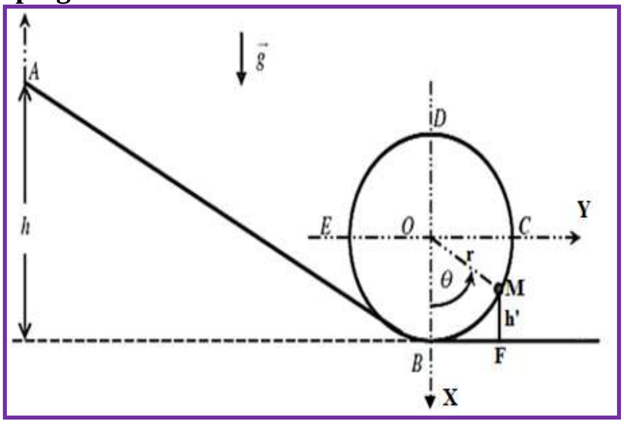
UNIVERSITE IBN ZOHR, AGADIR — ANNEE UNIVERSITAIRE 2017-2018
CAMPUS UNIVERSITAIRE AIT - MELLOUL — FILIERE : SMC / SEMESTRE 1
FACULTE DES SCIENCES — MODULE : MECANIQUE DU POINT MATERIEL

EXAMEN DE MECANIQUE DU POINT MATERIEL

SESSION NORMALE D'AUTOMNE — DUREE : 1H 30 MIN

Partie N°1 : Le looping



Le jouet d'un enfant est constitué d'un petit chariot de masse **m** qui se déplace sur une piste se terminant par une boucle circulaire verticale (looping) de rayon **r**. Le chariot assimilé à un point matériel **M** glisse sur la piste **(ABCDEF)** sans frottement. On repère **M** sur la boucle par l'angle **θ** que fait **OM** avec la verticale **OB (Voir la figure)**.

L'objectif de cette partie est de calculer la valeur minimale de l'altitude **h** du point **A** pour que le chariot abandonné en **A** sans vitesse initiale **($V_A = 0$)** puisse faire le tour complet de la boucle en restant en contact avec la piste tout le long du trajet.

I. Étude énergétique

1- En prenant l'origine de l'énergie potentielle au niveau du sol **($E_{PP}(B) = 0 = E_{PP}(F)$)**, donner l'expression de l'énergie potentielle **$E_{PP}(A)$** en **A** et **$E_{PP}(M)$** en **M**. 1

2- On notera **V_M** la vitesse du point **M** dans la position repérée par **θ**. Écrire l'énergie mécanique totale **$E_m(A)$** en **A** et **$E_m(M)$** en **M**. 1

3- Le système est-il conservatif ? En déduire une relation entre **$E_m(A)$** et **$E_m(M)$**. 0.5

4- En déduire l'expression de $\frac{V_M^2}{r}$ en fonction de **g, r, h** et θ (***relation N°1***). 2

II. Cinématique (*les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base* $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$)

L'étude du mouvement de **M** sur la boucle **(BCDE)** se fait naturellement en coordonnées polaires (r, θ) et la base associée **$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$**.

1- Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ en coordonnées polaires et en déduire la relation entre **V_M, r** et **$\dot{\theta}$**. Exprimer $\frac{V_M^2}{r}$ en fonction de **r** et **$\dot{\theta}$** (***relation N°2***). 1

2- Exprimer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M)$ en coordonnées polaires et en déduire, en utilisant la relation **N°2** précédente, l'expression de la composante radiale (**suivant $\vec{u}_r$**) de l'accélération en fonction de **V_M** et **r**. 1

III. Dynamique (*les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base* $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$)

1- On appellera $\vec{R}$ la réaction de la piste sur la masse **M**.

1- 1- Exprimer les forces agissant sur la masse **M** dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. Représenter ces forces lorsque le chariot est sur la boucle circulaire. 1.5

1- 2- Appliquer le principe fondamental de la dynamique en **M** sur la partie circulaire **(BCDE)** dans un repère galiléen. Projeter ce principe sur $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et exprimer alors le rapport $\frac{R}{m}$ ***(relation 3)***. 2.5

2- Utiliser les relations **N°1** et **3** pour exprimer $\frac{R}{m}$ en fonction de **h, g, r** et θ. 1

3- Dire que la masse fait un tour complet en restant en contact avec la piste se traduit par :

Pour toute valeur de l'angle **θ**, la réaction R existe : **∀ θ, R(θ) ≥ 0**

3- 1- Pour quelle valeur évidente de **θ** la réaction **R** est- elle minimale ? 0.5

3- 2- En déduire la valeur minimale que doit avoir l'altitude **h** du point **A** pour que le chariot réalise la looping sans quitter la piste. 1

3- 3- Etablir l'expression de **V_D** la vitesse du chariot au point **D** en fonction de **g** et **r**. 1

3- 4- Etablir l'expression de **V_B** la vitesse au point **B**, en fonction de **g** et **r**, lorsque le chariot effectuer un tour complet. 1

Partie N°2 : Oscillation libre

On considère que le chariot assimilé à un point matériel **M** et abandonné en **A** sans vitesse initiale **($V_A = 0$)**

1- Etablir l'expression de la vitesse au point **B** en fonction de **g** et **r**. 1

2- Etablir l'expression de la hauteur **h,** en fonction de **r**, pour que la valeur maximale de **θ** est $\theta_{max} = \frac{\pi}{6}$ 1

3- Par la suite, le chariot effectuera une oscillation libre autour de **B**.

Etablir l'équation horaire du mouvement **θ(t)** en appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à **O** dans le repère fixe **R(XOY)**. On prend $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{k}$ 2

Partie N°3 : Oscillation amortie

On considère maintenant que le chariot assimilé à un point matériel **M** glisse sur la piste **(ABCDE)** avec frottement et sans vitesse initiale **($V_A = 0$)**. Les frottements sont assimilables à une force constante de norme **f**.

Etablir l'expression de la hauteur **h** pour que le chariot atteint juste le point **C** en fonction de **m**, **g**, **f**, **AB** et **r**. 1

CORRECTION DE L'EXAMEN DE MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Partie N°1 : Le looping

I. Étude énergétique

1- $E_{PP}(A) = mgh$ et $E_{PP}(M) = mgh' = mgr(1 - \cos\theta)$

2- $E_m(A) = E_{PP}(A) + E_C(A) = mgh$

et $E_m(M) = E_{PP}(M) + E_C(M) = \frac{1}{2}mV_M^2 + mgr(1 - \cos\theta)$

3- Le système est conservatif (Pas de frottement) donc : $E_m(A) = E_m(M)$.

4- on a : $E_m(M) = E_m(A)$ donc $\frac{1}{2}mV_M^2 + mgr(1 - \cos\theta) = mgh$

Par conséquent $\frac{V_M^2}{r} = 2g\,[\frac{h}{r} - (1 - \cos\theta)]$ (relation n°1)

II- Cinématique

1- $\overrightarrow{V(M)} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ On a donc $V_M = R\dot{\theta}$ $\Rightarrow$ $V_M^2 = (r\dot{\theta})^2$ $\Rightarrow$ $\frac{V_M^2}{r} = r\dot{\theta}^2$ (relation n°2)

2- Le vecteur accélération :

$$\overrightarrow{\gamma(M)} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\,\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

soit $\gamma_r = -r\dot{\theta}^2 = -\frac{V_M^2}{r}$ la composante radiale de l'accélération

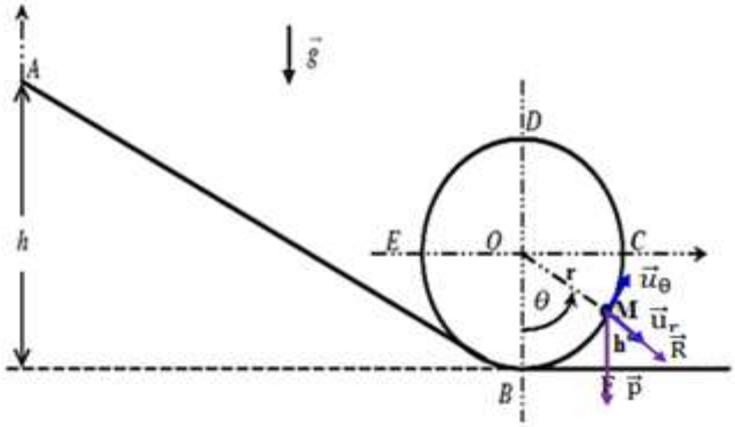
III- Dynamique

1- 1- Système : le chariot M, Référentiel terrestre considéré galiléen,

Les Forces sont :

Poid $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})$

La réaction $\vec{R} = R\,\vec{u}_r$ (réaction normale à la piste car le mouvement s'effectue sans frottement).



1- 2- Le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\overrightarrow{\gamma(M)}$$

La projection suivant : $\vec{u}_r$: $R - mg\cos\theta = mr\dot{\theta}^2 = m\frac{V_M^2}{r}$

$$mg\sin\theta + r\,\ddot{\theta} = 0$$

$\Rightarrow$ $\frac{R}{m} = g\cos\theta + \frac{V_M^2}{r}$ (*relation N°3*).

2- En utilisant les relations N°1 et 3 pour exprimer $\frac{\boldsymbol{R}}{\mathbf{m}}$ en fonction de h, g, r et $\boldsymbol{\theta}$.

$$\frac{R}{m} = g\cos\theta + \frac{V_M^2}{r} = g\cos\theta + 2g\,[\frac{h}{r} - (1 - \cos\theta)] = 2g[\frac{h}{r} - 1 + \frac{3}{2}\cos\theta]$$

3- Dire que la masse fait un tour complet en restant en contact avec la piste se traduit par :

Pour toute valeur de l'angle $\boldsymbol{\theta}$, la réaction R existe : $\forall\,\boldsymbol{\theta}$, $R(\boldsymbol{\theta}) \geq 0$

3- 1- La réaction R est minimale pour $\theta = \pi$.

3- 2- La condition pour que le chariot réalise la looping sans quitter la piste est $R_{min} \geq 0$.

Donc la valeur minimale que doit avoir l'altitude **h** du point **A**.

$$R_{min} = 0 \implies \frac{h}{r} = 1 - \frac{3}{2}\cos\pi = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Donc : $h = \frac{5}{2}r$

3- 3- L'expression de V_D la vitesse du chariot au point D.

On a démontré que : $\frac{V_M^2}{r} = 2g\,[\frac{h}{r} - (1 - \cos\theta)]$

Donc $V_D^2 = 2g\,r[\frac{5}{2} - (1 - \cos\pi)]$

Soit $V_D = \sqrt{gr}$

4- 4- L'expression de V_B la vitesse au point D lorsque le chariot effectuer un tour complet.

On applique le théorème d'énergie cinétique entre D et B : $\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_D^2 = 2mgr$

$$V_B^2 = V_D^2 + 4gr$$

Alors : $V_B = \sqrt{gr + 4gr} = \sqrt{5gr}$

Partie N°2 : Oscillation libre

On considère maintenant que M effectue une oscillation libre.

1- Calcul de la vitesse au point B.

On a : $E_m(A) = E_m(B)$ donc $mgh = \frac{1}{2}mV_B^2$

Donc $V_B = \sqrt{2gh}$

2- Calcul de la valeur de h pour que la valeur maximale de θ est $\theta_{max} = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{h}{r} - (1 - \cos\theta_{max}) = 0 \Leftrightarrow \frac{h}{r} - \left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\frac{h}{r} - \left(1 - \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow h = 0.134\,r$$

3- L'équation horaire du mouvement θ(t) en appliquant le théorème du moment cinétique.

Le théorème du moment cinétique s'écrit : $\left.\frac{d\vec{\sigma}_0(M/\mathfrak{R})}{dt}\right|_{\mathfrak{R}} = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P} + \vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R}$

Avec l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

La vitesse $\vec{V}(M/\mathfrak{R})$ de M dans $\mathfrak{R}$.

$$\vec{V}(M/\mathfrak{R}) = r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

Avec : $\vec{\sigma}_0(M/\mathfrak{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathfrak{R}) = r\,\overrightarrow{u_r} \wedge mr\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{\sigma}_0(M/\mathfrak{R})}{dt}\right|_{\mathfrak{R}} = mr^2\ddot{\theta}\,\vec{k}$$

$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = r\,\overrightarrow{e_r} \wedge (mg\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}) = -mgrsin\theta\,\vec{k}$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

Ce qui implique que : $mr^2\ddot{\theta}\,\vec{k} = -mgrsin\theta\,\vec{k} \Rightarrow mr^2\ddot{\theta} = -mgrsin\theta$

On obtient finalement pour des faibles amplitudes : $\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0$

La résolution de l'équation différentielle.

$\theta = \theta_{max}\cos\omega_0 t$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r}}$: la pulsation propre du mouvement

Partie N°3 : Oscillation amortie

L'expression de la hauteur **h** pour que le chariot atteint le point **C**.

On applique le théorème d'énergie cinétique entre A et C :

On écrit : $\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{f}) = 0$

$W(\vec{P}) = mg(h - r)$ et $W(\vec{f}) = -f(AB + r\frac{\pi}{2})$

Donc : $mg(h - r) - f\left(AB + r\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Par conséquent : $h = \frac{f}{mg}\left(AB + r\frac{\pi}{2}\right) + r$