}{V_r\,(r_0 - V_rt)} + K \end{aligned}$$ 0.5p

or $\theta(t = 0) = 0 = +\frac{V_0}{V_r} + K \Longrightarrow K = -\frac{V_0}{V_r}$, ce qui donne

$$\theta(t) = \frac{V_0}{V_r}\left(\frac{r_0}{(r_0 - V_rt)} - 1\right) = \frac{V_0t}{r_0 - V_rt}.$$ 0.5p

d- La projection du PFD sur $\vec{e}_r$ donne

$$\begin{aligned} -mr\dot{\theta}^2 = -T \Longrightarrow T &= mr\left(\frac{r_0V_0}{r^2}\right)^2 \\ &= m\frac{r_0^2V_0^2}{r^3} \end{aligned}$$ 1.0p

2.5p

5. L'expression de l'énergie cinétique est donnée par

$$E_C(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}m\left(V_r^2 + \frac{r_0^2V_0^2}{r^2}\right). \quad \textbf{1.0p}$$

Quant à l'énergie potentielle, la seule force qui travaille est $\vec{T}$. Sachant que $d\overrightarrow{OM} = rd\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta$, le travail élémentaire de $\vec{T}$ est

$$\delta W(\vec{T}) = \vec{T}\cdot d\overrightarrow{OM}$$
$$= -m\frac{r_0^2V_0^2}{r^3}\vec{e}_r\cdot(dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta)$$
$$= -m\frac{r_0^2V_0^2}{r^3}dr \quad \textbf{0.25p.}$$

Or $dE_p = -\delta W$, ce qui implique

$$dE_p = m\frac{r_0^2V_0^2}{r^3}dr \Longrightarrow E_p = -m\frac{r_0^2V_0^2}{2r^2} + K$$

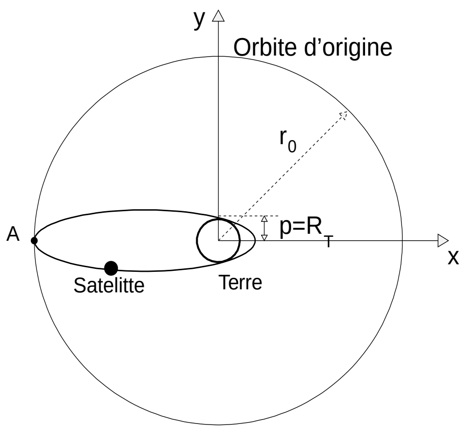
et comme $E_p(r\to+\infty)\to 0 \Longrightarrow K = 0 \Longrightarrow E_p = -m\frac{r_0^2V_0^2}{2r^2}$ **0.5p.**
L'énergie mécanique est ainsi égale à

$$E_m = E_c + E_p$$
$$= \frac{1}{2}m\left(V_r^2 + \frac{r_0^2V_0^2}{r^2}\right) - m\frac{r_0^2V_0^2}{2r^2} = \frac{1}{2}mV_r^2 \quad \textbf{0.5p}$$

On note que E_m est constante et donc conservée. **0.25p**

Exercice 3 : Retombée d'un satellite sur Terre (4p+Bonus 1p)

Considérons un satellite S de masse m touché par une panne et on souhaite le faire retomber sur la Terre dans une zone non habitée. L'orbite du satellite est circulaire et de rayon r_0. Pour cela, à partir d'un point A de son orbite d'origine, on réduit sa vitesse brutalement et l'on souhaite qu'il retombe sur la Terre après avoir tourné d'un angle de 90° dans sa nouvelle orbite elliptique, voir figure ci-contre. On note par R_T, M_T respectivement le rayon et la masse de la Terre. G est la constante gravitationnelle.
Le point A sur l'orbite d'origine est l'apogée de la nouvelle orbite elliptique. On note par (ρ,φ) les coordonnées polaires du satelitte dans son orbite elliptique. Le paramètre p de l'orbite elliptique est $p = R_T$.



1. Les coordonnées polaires du point A sont $\boxed{1.0\text{p}}$

$$\varphi_A \;=\; \pi \quad \textbf{0.5p} \text{ et } \rho_A = \rho(\varphi = \pi) = \frac{p}{1 + e\cos\pi} = \frac{p}{1-e}. \quad \textbf{0.5p}$$

2. A appartient à l'orbite d'origine donc $\|\overrightarrow{OA}\| = r_0$ **0.5p** et nous avons aussi $\|\overrightarrow{OA}\| = \rho_A$, ce qui donne en utilisant l'expression de ρ_A établie à la question précédente $\boxed{1.5\text{p}}$

$$\rho_A \;=\; r_0 = \frac{p}{1-e} = \frac{R_T}{1-e} \Longrightarrow e = 1 - \frac{R_T}{r_0}. \quad \textbf{1.0p}$$

3. En utilisant l'expression de l'énergie mécanique en fonction de e et en substituant e par son expression en fonction de r_0 et R_T, nous obtenons $\boxed{1.0\text{p}}$

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{GM_Tm}{2p}\left(e^2 - 1\right) \\ &= \frac{GM_Tm}{2R_T}\left(\left[1 - \frac{R_T}{r_0}\right]^2 - 1\right) \\ &= \frac{GM_Tm}{2R_T}\left(\left[\frac{R_T}{r_0}\right]^2 - 2\frac{R_T}{r_0}\right) \\ &= -\frac{GM_Tm}{2}\left(\frac{2r_0 - R_T}{r_0^2}\right) \quad \textbf{1.0p} \end{aligned}$$

qui est la relation recherchée.

4. L'énergie mécanique en A est $\boxed{1.5\text{p}}$

$$E_m(A) \;=\; \frac{1}{2}mV_A^2 - \frac{GM_Tm}{r_0}. \quad \textbf{0.5p}$$

L'énergie mécanique se conserve ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mV_A^2 - \frac{GM_Tm}{r_0} &= -\frac{GM_Tm}{2}\left(\frac{2r_0 - R_T}{r_0^2}\right) \\ \Longrightarrow \frac{1}{2}mV_A^2 &= -\frac{GM_Tm}{2}\left(\frac{2r_0 - R_T}{r_0^2}\right) + \frac{GM_Tm}{r_0} \\ \Longrightarrow \frac{1}{2}mV_A^2 &= \frac{GM_Tm}{2}\frac{R_T}{r_0^2} \\ \Longrightarrow V_A &= \frac{\sqrt{GM_TR_T}}{r_0} \quad \textbf{1.0p} \end{aligned}$$

Contrôle de rattrapage : Février 2015

Questions de cours

Considérons un point matériel M animé d'un mouvement dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, xyz)$. Les vecteurs vitesse et accélération de M dans $\mathcal{R}$ sont respectivement $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$. M est soumis à une force conservative $\vec{F}_c$ et à une force non conservative $\vec{F}_{nc}$.

1. Enoncer et démontrer le théorème du moment cinétique.
2. Enoncer et démontrer le théorème de l'énergie mécanique.

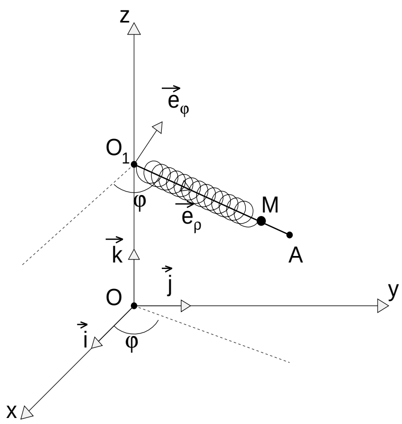
Exercice

Soit $\mathcal{R}(O, xyz)$ le repère lié au centre du soleil et considéré galiléen. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la base cartésienne liée à $\mathcal{R}$. Considérons une comète M, que l'on peut décrire comme un point matériel, qui se déplace dans le système solaire et reste dans le plan (Oxy). Le vecteur position de M a pour expression $\overrightarrow{OM} = t(1 - \frac{1}{2}t)\vec{i} + (t-1)\vec{j}$ où t représente le temps.

1. Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et du vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ en fonction du temps t.
2. Etablir les expressions des vecteurs tangent $\vec{\tau}$ et normal $\vec{n}$ à la trajectoire.
3. Déterminer les expressions de l'accélération tangentielle $\vec{\gamma}_t$ et de l'accélération normale $\vec{\gamma}_n$.
4. Montrer que la trajectoire est une parabole. Rappeler la valeur de l'excentricité dans le cas d'une parabole. Déterminer le paramètre p de la parabole et la distance minimale entre la comète et le soleil. Que peut-on dire de la force exercée sur M ?

Problème

Un anneau assimilé à un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur un axe (O_1A). Le point M est attaché à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est fixée au point O_1, voir figure ci-contre. L'axe (O_1A) est horizontal et animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire constante ω. Le point O_1 est repéré par $\overrightarrow{OO_1} = (V_0 t)\vec{k}$, t étant le temps et V_0 est une constante positive.



Soient $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère du laboratoire supposé galiléen et $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ le repère lié à l'axe (O_1A). Le point M est repéré dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ par $\overrightarrow{O_1M} = \rho\vec{e}_\rho$ et $(\widehat{\vec{i}, \vec{e}_\rho}) = \varphi = \omega t$.

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$**.**

1. Etablir les expressions du vecteur vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et du vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ de M dans $\mathcal{R}$.
2. Faire le bilan des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}$ en donnant l'expression de chacune d'elles.
3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans $\mathcal{R}$. Projeter la relation vectorielle obtenue respectivement sur $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ et $\vec{k}$ et déterminer
   a- les composantes de la réaction $\vec{R}$ de l'axe sur M ;
   b- En déduire que l'équation différentielle vérifiée par ρ est donnée par :
$$\ddot{\rho} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\rho = \frac{k}{m}l_0.$$
4. Etablir l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})$ de M par rapport à O dans $\mathcal{R}$.
5. Déterminer les moments de chacune des forces appliquées à M par rapport à O dans $\mathcal{R}$.
6. Appliquer le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}$ et retrouver
   a- les composantes de la réaction $\vec{R}$ de l'axe sur M ;
   b- l'équation différentielle vérifiée par ρ.

Dans la suite de l'exercice, nous travaillerons dans le repère $\mathcal{R}_1$. On rappelle que $\mathcal{R}_1$ n'est pas un repère galiléen.

7. Etablir les expressions du vecteur vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$, du vecteur accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e$ et du vecteur accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c$.
8. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique $E_c(M/\mathcal{R}_1)$ de M dans $\mathcal{R}_1$.
9. Faire le bilan des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}_1$ en donnant l'expression de chacune d'elles.
10. Déterminer le travail élémentaire δW de chacune des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}_1$.
11. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $E_p(M/\mathcal{R}_1)$ de M dans $\mathcal{R}_1$.
12. En déduire l'expression de l'énergie mécanique $E_m(M/\mathcal{R}_1)$ de M dans $\mathcal{R}_1$.
13. $E_m(M/\mathcal{R}_1)$ est-elle conservée ? Justifier la réponse.
14. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer l'équation du mouvement de M.
15. Déterminer la position d'équilibre et étudier sa stabilité.

Corrigé du contrôle de rattrapage de février 2015

Questions de Cours (3Pt)

1. Ennoncé du théorème **0.5p**
   La dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ d'un point matériel M dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ est égale au moment de la résultante des forces extérieures $\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F})$
$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F}).$$
   Accépter tout autre énoncé équivalent.

Démonstration **1.0p**

Appliquons la dérivée par rapport au temps au moment cinétique dans un référentiel galiléen, $\mathcal{R}$,

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

comme $\vec{p} = m\vec{V}(M/\mathcal{R})$ alors

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, $d\vec{p} = \vec{F}dt$, on obtient

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}.$$

2. Enoncé du théorème : **1.5p**

   La variation de l'énergie mécanique d'un système matériel entre deux point A et B de la trajectoire est égale au travail des forces non conservatives, qui s'exercent sur ce système, sur le parcours entre ces deux points

   $$E_m^B - E_m^A = W_A^B(F_{nc})$$

   ou sous sa forme différentielle

   $$dE_m = dE_c + dE_p = \delta W(F_{nc}).$$

   Accépter toute autre réponse correcte.

   Démonstration : **1.0p**

   Partant du PFD :

$$\begin{aligned}
m\left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \vec{F}_c + \vec{F}_{nc} \\
\Longrightarrow m\left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \cdot \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} dt &= (\vec{F}_c + \vec{F}_{nc}) \cdot d\overrightarrow{OM} \\
\Longrightarrow d\left(\frac{1}{2}V^2(M/\mathcal{R})\right) - \vec{F}_c \cdot d\overrightarrow{OM} &= \vec{F}_{nc} \cdot d\overrightarrow{OM} \\
\Longrightarrow dE_c(M/\mathcal{R}) + dE_p(M/\mathcal{R}) &= \delta W(\vec{F}_{nc}) \\
\Longrightarrow d\left(E_c(M/\mathcal{R}) + E_p(M/\mathcal{R})\right) &= \delta W(\vec{F}_{nc}) \\
\Longrightarrow dE_m(M/\mathcal{R}) &= \delta W(\vec{F}_{nc}) \\
\Longrightarrow E_m^B - E_m^A &= W_A^B.
\end{aligned}$$

   Accépter toute autre approche ou démonstration correcte.

Exercice (3pt+1Bonus)

1.0p

1. Les expressions de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps sont données par $\vec{V}(M/\mathcal{R}) =$

$\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = (1-t)\vec{i} + \vec{j}$ **0.5p**

$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = -\vec{i}$ **0.5p**

$\boxed{0.5}$

2. Les expressions de $\vec{\tau}$ et de $\vec{n}$ sont égales à

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}(M/\mathcal{R})}{|\vec{V}|} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2+1}}\left((1-t)\vec{i} + \vec{j}\right) = \frac{1}{\sqrt{t^2-2(t-1)}}\left((1-t)\vec{i} + \vec{j}\right) \quad \textbf{0.25p}$$

et

$$\vec{n} = \vec{k} \wedge \vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{t^2-2(t-1)}}\left(-\vec{i} + (1-t)\vec{j}\right) \quad \textbf{0.25p}$$

$\boxed{1.0p}$

3. Les expressions de l'accélération tangentielle et de l'accélération normales sont données par

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_t &= \left(\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{\tau}\right)\vec{\tau} \\ &= \frac{t-1}{t^2-2(t-1)}\left((1-t)\vec{i} + \vec{j}\right) \quad \textbf{0.5p}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_n &= \left(\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{n}\right)\vec{n} \\ &= \frac{1}{t^2-2(t-1)}\left(-\vec{i} + (1-t)\vec{j}\right) \quad \textbf{0.5p}\end{aligned}$$

Considérer tout autre réponse correcte.

$\boxed{1.5p}$

4. L'équation de la trajectoire s'obtient comme suit

$$x = -\frac{1}{2}t^2 + t = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{2} \Longrightarrow y^2 + 2x - 1 = 0 \quad \textbf{0.25}$$

qui est l'équation d'une parabole **0.25p.**

L'excentricité dans ce cas est $e = 1$ **0.25p.**
L'équation cartésienne de la parabole en fonction du paramètre p (voir Cours) est $y^2 + 2px = p \Longrightarrow p = 1$ **0.25p.** La distance minimale entre la comète et le soleil est obtenue pour $y = 0 \Longrightarrow x_{min} = 1/2$ **0.25.**

La force exercée sur M est centrale car la trajectoire est une conique **0.25p.**

Problème (14p)

$\boxed{1.0p}$

1. Les expressions de la vitesse et de l'accélération de M dans $\mathcal{R}$ sont

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + V_0\vec{k} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi + V_0\vec{k} \quad \textbf{0.5p} \\ \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left(\ddot{\rho} - \rho\omega^2\right)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi. \quad \textbf{0.5p}\end{aligned}$$

0.75p

2. Le bilan des forces

— le poids $m\vec{g} = -mg\vec{k}$ **0.25p** ;

— la force de rappel $\vec{F} = -k\,(\rho - l_0)\,\vec{e}_\rho$ **0.25p**.

— la réaction $\vec{R} = R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{k}$ **0.25p**, les frottements étant négligeables.

1.25p

3. Le PFD

$$\begin{aligned} m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \vec{F} + \vec{R} + m\vec{g} \\ m\left[\left(\ddot{\rho} - \rho\omega^2\right)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi\right] &= -k\,(\rho - l_0)\,\vec{e}_\rho + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{k} - mg\vec{k} \\ m\left[\left(\ddot{\rho} - \rho\omega^2\right)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi\right] &= -k\,(\rho - l_0)\,\vec{e}_\rho + R_\varphi\vec{e}_\varphi - (mg - R_z)\vec{k} \quad \textbf{0.5p} \end{aligned}$$

Projection sur les vecteurs de la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$:

projection sur $\vec{e}_\rho$: $m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) = -k\,(\rho - l_0)$ **0.25p**

projection sur $\vec{e}_\varphi$: $2m\dot{\rho}\omega = R_\varphi$ **0.25p**

projection sur $\vec{k}$: $0 = -(mg - R_z)$ **0.25p**.

0.5p

a- Les composantes de $\vec{R}$ sont

$$\begin{aligned} R_\varphi &= 2m\dot{\rho}\omega \quad \textbf{0.25p} \\ R_z &= mg \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

0.5p

b- L'équation différentielle vérifiée par ρ est

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\omega^2 + \frac{k}{m}\rho &= \frac{k}{m}l_0 \\ \Longrightarrow \ddot{\rho} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\rho &= \frac{k}{m}l_0. \quad \textbf{0.5p} \end{aligned}$$

0.75p

4. Sachant que $z = V_0 t$,

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) \\ &= m\left(\rho\vec{e}_\rho + V_0 t\vec{k}\right) \wedge \left(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi + V_0\vec{k}\right) \\ &= m\rho^2\omega\vec{k} - mV_0\rho\vec{e}_\varphi + mV_0 t\dot{\rho}\vec{e}_\varphi - mV_0 t\rho\omega\vec{e}_\rho \\ &= -mV_0 t\rho\omega\vec{e}_\rho - mV_0\,(\rho - \dot{\rho}t)\,\vec{e}_\varphi + m\rho^2\omega\vec{k}. \quad \textbf{0.75p} \end{aligned}$$

0.75

5. Les moments des forces appliquées à M par rapport à O dans $\mathcal{R}$ sont

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \left(\rho\vec{e}_\rho + V_0 t\vec{k}\right) \wedge [-k(\rho - l_0)\vec{e}_\rho] = -kV_0 t(\rho - l_0)\vec{e}_\varphi \quad \textbf{0.25p} \\ \vec{\mathcal{M}}_O(m\vec{g}/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = \left(\rho\vec{e}_\rho + V_0 t\vec{k}\right) \wedge [-mg\vec{k}] = mg\rho\vec{e}_\varphi \quad \textbf{0.25p} \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \left(\rho\vec{e}_\rho + V_0 t\vec{k}\right) \wedge [R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{k}] = \rho R_\varphi\vec{k} - \rho R_z\vec{e}_\varphi - R_\varphi V_0 t\vec{e}_\rho \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

6. Le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}$ donne $\boxed{1.5\text{p}}$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}/\mathcal{R}) + \vec{\mathcal{M}}_O(m\vec{g}/\mathcal{R}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}/\mathcal{R}).$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= -mV_0\left[\omega\rho + t\omega\dot{\rho} - \omega(\rho - \dot{\rho}t)\right]\vec{e}_\rho - mV_0\left(t\rho\omega^2 - \ddot{\rho}t\right)\vec{e}_\varphi + 2m\rho\dot{\rho}\omega\vec{k} \\ &= -2mV_0t\dot{\rho}\omega\vec{e}_\rho - mV_0\left(t\rho\omega^2 - \ddot{\rho}t\right)\vec{e}_\varphi + 2m\rho\dot{\rho}\omega\vec{k} \quad \textbf{0.25p}\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}-2mV_0t\dot{\rho}\omega\vec{e}_\rho - mV_0\left(t\rho\omega^2 - \ddot{\rho}t\right)\vec{e}_\varphi + 2m\rho\dot{\rho}\omega\vec{k} &= -R_\varphi V_0t\vec{e}_\rho + \\ &+ \left(-kV_0t\left(\rho - l_0\right) + mg\rho - \rho R_z\right)\vec{e}_\varphi + \\ &+ \left(\rho R_\varphi\right)\vec{k}. \quad \textbf{0.5p}\end{aligned}$$

En projetant l'équation vectorielle précédente sur la base cylindrique, l'on obtient :

a-

$$\begin{aligned}R_\varphi &= 2m\dot{\rho}\omega \quad \textbf{0.25p} \\ R_z &= mg \quad \textbf{0.25p}\end{aligned}$$

b- et

$$t\rho\omega^2 - \ddot{\rho}t = -kV_0t\left(\rho - l_0\right) \Longrightarrow \ddot{\rho} + \rho\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\rho = \frac{k}{m}l_0. \quad \textbf{0.25p}$$

7. Les expressions de la vitesse et des accélérations d'entrainement et de Coriolis de M dans $\mathcal{R}_1$ sont $\boxed{0.75\text{p}}$

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho \quad \textbf{0.25p} \\ \vec{\gamma}_e &= \vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}) + \omega\vec{k}\wedge\left(\omega\vec{k}\wedge\rho\vec{e}_\rho\right) \\ &= \rho\omega^2\vec{k}\wedge -\vec{e}_\varphi = -\rho\omega^2\vec{e}_\rho \quad \textbf{0.25p} \\ \vec{\gamma}_c &= 2\omega\vec{k}\wedge\vec{V}(M/\mathcal{R}) = 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi. \quad \textbf{0.25p}\end{aligned}$$

8. L 'expression de l'énergie cinétique $E_c(M/\mathcal{R}_1)$ $\boxed{0.25\text{p}}$

$$E_c(M/\mathcal{R}_1) = \frac{1}{2}mV(M/\mathcal{R}_1)^2 = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 \quad \textbf{0.25p}$$

9. Dans $\mathcal{R}_1$, il faut tenir compte des forces d'inerties : $\boxed{1.0\text{p}}$
— le poids $m\vec{g} = -mg\vec{k}$;
— la force de rappel $\vec{F} = -k\left(\rho - l_0\right)\vec{e}_\rho$;

— la réaction $\vec{R} = R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{k}$, les frottements étant négligeables ; **0.5p** pour les trois forces précédentes **0.0p** dans le cas contraire.

— la force d'inertie d'entrainement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e = m\rho\omega^2\vec{e}_\rho$ **0.25p** ;

— la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -2m\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$. **0.25p**

$\boxed{1.75p}$

10. Le déplacement élementaire dans $\mathcal{R}_1$ est $d\overrightarrow{O_1M} = d\rho\vec{e}_\rho$ **0.5p**, ce qui donne

$$
\begin{aligned}
\delta W(m\vec{g}) &= m\vec{g}\cdot d\overrightarrow{O_1M} = 0 \quad \textbf{0.25p}\\
\delta W(\vec{F}) &= -k(\rho - l_0)\vec{e}_\rho \cdot d\overrightarrow{O_1M} = -k(\rho - l_0)d\rho \quad \textbf{0.25p}\\
\delta W(\vec{R}) &= (R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{k})\cdot d\overrightarrow{O_1M} = 0 \quad \textbf{0.25p}\\
\delta W(\vec{f}_{ie}) &= \vec{f}_{ie}\cdot d\overrightarrow{O_1M} = m\omega^2\rho d\rho \quad \textbf{0.25p}\\
\delta W(\vec{f}_{ic}) &= \vec{f}_{ic}\cdot d\overrightarrow{O_1M} = 0 \quad \textbf{0.25p}
\end{aligned}
$$

$\boxed{0.5p}$

11. Les travaux élémentaires non nuls peuvent être intégrés et donc l'énergie potentielle de M dans $\mathcal{R}_1$ est

$$
\begin{aligned}
dE_p &= -\delta W(\vec{F}) - \delta W(\vec{f}_{ie})\\
&= k(\rho - l_0)d\rho - m\omega^2\rho d\rho\\
\Longrightarrow E_p(M/\mathcal{R}) &= k\left(\frac{\rho^2}{2} - l_0\rho\right) - m\omega^2\frac{\rho^2}{2} + Cst\\
&= (k - m\omega^2)\frac{\rho^2}{2} - kl_0\rho + Cst \quad \textbf{0.5p}
\end{aligned}
$$

Prière de considérer la réponse $E_p(M/\mathcal{R}) = \frac{k}{2}(\rho - l_0)^2 - m\omega^2\frac{\rho^2}{2} + Cst$. **correcte.**

On peut prendre la constante nulle, cela n'a pas d'influence sur les résultats physiques.

$\boxed{0.25p}$

12. L'énergie mécanique de M dans $\mathcal{R}_1$ est

$$
E_m(M/\mathcal{R}_1) = E_c(M/\mathcal{R}_1) + E_p(M/\mathcal{R}_1) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + (k - m\omega^2)\frac{\rho^2}{2} - kl_0\rho + Cst. \quad \textbf{0.25p}
$$

$\boxed{0.25p}$

13. L'énergie mécanique $E_m(M/\mathcal{R}_1)$ se conserve car les travaux des forces qui travaillent dans $\mathcal{R}_1$ sont des formes différentielles totales. **0.25p**

Prière de considérer tout autre approche ou réponse correcte.

$\boxed{1.0p}$

14. Le théorème de l'énergie mécanique donne

$$\begin{aligned}\frac{dE_m(M/\mathcal{R})}{dt} = 0 \Longrightarrow m\dot{\rho}\ddot{\rho} + \left(k - m\omega^2\right)\rho\dot{\rho} - kl_0\dot{\rho} &= 0\\ \Longrightarrow m\dot{\rho}\left[\ddot{\rho} + (\frac{k}{m} - \omega^2)\rho - \frac{k}{m}l_0\right] &= 0\\ \Longrightarrow \ddot{\rho} + (\frac{k}{m} - \omega^2)\rho &= \frac{k}{m}l_0 \quad \textbf{0.75p}\end{aligned}$$

car $\dot{\rho} \neq 0$ **0.25p**.

$\boxed{1.25\text{p}}$

15. Les points de stabilités s'obtiennent comme suit

$$\begin{aligned}\left.\frac{dE_p(M/\mathcal{R}_1)}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_{equi}} &= 0\\ \Longrightarrow \rho_{equi} &= \frac{kl_0}{k - m\omega^2} \quad \textbf{0.25p}\end{aligned}$$

comme

$$\left.\frac{d^2E_p(M/\mathcal{R}_1)}{d\rho^2}\right|_{\rho=\rho_{equi}} = k - m\omega^2 \quad \textbf{0.25p}$$

on en conclut que $\rho_{equi} = \frac{kl_0}{k-m\omega^2}$ est une position d'équilibre **0.25p** stable si $k > m\omega^2$ **0.25p**

et instable dans le cascontraire **0.25p**.