

Examen de Mécanique du Point Matériel

Glissement d'un anneau sans frottement sur une tige (T)

I- Etude cinématique

Soit $R(O, x, y, z)$ référentiel terrestre supposé Galiléen muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Un petit anneau M de masse m , considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottement le long d'une tige (T). Cette tige tourne autour de l'axe vertical (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante et positive, tel que $\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k}$ (voir figure 1).

On définit le référentiel relatif $R_1(O, x_1, y_1, z_1 = z)$ auquel est attachée la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. Au cours du temps, la tige doit rester dans le plan vertical $(O, \vec{e}_\rho, \vec{k})$ et faisant un angle **constant** θ ($\theta < \frac{\pi}{2} \text{rad}$) avec l'axe (Oz). On donne $\overline{OM} = r(t) \vec{e}_r$ et $\vec{g} = -g \vec{k}$.

\vec{e}_θ est le vecteur perpendiculaire à \vec{e}_r dans le plan vertical $(O, \vec{e}_\rho, \vec{k})$ (Voir figure 2).

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est une base orthonormée directe.

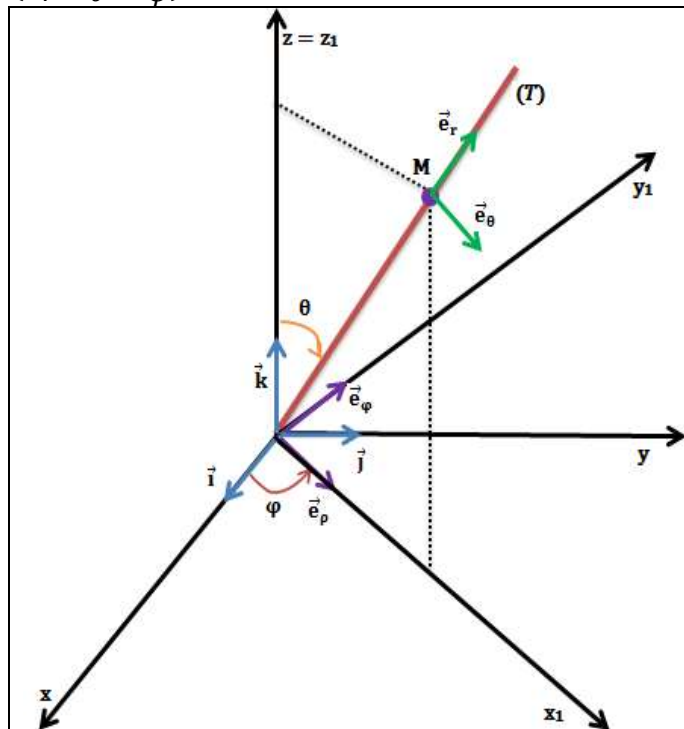


Figure 1

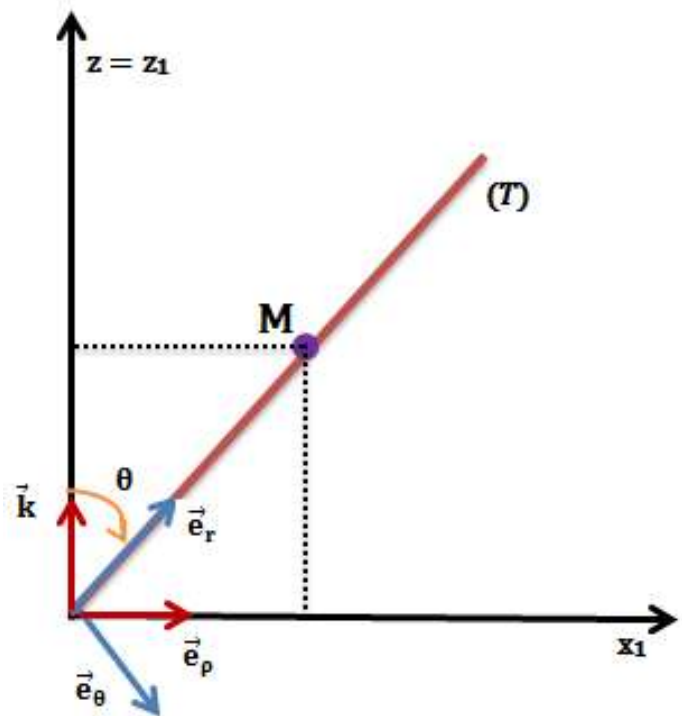


Figure 2

- 1- Exprimer les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. 0.5
- 2- Exprimer les produits scalaires suivants : $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\rho$; $\vec{e}_r \cdot \vec{k}$; $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta \cdot \vec{k}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. 1
- 3- Donner l'expression du vecteur position de M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. 0.5

4- Trouver les expressions de la vitesse absolue $\vec{V}(M)_{/R}$ et de l'accélération absolue $\vec{\gamma}(M)_{/R}$ par calcul direct dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.	1.5
5- Le repère relatif R_1 lié à la tige est-il galiléen ? Justifier votre réponse.	0.5
6- Exprimer les vitesses : relative $\vec{V}_r(M)$ et d'entraînement $\vec{V}_e(M)$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.	1
7- Exprimer les accélérations : relative $\vec{\gamma}_r(M)$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_C(M)$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$	2
8- Les lois de composition des vitesses et des accélérations sont-elles vérifiées?	1
<u>II- Etude dynamique</u>	
9- Donner les expressions vectorielles des forces appliquées à M dans le référentiel relatif R_1 en sachant que la réaction est donnée dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sous la forme suivante : $\vec{R} = R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi$.	2
10- Ecrire le principe fondamentale de la dynamique (PFD) appliqué à M dans \mathfrak{R}_1 .	1
11- En projetant le PFD suivant \vec{e}_r , trouver l'équation différentielle du mouvement de M.	1
12- En projetant le PFD suivant \vec{e}_θ , trouver la composante R_θ de la réaction.	1
13- En projetant le PFD suivant \vec{e}_φ , trouver la composante R_φ de la réaction.	1
<u>III- Application du théorème de l'énergie cinétique dans \mathfrak{R}.</u>	
1- Déterminer $E_C(M/\mathfrak{R})$ l'énergie cinétique du point M dans \mathfrak{R} ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans \mathfrak{R} .	1
2- Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M.	2
3- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'équation différentielle du mouvement.	2
4- Dédurre l'équation horaire du mouvement sachant que : $r(t = 0) = r_0$ et $\dot{r}(t = 0) = 0$.	1

Correction de l'examen de Mécanique du Point Matériel

I- Etude cinématique

1- L'expression des vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

$$\vec{e}_r = \sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{e}_\theta = \cos\theta \vec{e}_\varphi - \sin\theta \vec{k}$$

2- Calcul des produits scalaires suivants : $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\rho$; $\vec{e}_r \cdot \vec{k}$; $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta \cdot \vec{k}$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\rho = \sin\theta \quad ; \quad \vec{e}_r \cdot \vec{k} = \cos\theta \quad ; \quad \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\rho = \cos\theta \quad ; \quad \vec{e}_\theta \cdot \vec{k} = -\sin\theta$$

3- L'expression du vecteur position de M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r = r \sin\theta \vec{e}_\rho + r \cos\theta \vec{k}$$

4- Les expressions de la vitesse absolue $\vec{V}(M)_{/R}$ et l'accélération absolue $\vec{\gamma}(M)_{/R}$ par calcul direct.

☀ La vitesse absolue $\vec{V}(M)_{/R}$: $\vec{V}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R = \frac{d}{dt}[r \sin\theta \vec{e}_\rho + r \cos\theta \vec{k}]_R$

Soit $\vec{V}(M)_{/R} = \dot{r} \sin\theta \vec{e}_\rho + r \omega \sin\theta \vec{e}_\varphi + \dot{r} \cos\theta \vec{k}$

☀ L'accélération absolue $\vec{\gamma}(M)_{/R}$:

$$\vec{\gamma}(M)_{/R} = \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right)_R = \left(\frac{d\vec{V}(M)_{/R}}{dt}\right)_R = \frac{d}{dt}[\dot{r} \sin\theta \vec{e}_\rho + r \omega \sin\theta \vec{e}_\varphi + \dot{r} \cos\theta \vec{k}]_R$$

Soit $\vec{\gamma}(M)_{/R} = (\ddot{r} \sin\theta - r \omega^2 \sin\theta) \vec{e}_\rho + 2\omega \dot{r} \sin\theta \vec{e}_\varphi + \ddot{r} \cos\theta \vec{k}$

5- Le repère relatif R_1 lié à la tige (T) n'est pas galiléen, car il est en rotation autour de repère fixe R.

6- Calcul des vitesses : relative $\vec{V}_r(M)$ et d'entraînement $\vec{V}_e(M)$.

☀ La vitesse relative $\vec{V}(M)_{/R_1}$: $\vec{V}(M)_{/R_1} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{R_1} = \frac{d}{dt}[r(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k})]_{R_1}$

Soit $\vec{V}(M)_{/R_1} = \dot{r} \sin\theta \vec{e}_\rho + \dot{r} \cos\theta \vec{k}$

☀ La vitesse d'entraînement $\vec{V}_e(M)$: $\vec{V}_e(M) = \left(\frac{d\vec{OO}}{dt}\right)_R + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{OM}$

Soit $\vec{V}_e(M) = \omega \vec{k} \wedge r(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k}) = r \omega \sin\theta \vec{e}_\varphi$

7- Calcul des accélérations : relative $\vec{\gamma}_r(M)$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_C(M)$.

☀ L'accélération relative $\vec{\gamma}_r(M)$:

$$\vec{\gamma}_r(M)_{/R_1} = \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right)_{R_1} = \left(\frac{d\vec{V}(M)_{/R_1}}{dt}\right)_{R_1} = \frac{d}{dt}[\dot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k})]_{R_1}$$

Soit $\vec{\gamma}_r(M)_{/R_1} = \ddot{r} \sin\theta \vec{e}_\rho + \ddot{r} \cos\theta \vec{k}$

☀ L'accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$:

$$\vec{\gamma}_e(M) = \left(\frac{d^2\vec{OO}}{dt^2}\right)_R + \frac{d(\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}})}{dt} \wedge \vec{OM} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{OM})$$

Soit $\vec{\gamma}_e(M) = \omega \vec{k} \wedge (\omega \vec{k} \wedge r(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k})) = -r \omega^2 \sin\theta \vec{e}_\rho$

☀ L'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_C(M)$:

$$\vec{\gamma}_C(M) = 2\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{V}_r(M)$$

Soit $\vec{\gamma}_C(M) = 2\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{V}_r(M) = 2\omega\vec{k} \wedge \dot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k}) = 2\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi$

8- Vérification des lois de composition des vitesses et des accélérations.

☀ Loi de composition des vitesses :

$$\begin{aligned} \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) &= \dot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k}) + r\omega\sin\theta \vec{e}_\varphi = \dot{r}\sin\theta \vec{e}_\rho + r\omega\sin\theta \vec{e}_\varphi + \dot{r}\cos\theta \vec{k} \\ &= \vec{V}_a(M) \end{aligned}$$

☀ Loi de composition des accélérations :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_C(M) &= \ddot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k}) - r\omega^2\sin\theta \vec{e}_\rho + 2\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi \\ &= (\ddot{r}\sin\theta - r\omega^2\sin\theta)\vec{e}_\rho + 2\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi + \ddot{r}\cos\theta \vec{k} = \vec{\gamma}_a(M) \end{aligned}$$

I- Etude dynamique

9- Les expressions vectorielles des forces appliquées à M dans le référentiel relatif R_1 .

☀ $\vec{P} = -mg \vec{k}$

☀ $\vec{R} = R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi$

☀ $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e = mr\omega^2\sin\theta \vec{e}_\rho$

☀ $\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_C = -2m\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi$

10- Le principe fondamentale de la dynamique (PFD) appliqué à M dans \mathfrak{R}_1 .

$$\sum \overrightarrow{F_{réelles}} + \sum \overrightarrow{F_{inerties}} = m\vec{\gamma}_r(M) \implies \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{\gamma}_r(M)$$

Soit

$$-mg \vec{k} + R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi + mr\omega^2\sin\theta \vec{e}_\rho - 2m\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi = m\ddot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k})$$

11- Projetant de l'équation du PFD suivant \vec{e}_r .

$$\begin{aligned} [-mg \vec{k} + R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi + mr\omega^2\sin\theta \vec{e}_\rho - 2m\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi] \cdot \vec{e}_r \\ = [m\ddot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k})] \cdot \vec{e}_r \end{aligned}$$

Ce qui implique : $-mg \cos\theta + mr\omega^2\sin^2\theta = m\ddot{r}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

Soit: $\ddot{r} - r\omega^2\sin^2\theta + g\cos\theta = 0$.

12- En projetant le PFD suivant \vec{e}_θ .

$$\begin{aligned} [-mg \vec{k} + R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi + mr\omega^2\sin\theta \vec{e}_\rho - 2m\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi] \cdot \vec{e}_\theta \\ = [m\ddot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k})] \cdot \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$-mg \sin\theta + R_\theta + mr\omega^2\sin\theta \cos\theta = m\ddot{r}(\sin\theta \cos\theta - \cos\theta \sin\theta) = 0$$

Soit : $R_\theta = -m \sin\theta [g + r\omega^2\cos\theta]$

13- Projetant le PFD suivant \vec{e}_φ .

$$\begin{aligned} [-mg \vec{k} + R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi + mr\omega^2\sin\theta \vec{e}_\rho - 2m\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi] \cdot \vec{e}_\varphi \\ = [m\ddot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k})] \cdot \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Ce qui implique : $R_\varphi - 2m\omega\dot{r}\sin\theta = 0$

Soit : $R_\varphi = 2m\dot{r}\sin\theta$.

III- Application du théorème de l'énergie cinétique

1- On détermine $E_C(M/\mathfrak{R})$ l'énergie cinétique du point M dans \mathfrak{R} ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans \mathfrak{R} .

☀ L'énergie cinétique s'exprime comme suit :

$$E_C(M/\mathfrak{R}) = \frac{1}{2}mV(M/\mathfrak{R}) = \frac{1}{2}m((\dot{r}\sin\theta)^2 + (r\omega\sin\theta)^2 + (\dot{r}\cos\theta)^2)$$

☀ La dérivée de l'énergie cinétique s'exprime alors :

$$\frac{dE_C(M/\mathfrak{R})}{dt} = m\dot{r}\ddot{r}\sin^2\theta + mrr\dot{\omega}\sin^2\theta + m\dot{r}\ddot{r}\cos^2\theta$$

2- Déterminons les puissances de chacune des forces agissant sur le point M .

☀ $P(\vec{P}/\mathfrak{R}) = \vec{P} \cdot \vec{V}(\vec{P}/\mathfrak{R}) = -mg\vec{k} \cdot (\dot{r}\sin\theta\vec{e}_\rho + r\omega\sin\theta\vec{e}_\varphi + \dot{r}\cos\theta\vec{k}) = -m\dot{r}g\cos\theta$

☀ $P(\vec{R}/\mathfrak{R}) = \vec{R} \cdot \vec{V}(\vec{R}/\mathfrak{R}) = (R_\theta\vec{e}_\theta + R_\varphi\vec{e}_\varphi) \cdot (\dot{r}\sin\theta\vec{e}_\rho + r\omega\sin\theta\vec{e}_\varphi + \dot{r}\cos\theta\vec{k}) =$
 $(R_\theta\cos\theta\vec{e}_\rho + R_\varphi\vec{e}_\varphi - R_\theta\sin\theta\vec{k}) \cdot (\dot{r}\sin\theta\vec{e}_\rho + r\omega\sin\theta\vec{e}_\varphi + \dot{r}\cos\theta\vec{k}) =$
 $R_\theta\dot{r}\sin\theta\cos\theta + R_\varphi r\omega\sin\theta - R_\theta\dot{r}\cos\theta\sin\theta = R_\varphi r\omega\sin\theta$

3- Par applications du théorème de l'énergie cinétique.

$$\frac{dE_C(M/\mathfrak{R})}{dt} = P(\vec{P}/\mathfrak{R}) + P(\vec{R}/\mathfrak{R})$$

$$\Rightarrow m\dot{r}\ddot{r}\sin^2\theta + mrr\dot{\omega}\sin^2\theta + m\dot{r}\ddot{r}\cos^2\theta = -m\dot{r}g\cos\theta + R_\varphi r\omega\sin\theta$$

On'a : $R_\varphi = 2m\dot{r}\sin\theta$

$$\Rightarrow m\dot{r}\ddot{r}\sin^2\theta + mrr\dot{\omega}\sin^2\theta + m\dot{r}\ddot{r}\cos^2\theta = -m\dot{r}g\cos\theta + 2m\dot{r}r\omega\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \dot{r}\ddot{r}\sin^2\theta + r\omega\dot{\omega}\sin^2\theta + \dot{r}\ddot{r}\cos^2\theta = -g\dot{r}\cos\theta + 2r\omega\dot{\omega}\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{r} - r\omega^2\sin^2\theta = -g\cos\theta$$

On retrouve donc : $\ddot{r} - r\omega^2\sin^2\theta + g\cos\theta = 0$

4- L'équation horaire du mouvement sachant que : $r(t=0) = r_0$ et $\dot{r}(t=0) = 0$.

$$r(t) = Ae^{-\omega\sin\theta t} + Be^{\omega\sin\theta t} + \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}$$

En utilisant les conditions initiales : $\begin{cases} r(t=0) = r_0 = A + B + \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta} \\ \dot{r}(t=0) = 0 = -A\omega\sin\theta + B\omega\sin\theta \end{cases}$

On trouve donc : $A = B = \frac{1}{2}\left[r_0 - \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}\right]$

D'où : $r(t) = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}\right)(e^{-\omega\sin\theta t} + e^{\omega\sin\theta t}) + \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}$