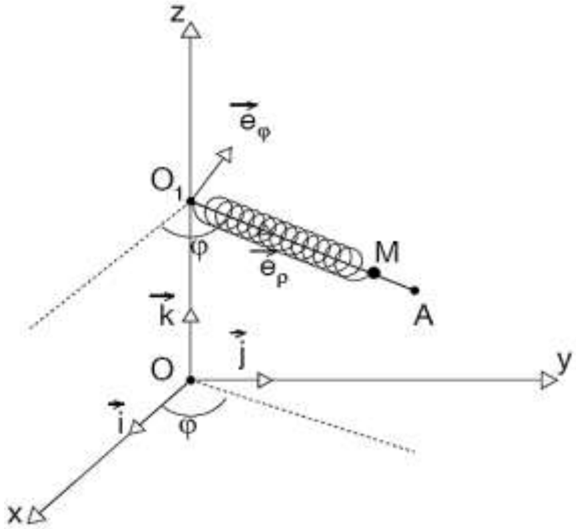
Université Cady Ayyad, Marrakech
Faculté polydisciplinaire - Safi
Session Normale d'Automne (S1)

Année universitaire 2021 - 2022
Filière : SMPC
Durée : 1h30min

Examen de Mécanique du Point Matériel

Un anneau assimilé à un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur un axe (O_1A). Le point M est attaché à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est fixée au point O_1, voir figure ci-contre. L'axe (O_1A) est horizontal et animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire constante ω. Le point O_1 est repéré par $\overrightarrow{OO_1} = V_0 t\,\vec{k}$, t étant le temps et V_0 est une constante positive.



Soient $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ le repère du laboratoire supposé **<u>galiléen</u>** et $\mathcal{R}_1(O_1,\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\vec{k})$ le repère **<u>non galiléen</u>** lié à l'axe (O_1A). Le point M est repéré dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ par $O_1M = \rho\overrightarrow{e_\rho}$ et $\widehat{(\vec{\imath},\overrightarrow{e_\rho})} = \varphi = \omega t$.

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\vec{k})$

<u>I- Application du principe fondamental de la dynamique dans $\mathcal{R}$</u>

1- Etablir les expressions du vecteur vitesse $\vec{V}\,(M/\mathcal{R})$ et du vecteur accélération $\vec{\gamma}\,(M/\mathcal{R})$ de M dans $\mathcal{R}$. 1

2- Faire le bilan des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}$ en donnant l'expression de chacune d'elles. 0.75

3- Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans $\mathcal{R}$. Projeter la relation vectorielle obtenue respectivement sur $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\varphi}$ et $\vec{k}$ et déterminer : 0.75

3- 1- les composantes de la réaction $\vec{R}$ de l'axe sur M ; 0.5

3- 2- En déduire que l'équation différentielle vérifiée par ρ est donnée par : 0.5

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\rho = \frac{k}{m}l_0$$

II- Application du théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}$	
1- Etablir l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_O}\,(M/\mathcal{R})$ de M par rapport à O dans $\mathcal{R}$.	1
2- Exprimer les moments de chacune des forces appliquées à M par rapport à O dans $\mathcal{R}$.	1.5
3- Appliquer le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}$ pour retrouver :	1.5
3- 1- Les composantes de la réaction $\vec{R}$ de l'axe sur M.	0.5
3- 2- L'équation différentielle vérifiée par ρ.	0.5
III- Etude des aspects énergétique dans $\mathcal{R}_1$	
1- Etablir les expressions du vecteur vitesse $\vec{V}\,(M/\mathcal{R}_1)$, du vecteur accélération d'entrainement $\overrightarrow{\gamma_e}$ et du vecteur accélération de Coriolis $\overrightarrow{\gamma_c}$.	1.25
2- Exprimer l'énergie cinétique $E_c(M/\mathcal{R}_1)$ de M dans $\mathcal{R}_1$.	0.5
3- Faire le bilan des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}_1$ en l'exprimant chacune d'elles.	1
4- Exprimer les puissances de chacune des forces appliquées sur le point M dans $\mathcal{R}_1$.	1.25
5- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, retrouver l'équation différentielle vérifiée par ρ.	1
6- Montrer que les forces d'inertie d'entrainement $\overrightarrow{f_{ie}}$ et de rappel $\vec{F}$ sont conservatives dans $\mathcal{R}_1$.	1
7- Exprimer les travaux élémentaires des forces d'inertie d'entrainement $\overrightarrow{f_{ie}}$ et de rappel $\vec{F}$.	1
8- Sachant que $dE_P(M/\mathcal{R}_1) = -\,\delta W\left(\sum \overrightarrow{F^C}\right)$, trouver l'expression de l'énergie potentielle $E_P(M/\mathcal{R}_1)$ de M dans $\mathcal{R}_1$.*($\overrightarrow{F^C}$: les forces conservatives appliquées sur M dans $\mathcal{R}_1$)*	1
9- En déduire l'expression de l'énergie mécanique $E_m(M/\mathcal{R}_1)$ de M dans $\mathcal{R}_1$.	0.5
10- L'énergie mécanique $E_m(M/\mathcal{R}_1)$ est-elle conservée ? Justifier la réponse.	0.5
11- En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, retrouver l'équation différentielle vérifiée par ρ.	1
12- Dans le cas où $k > m\omega^2$, déduire l'équation horaire du mouvement sachant que : $\rho(t=0) = l_0$ et $\dot{\rho}(t=0) = 0$.	1
13- Déterminer la position d'équilibre et étudier la stabilité de M.	1

Université Cady Ayyad, Marrakech Année universitaire 2021 - 2022
Faculté polydisciplinaire - Safi Filière : SMPC
Session Normale d'Automne (S1) Durée : 1h30min

Correction de l'examen de Mécanique du Point Matériel

I- Application du principe fondamental de la dynamique dans $\mathcal{R}$

1- Les expressions de la vitesse et de l'accélération de M dans $\mathcal{R}$ sont

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + V_0\vec{k} = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\omega\overrightarrow{e_\varphi} + V_0\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\overrightarrow{e_\rho} + 2\dot{\rho}\omega\overrightarrow{e_\varphi}$$

2- Le bilan des forces

- Le poids $m\vec{g} = -mg\vec{k}$
- La force de rappel $\vec{F} = -k(\rho - l_0)\overrightarrow{e_\rho}$
- La réaction $\vec{R} = R_\varphi\overrightarrow{e_\rho} + R_z\vec{k}$, les frottements étant négligeables.

3- Application du principe fondamental de la dynamique dans $\mathcal{R}$.

$$m\,\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{F} + \vec{R} + m\,\vec{g}$$

$$m\left[(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\overrightarrow{e_\rho} + 2\dot{\rho}\omega\overrightarrow{e_\varphi}\right] = -k(\rho - l_0)\overrightarrow{e_\rho} + R_\varphi\overrightarrow{e_\rho} + R_z\vec{k} - mg\vec{k}$$

$$m\left[(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\overrightarrow{e_\rho} + 2\dot{\rho}\omega\overrightarrow{e_\varphi}\right] = -k(\rho - l_0)\overrightarrow{e_\rho} + R_\varphi\overrightarrow{e_\rho} - (mg - R_z)\vec{k}$$

Projection sur les vecteurs de la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$:

Projection sur $\overrightarrow{e_\rho}$: $m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) = -k(\rho - l_0)$

Projection sur $\overrightarrow{e_\varphi}$: $2m\dot{\rho}\omega = R_\varphi$

Projection sur $\vec{k}$: $0 = -(mg - R_z)$

3- 1- Les composantes de $\vec{R}$ sont :

$$\begin{cases} R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega \\ R_z = mg \end{cases}$$

3- 2- L'équation différentielle vérifiée par ρ est :

$$\ddot{\rho} - \omega^2\rho + \frac{k}{m}\rho = \frac{k}{m}l_0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\rho} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\rho = \frac{k}{m}l_0$$

II- Application du théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}$

1- L'expression du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_O}(M/\mathcal{R})$ de M par rapport à O dans $\mathcal{R}$.

$$\overrightarrow{\sigma_O}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{V}(M/\mathcal{R}) = m\left(\rho\overrightarrow{e_\rho} + V_0 t\,\vec{k}\right) \wedge \left(\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\omega\overrightarrow{e_\varphi} + V_0\vec{k}\right)$$

$$= m\rho^2\omega\vec{k} - mV_0\rho\overrightarrow{e_\varphi} + mV_0 t\dot{\rho}\overrightarrow{e_\varphi} - mV_0 t\rho\omega\overrightarrow{e_\rho}$$

$$= -mV_0 t\rho\omega\overrightarrow{e_\rho} - mV_0(\rho - \dot{\rho}t)\overrightarrow{e_\varphi} + m\rho^2\omega\vec{k}$$

2- L'expression des moments de chacune des forces appliquées à M par rapport à O dans $\mathcal{R}$ sont :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \left(\rho\overrightarrow{e_\rho} + V_0 t\,\vec{k}\right) \wedge \left(-k(\rho - l_0)\overrightarrow{e_\rho}\right) = -kV_0 t(\rho - l_0)\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(m\,\vec{g}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{g} = \left(\rho\overrightarrow{e_\rho} + V_0 t\,\vec{k}\right) \wedge \left(-m\,g\vec{k}\right) = mg\rho\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{R}/\mathcal{R}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \left(\rho\overrightarrow{e_\rho} + V_0 t\,\vec{k}\right) \wedge \left(R_\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + R_z\vec{k}\right) = \rho R_\varphi\vec{k} - \rho R_z\overrightarrow{e_\varphi} - R_\varphi V_0 t\overrightarrow{e_\rho}$$

3- L'application le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}$.

Le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\left.\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{F}/\mathcal{R}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(m\,\vec{g}/\mathcal{R}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{R}/\mathcal{R}\right)$$

Nous avons ainsi

$$\left.\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}\left(-mV_0 t\rho\omega\overrightarrow{e_\rho} - mV_0(\rho - \dot{\rho}t)\overrightarrow{e_\varphi} + m\rho^2\omega\vec{k}\right)$$

$$= -mV_0[\rho\omega + t\omega\dot{\rho} - \omega(\rho - \dot{\rho}t)\overrightarrow{e_\rho} - mV_0(t\rho\omega^2 - \ddot{\rho}t)\overrightarrow{e_\varphi} + 2\,m\rho\ddot{\rho}\omega\vec{k}$$

$$= -2mV_0 t\dot{\rho}\omega\overrightarrow{e_\rho} - mV_0(t\rho\omega^2 - \ddot{\rho}t)\overrightarrow{e_\varphi} + 2m\rho\ddot{\rho}\omega\vec{k}$$

Ce qui implique que

$$= -2mV_0 t\dot{\rho}\omega\overrightarrow{e_\rho} - mV_0(t\rho\omega^2 - \ddot{\rho}t)\overrightarrow{e_\varphi} + 2\,m\rho\ddot{\rho}\omega\vec{k}$$

$$= -kV_0 t(\rho - l_0)\overrightarrow{e_\varphi} + mg\rho\overrightarrow{e_\varphi} + \rho R_\varphi\vec{k} - \rho R_z\overrightarrow{e_\varphi} - R_\varphi V_0 t\overrightarrow{e_\rho}$$

$$= -R_\varphi V_0 t\overrightarrow{e_\rho} + [-kV_0 t(\rho - l_0) + mg\rho - \rho R_z]\overrightarrow{e_\varphi} + \rho R_\varphi\vec{k}$$

En projetant l'équation vectorielle précédente sur la base cylindrique, l'on obtient :

3- 1- Les composantes de la réaction $\vec{R}$ de l'axe sur M.

$$\begin{cases} R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega \\ R_z = mg \end{cases}$$

3- 2- L'équation différentielle vérifiée par ρ.

$$t\rho\omega^2 - \ddot{\rho}t = -k\,V_0 t\,(\rho - l_0)$$

Ce qui nous donne :

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\rho = \frac{k}{m}l_0$$

III- Etude des aspects énergétique dans $\mathcal{R}_1$

1- Les expressions de la vitesse et des accélérations d'entrainement et de Coriolis de M dans $\mathcal{R}_1$ sont

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}_1) + \omega\vec{k} \wedge \left(\omega\vec{k} \wedge \rho\overrightarrow{e_\rho}\right) = \rho\omega^2\left(\vec{k} \wedge \overrightarrow{e_\varphi}\right) = -\rho\omega^2\,\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\overrightarrow{\gamma_C} = 2\omega\vec{k} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \rho\omega^2\left(\vec{k} \wedge \overrightarrow{e_\varphi}\right) = 2\,\dot{\rho}\omega\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

2- L'expression de l'énergie cinétique $E_c(M/\mathcal{R}_1)$ de M dans $\mathcal{R}_1$.

$$E_c(M/\mathcal{R}_1) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/\mathcal{R}_1) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2$$

3- Le bilan des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}_1$ en tenant compte les forces d'inerties :

- Le poids : $m\vec{g} = -mg\vec{k}$
- La force de rappel : $\vec{F} = -k\,(\rho - l_0)\,\overrightarrow{e_\rho}$
- La réaction : $\vec{R} = R_\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + R_z\vec{k}$ sachant que les frottements étant négligeables.
- La force d'inertie d'entrainement : $\overrightarrow{f_{ie}} = -m\overrightarrow{\gamma_e} = m\rho\omega^2\overrightarrow{e_\rho}$;
- La force d'inertie de Coriolis : $\overrightarrow{f_{ic}} = -m\overrightarrow{\gamma_c} = -2\,m\dot{\rho}\omega\overrightarrow{e_\varphi}$.

4- L'expression des puissances de chacune des forces appliquées sur le point M dans $\mathcal{R}_1$.

- La puissance du poids : $P(m\vec{g}) = -mg\vec{k}.\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} = 0$
- La puissance de la force de rappel : $P\left(\vec{F}\right) = -k\,(\rho - l_0)\overrightarrow{e_\rho}.\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} = -k\,(\rho - l_0)\dot{\rho}$

- La puissance de la réaction : $P(\vec{R}) = (R_\varphi \overrightarrow{e_\varphi} + R_z\vec{k}).\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} = 0$
- La puissance de la force d'inertie d'entrainement : $P(\overrightarrow{f_{ie}}) = (m\rho\omega^2\overrightarrow{e_\rho}).\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} = m\omega^2\rho\dot{\rho}$
- La puissance de la force d'inertie de Coriolis : $P(\overrightarrow{f_{ic}}) = (-2\, m\dot{\rho}\omega\overrightarrow{e_\varphi}).\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} = 0$

5- Application du théorème de l'énergie cinétique pour retrouver l'équation différentielle vérifiée par ρ.

$$\frac{dE_c(M/\mathcal{R}_1)}{dt} = m\dot{\rho}\ddot{\rho}$$

$$\left.\frac{d\,P(\sum\vec{F})}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = P\left(\vec{F}/\mathcal{R}_1\right) + P\left(m\,\vec{g}/\mathcal{R}_1\right) + P\left(\vec{R}/\mathcal{R}_1\right) + P\left(\overrightarrow{f_{ie}}/\mathcal{R}_1\right) + P\left(\overrightarrow{f_{ic}}/\mathcal{R}_1\right)$$

$$\left.\frac{d\,P(\sum\vec{F})}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = -k\,(\rho - l_0)\dot{\rho} + 0 + 0 + m\omega^2\rho\dot{\rho} + 0 = -k\,(\rho - l_0)\dot{\rho} + m\omega^2\rho\dot{\rho}$$

$$m\dot{\rho}\ddot{\rho} = -k\,(\rho - l_0)\dot{\rho} + m\omega^2\rho\dot{\rho}$$

$$\ddot{\rho} = \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)\rho + \frac{k}{m}l_0 \text{ car } \dot{\rho} \neq 0$$

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\rho = \frac{k}{m}l_0$$

6- Montrons que les forces d'inertie d'entrainement $\overrightarrow{f_{ie}}$ et de rappel $\vec{F}$ sont conservatives dans $\mathcal{R}_1$.

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho} \\ \frac{\partial}{\rho\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -k\,(\rho - l_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{f_{ie}} = \vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{f_{ie}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho} \\ \frac{\partial}{\rho\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} m\rho\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

7- L'expression des travaux élémentaires des forces d'inertie d'entrainement $\overrightarrow{f_{ie}}$ et de rappel $\vec{F}$.

Le déplacement élémentaire dans $\mathcal{R}_1$ est $d\overrightarrow{O_1M} = d\rho\overrightarrow{e_\rho}$, ce qui donne

- Le travail élémentaire de la force de rappel :

$$\delta W(\vec{F}) = -k\,(\rho - l_0)\overrightarrow{e_\rho}.d\overrightarrow{O_1M} = -k\,(\rho - l_0)d\rho$$

- le travail élémentaire de la force d'inertie d'entrainement :

$$\delta W(\overrightarrow{f_{ie}}) = (m\rho\omega^2\overrightarrow{e_\rho}).d\overrightarrow{O_1M} = m\omega^2\rho d\rho$$

8- L'expression de l'énergie potentielle $E_P(M/\mathcal{R}_1)$ de M dans $\mathcal{R}_1$.

On sait que $dE_P(M/\mathcal{R}_1) = -\,\delta W\left(\sum\overrightarrow{F^C}\right) = -\sum\delta W\left(\overrightarrow{F^C}\right)$

Avec $\overrightarrow{F^C}$: les forces conservatives appliquées sur M dans $\mathcal{R}_1$

$$dE_P(M/\mathcal{R}_1) = -\delta W(\overrightarrow{f_{ie}}) - \delta W(\vec{F}) = k\,(\rho - l_0)d\rho - m\omega^2\rho d\rho$$

$$\Longrightarrow E_P(M/\mathcal{R}_1) = \frac{k}{2}(\rho - l_0)^2 - m\omega^2\frac{\rho^2}{2} + Cste$$

$E_P(M/\mathcal{R}_1) = k\left(\frac{\rho^2}{2} - l_0\rho\right) - m\omega^2\frac{\rho^2}{2} + Cste = (k - m\omega^2)\frac{\rho^2}{2} - kl_0\rho + Cste$ est aussi correcte.

On peut prendre la constante nulle, cela n'a pas d'influence sur les résultats physiques.

9- L'expression de l'énergie mécanique $E_m(M/\mathcal{R}_1)$ de M dans $\mathcal{R}_1$.

$$E_m(M/\mathcal{R}_1) = E_c(M/\mathcal{R}_1) + E_P(M/\mathcal{R}_1) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{k}{2}(\rho - l_0)^2 - m\omega^2\frac{\rho^2}{2} + Cste$$

10- oui, l'énergie mécanique $E_m(M/\mathcal{R}_1)$ se conserve car les travaux des forces qui travaillent dans $\mathcal{R}_1$ sont des formes différentielles totales (seules les forces conservatives qui travaillent).

11- En utilisant le théorème de l'énergie mécanique pour retrouver l'équation différentielle vérifiée par ρ.

$$\frac{d\,E_m(M/\mathcal{R}_1)}{dt} = 0 \implies m\dot{\rho}\ddot{\rho} + k(\rho - l_0)\dot{\rho} - m\omega^2\rho\dot{\rho} = 0$$

$$\implies m\dot{\rho}\left[\ddot{\rho} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\rho - \frac{k}{m}l_0\right] = 0$$

Sachant que : $\dot{\rho} \neq 0$.

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\rho = \frac{k}{m}l_0$$

12- Dans le cas où $k > m\omega^2$, l'équation horaire du mouvement sachant que : $\rho(t=0) = l_0$ et $\dot{\rho}(t=0) = 0$.

$$r(t) = Ae^{-\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)t} + Be^{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)t} + \frac{\frac{k}{m}l_0}{\frac{k}{m} - \omega^2}$$

En utilisant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \rho(t=0) = l_0 = A + B + \dfrac{\frac{k}{m}l_0}{\frac{k}{m}-\omega^2} \\ \dot{\rho}(t=0) = 0 = -A\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) + B\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) \end{cases}$$

On trouve donc : $A = B = \frac{1}{2}[l_0 - \frac{\frac{k}{m}l_0}{\frac{k}{m}-\omega^2}]$

D'où : $\rho(t) = \frac{1}{2}(l_0 - \frac{\frac{k}{m}l_0}{\frac{k}{m}-\omega^2})(e^{-\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)t} + e^{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)t}) + \frac{\frac{k}{m}l_0}{\frac{k}{m}-\omega^2}$

13- on détermine la position d'équilibre et on étudie la stabilité de M.

Les positions d'équilibre s'obtiennent comme suit

$$\left.\frac{dE_P(M/\mathcal{R}_1)}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_{equi}} = 0$$

$$\implies \rho_{equi} = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}$$

L'étude de la stabilité

$$\left.\frac{d^2E_P(M/\mathcal{R}_1)}{d\rho^2}\right|_{\rho=\rho_{equi}} = k - m\omega^2$$

On en conclut que $\rho_{equi} = \frac{kl_0}{k-m\omega^2}$ est une position d'équilibre stable si $k > m\omega^2$ et instable dans le cas contraire.