Université Cady Ayyad, Marrakech — Année universitaire 2017 - 2018
Faculté polydisciplinaire - Safi — Filières : SMPC
Session Normale d'Automne (S1) — Durée : 2 h

Examen de Mécanique du Point Matériel

On considère le repère fixe $\mathfrak{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ (repère absolu), (*xOy*) étant le plan horizontal.

Soit une tige homogène (O_1A) de longueur l, en mouvement autour de l'axe $(O,\vec{k})$ avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $\mathfrak{R}_1(O_1,\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\vec{k})$ un repère lié à la tige (repère relatif) tel que le plan $(O_1,\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi})$ reste constamment parallèle au plan (*xOy*). L'origine O_1 de $\mathfrak{R}_1$ se déplace le long de l'axe $(O,\vec{k})$ tel que $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}at^2\vec{k}$. Soit un point *M*, de masse *m*, se déplaçant sans frottement sur la tige (O_1A) et repéré dans R_1 par $\overrightarrow{O_1M} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho}$ (*a* et ω étant des constantes positives).

N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$.

1- Exprimer dans la base $(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\vec{k})$:

a- la vitesse du point *M* par rapport au repère $\mathfrak{R}$.

b- la vitesse du point *M* par rapport au repère $\mathfrak{R}_1$.

c- le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{O_1}}(M/\mathfrak{R}_1)$.

d- le poids de *M* et les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

2- Le repère $\mathfrak{R}_1$ est-il Galiléen ou non Galiléen ? Justifier votre réponse.

3- En appliquant le théorème de la quantité du mouvement dans le repère $\mathfrak{R}_1$, déterminer une équation différentielle du second ordre en *t* vérifiée par ρ et les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur *M* par la tige, dans la base $(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\vec{k})$.

4- En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\mathfrak{R}_1$, retrouver les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur *M* par la tige, dans la base $(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\vec{k})$.

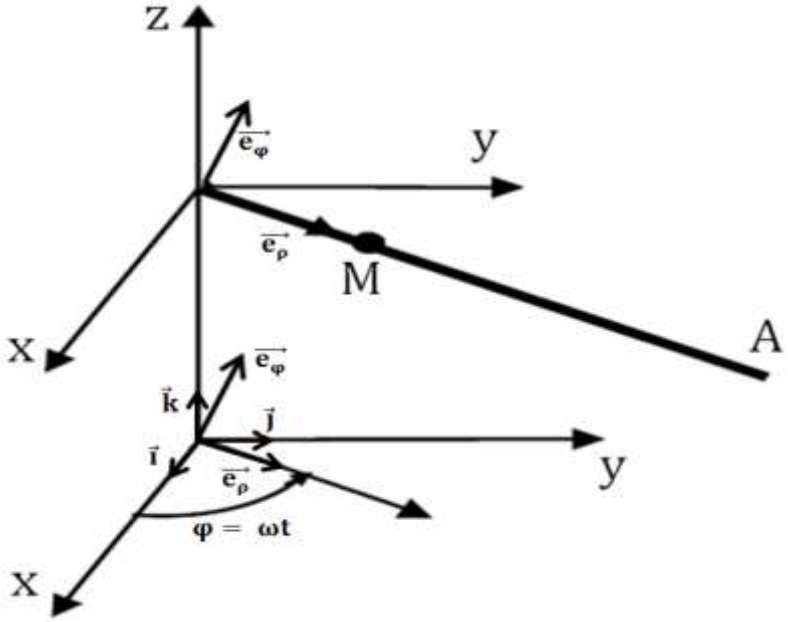
5- Calculer l'énergie potentielle de *M* par rapport au repère $\mathfrak{R}$.

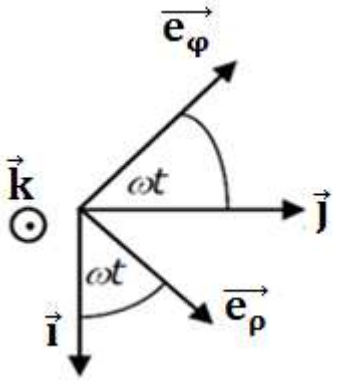
6- Calculer l'énergie potentielle de *M* par rapport au repère $\mathfrak{R}_1$.

7- Calculer l'énergie cinétique de *M* par rapport au repère $\mathfrak{R}_1$.

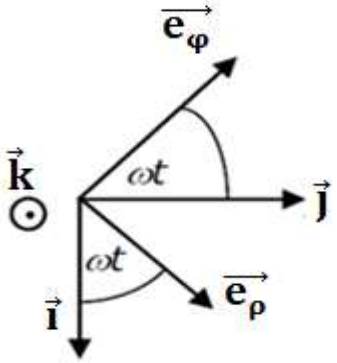
8- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\mathfrak{R}_1$, retrouver l'équation différentielle du second ordre en *t* vérifiée par ρ.

9- En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\mathfrak{R}_1$, retrouver l'équation différentielle du second ordre en *t* vérifiée par ρ.





Correction de l'examen de Mécanique du Point Matériel



$$\vec{e_\rho} = cos\omega t\vec{i} + sin\omega t\vec{j}$$

$$\vec{e_\varphi} = -sin\omega t\vec{i} + cos\omega t\vec{j}$$

$$\left(\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right)_{\Re} = \omega\,\vec{e_\varphi} \quad ; \quad \left(\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right)_{\Re} = -\omega\,\vec{e_\rho} \; ; \left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{\Re} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}\,(\Re/\Re_1) = \omega\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = \frac{1}{2}at^2\vec{k} + \rho\vec{e_\rho} = \rho\vec{e_\rho} + \frac{1}{2}at^2\vec{k}$$

(a est une constante)

1- On exprime dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k})$:

a- la vitesse du point *M* par rapport au repère $\Re$:

$$\vec{V}(M/\Re) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\left(\rho\vec{e_\rho} + \frac{1}{2}at^2\vec{k}\right)}{dt}\right)_{\Re} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\omega\vec{e_\varphi} + at\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}(\mathrm{M}/\Re) = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\omega\vec{e_\varphi} + at\vec{k}$$

b- la vitesse du point M par rapport au repère $\Re_1$:

$$\vec{V}(\mathrm{M}/\Re_1) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{\Re_1} = \left(\frac{d\left(\rho\vec{e_\rho}\right)}{dt}\right)_{\Re_1} = \dot{\rho}\vec{e_\rho}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}(\mathrm{M}/\Re_1) = \dot{\rho}\vec{e_\rho}$$

c- le moment cinétique $\vec{\sigma_{O_1}}(M/\Re_1)$

$$\vec{\sigma_{O_1}}(M/\Re_1) = \overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{V}(\mathrm{M}/\Re_1) = \rho\vec{e_\rho} \wedge m\dot{\rho}\vec{e_\rho} \Longrightarrow \vec{\sigma_{O_1}}(M/\Re_1) = \vec{0}$$

d- le poids de *M* et les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$: poids de M ;
- $\vec{F_e} = -m\vec{\gamma_e}(M)$: force d'inertie d'entrainement ;
- $\vec{F_c} = -m\vec{\gamma_c}(M)$: force d'inertie de Coriolis.

$$\vec{\gamma_e}(M) = \vec{\gamma}(O_1/\Re) + \left(\frac{d\vec{\Omega}\,(\Re/\Re_1)}{dt}\right)_{\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}\,(\Re/\Re_1) \wedge (\vec{\Omega}\,(\Re/\Re_1) \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

$$\vec{\gamma}(O_1/\Re) = \left(\frac{d^2\left(\frac{1}{2}at^2\vec{k}\right)}{dt^2}\right)_{\Re} = a\,\vec{k}$$

$$\left(\frac{d\vec{\Omega}\,(\Re/\Re_1)}{dt}\right)_{\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}\,(\Re/\Re_1) \wedge (\vec{\Omega}\,(\Re/\Re_1) \wedge \overrightarrow{O_1M}) = \omega\,\vec{k} \wedge \left(\omega\,\vec{k} \wedge \rho\vec{e_\rho}\right) = -\omega^2\rho\vec{e_\rho}$$

$$\vec{\gamma_e}(M) = -\omega^2\rho\vec{e_\rho} + a\,\vec{k}$$

$$\vec{\gamma_c}(M) = 2\vec{\Omega}\,(\Re/\Re_1) \wedge \vec{V_r}(M) = 2\omega\,\vec{k} \wedge \dot{\rho}\vec{e_\rho} = 2\omega\dot{\rho}\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{F_{ie}} = -m\vec{\gamma_e}(M) = m\omega^2\rho\vec{e_\rho} - ma\,\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{F_{ic}} = -m\vec{\gamma_c}(M) = -2m\omega\dot{\rho}\vec{e_\varphi}$$

2- Le repère $\mathfrak{R}_1$ est en mouvement de rotation par rapport au repère fixe $\mathfrak{R}$ (galiléen)

$$\Longrightarrow \ \mathfrak{R}_1 \text{ est non Galiléen}$$

3- Théorème de la quantité du mouvement dans le repère $\mathfrak{R}_1$:

$\mathfrak{R}_1$ est non Galiléen $\Longrightarrow m\vec{\gamma}(M) = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \ \overrightarrow{F_{ie}} + \ \overrightarrow{F_{ic}}$

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{R} \quad \text{où} \quad \vec{R} = R_\rho \overrightarrow{e_\rho} + \ R_\varphi \overrightarrow{e_\varphi} + \ R_z \vec{k}$$

N.B : On exprime la réaction $\vec{R}$ dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$ pour faire apparaître sa composante tangentielle (tangente à la trajectoire).

Mouvement sans frottement ⇒ la composante tangentielle de la réaction est nulle c'est-à-dire :

$$R_\rho = 0 \ \Longrightarrow \vec{R} = \ R_\varphi \overrightarrow{e_\varphi} + \ R_z \vec{k}$$

P.F.D dans $\mathfrak{R}_1$ s'écrit :

$$m\ddot{\rho}\overrightarrow{\imath_1} = -mg\vec{k} + \ R_\varphi \overrightarrow{e_\varphi} + \ R_z \vec{k} + \ m\omega^2 \rho \overrightarrow{e_\rho} - \ ma \ \vec{k} - 2m\omega\dot{\rho}\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad (m\ddot{\rho} - \ m\omega^2\rho)\overrightarrow{e_\rho} - \left(R_\varphi - 2m\omega\dot{\rho}\right)\overrightarrow{e_\varphi} + (mg - \ R_z + \ ma)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{\rho} - \ m\omega^2\rho = 0 \\ R_\varphi - 2m\omega\dot{\rho} = 0 \\ mg - \ R_z + \ ma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{\rho} - \ \omega^2\rho = 0 \\ R_\varphi = 2m\omega\dot{\rho} \\ R_z = mg + \ ma \end{cases}$$

⇒ Equation différentielle du second ordre en *t* vérifiée par ρ : $\ddot{\rho} - \ \omega^2\rho = 0$

Réaction $\vec{R}$ exercée sur *M* par la tige : $\vec{R} = 2m\omega\dot{\rho}\overrightarrow{e_\varphi} + (mg + ma)\vec{k}$

4- Théorème du moment cinétique dans le repère $\mathfrak{R}_1$:

N.B : Pour appliquer le théorème du moment cinétique dans le référentiel $\mathfrak{R}_1$, il est préférable de choisir un point fixe dans $\mathfrak{R}_1$. Pour un point mobile A dans $\mathfrak{R}_1$, ce théorème, s'écrit :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}(M/\mathfrak{R}_1)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_1} = \ \overrightarrow{\mathcal{M}_A}\left(\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right) + \ \overrightarrow{\mathcal{M}_A}\left(\overrightarrow{F_{ie}}\right) + \ \overrightarrow{\mathcal{M}_A}\left(\overrightarrow{F_{ic}}\right) + m\vec{V}(\mathrm{M}/\mathfrak{R}_1) \ \wedge \vec{V}(\mathrm{A}/\mathfrak{R}_1)$$

$\mathfrak{R}_1$ est non galiléen et O_1 est fixe dans $\mathfrak{R}_1$ ⇒

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O_1}}(M/\mathfrak{R}_1)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_1} = \ \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}\left(\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right) + \ \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}\left(\overrightarrow{F_{ie}}\right) + \ \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}\left(\overrightarrow{F_{ic}}\right)$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O_1}}(M/\mathfrak{R}_1)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_1} = \ \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}\left(\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right) = \ \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}(\vec{P}) + \ \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}(\vec{R}) = \ \overrightarrow{O_1M} \ \wedge \vec{P} + \ \overrightarrow{O_1M} \ \wedge \vec{R}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}(\vec{P}) = \ \overrightarrow{O_1M} \ \wedge \vec{P} = \ \rho\overrightarrow{e_\rho} \ \wedge (-mg)\vec{k} = mg \ \rho\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}(\vec{R}) = \ \overrightarrow{O_1M} \ \wedge \vec{R} \ = \ \rho\overrightarrow{e_\rho} \ \wedge \left(R_\varphi \overrightarrow{e_\varphi} + \ R_z\vec{k}\right) = \ \rho R_\varphi \vec{k} - \ \rho R_z \overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}(\overrightarrow{F_e}) = \ \overrightarrow{O_1M} \ \wedge \overrightarrow{F_{ie}} = \ \rho\overrightarrow{e_\rho} \ \wedge \left(m\omega^2\rho\overrightarrow{e_\rho} - \ ma \ \vec{k}\right) = ma\rho\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_1}}(\overrightarrow{F_c}) = \ \overrightarrow{O_1M} \ \wedge \overrightarrow{F_{ic}} = \ \rho\overrightarrow{e_\rho} \ \wedge \left(-2m\omega\dot{\rho}\overrightarrow{e_\varphi}\right) = -2m\omega\rho\dot{\rho}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad mg\rho\overrightarrow{J_1} + \ \rho R_\varphi \ \overrightarrow{k_1} - \rho R_z\overrightarrow{e_\varphi} + \ ma\rho \ \overrightarrow{e_\varphi} - 2m\omega\rho\dot{\rho}\vec{k} = \ \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad (mg\rho - \rho R_z + \ ma\rho \ )\overrightarrow{e_\varphi} + (\rho R_\varphi \ - 2m\omega\rho\dot{\rho})\vec{k} = \ \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} mg\rho - \rho R_z + \ ma\rho = \ 0 \\ \ \rho R_\varphi \ - 2m\omega\rho\dot{\rho} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_z = mg\rho + \ ma \\ \ R_\varphi \ = 2m\omega\dot{\rho} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{On retrouve la réaction } \vec{R} = 2m\omega\dot{\rho}\overrightarrow{e_\varphi} + (mg + ma)\vec{k}$$

5- Energie potentielle de *M* par rapport au repère $\mathfrak{R}$:

Dans le repère $\mathfrak{R}$, la seule force dérivant une énergie potentielle (conservative) est le poids de $\mathcal{M}(\overrightarrow{P})$. Ainsi l'énergie potentielle du poids de *M* par rapport au repère $\mathfrak{R}$ est :

$$E_p(M/\mathfrak{R}) = E_p(\vec{P}/\mathfrak{R})$$

$$dE_p(M/\mathfrak{R}) = dE_p(\vec{P}/\mathfrak{R}) = -\mathrm{dW}(\vec{P}/\mathfrak{R}) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{k}\,(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k})$$

$$\Rightarrow dE_p(M/\mathfrak{R}) = mg\,dz \Rightarrow E_p(M/\mathfrak{R}) = mg\,z + cste$$

Ou bien

$$\vec{P} = -\overrightarrow{grad}E_p \longrightarrow -mg\vec{k} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = mg \ (1) \qquad \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \ (2) \qquad \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0 \ (3)$$

$$(1) \longrightarrow E_p = mg\,z + cste(x,y)$$

$$(2) \longrightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial cste(x,y)}{\partial x} = 0 \longrightarrow cste(x,y) = cste\,(y) \longrightarrow E_p = mg\,z + cste(y)$$

$$(3) \longrightarrow \frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial cste(y)}{\partial y} = 0 \longrightarrow cste(y) = cste$$

$$\Rightarrow E_p(M/\mathfrak{R}) = mg\,z + cste$$

6- Energie potentielle de *M* par rapport au repère $\mathfrak{R}_1$

$$\overrightarrow{F_{ie}} = m\omega^2\rho\overrightarrow{e_\rho} - ma\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F_e}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_\rho} & \frac{\partial}{\partial\rho} & m\omega^2 x_1 \\ \overrightarrow{e_\varphi} & \frac{\partial}{\rho\partial\varphi} & 0 \\ \vec{k} & \frac{\partial}{\partial z} & -ma \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{F_{ie}} \text{ est conservative dans } \mathfrak{R}_1$$

$$\Rightarrow E_p(M/\mathfrak{R}_1) = E_p(\vec{P}/\mathfrak{R}_1) + E_p(\overrightarrow{F_{ie}}/\mathfrak{R}_1)$$

Energie potentielle dérivée par $\overrightarrow{F_e}$ par rapport au repère $\mathfrak{R}_1$:

$$dE_p(\overrightarrow{F_{ie}}/\mathfrak{R}_1) = -\mathrm{dW}(\overrightarrow{F_{ie}}/\mathfrak{R}_1) = -\overrightarrow{F_{ie}}\,d\overrightarrow{O_1M}$$

$$= (-m\omega^2\rho\overrightarrow{e_\rho} + ma\,\vec{k})(d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + dz\vec{k})$$

$$M \in (O_1A)\ \forall\ \mathrm{t} \Rightarrow d\varphi = dz \Rightarrow \varphi = z$$

$$\Rightarrow dE_p(\overrightarrow{F_e}/\mathfrak{R}_1) = (-m\omega^2\rho\overrightarrow{e_\rho} + ma\,\vec{k})d\rho\overrightarrow{e_\rho}$$

$$E_p(\overrightarrow{F_e}/\mathfrak{R}_1) = -\frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + cste$$

Energie potentielle dérivée par $\vec{P}$ par rapport au repère $\mathfrak{R}_1$:

$$dE_p(\vec{P}/\mathfrak{R}_1) = -\mathrm{dW}(\vec{P}/\mathfrak{R}_1) = -\vec{P}\,d\overrightarrow{O_1M} = -mg\,\vec{k}(d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + dz\vec{k})$$

$$M \in (O_1A)\ \forall\ \mathrm{t} \Rightarrow d\varphi = dz \Rightarrow \varphi = z$$

$$\Rightarrow dE_p((\vec{P}/\mathfrak{R}_1) = -mg\,\vec{k}.d\rho\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\Rightarrow dE_p((\vec{P}/\mathfrak{R}_1)) = 0 \Rightarrow E_p((\vec{P}/\mathfrak{R}_1)) = cste$$

$$\Longrightarrow \qquad E_p(M/\Re_1) = -\frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + cste$$

7- Energie cinétique de *M* par rapport au repère $\Re_1$:

$$E_c(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\left\|\vec{V}(M/\Re_1)\right\|^2$$

$$\Longrightarrow \; E_c(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2$$

8- Théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re_1$:

$\Re_1$ est non galiléen $\Rightarrow \quad dE_c(M/\Re_1) = dW(\sum \overrightarrow{F_{ext}}) + dW(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1)$

$dW(\overrightarrow{F_c}/\Re_1) = 0$ (Voir le cours)

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{R} \quad \text{où} \quad \vec{R} = R_\varphi \overrightarrow{e_\varphi} + R_z\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \; dE_c(M/\Re_1) = dW(\vec{P}/\Re_1) + dW(\vec{R}\text{V}) + dW(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1)$$

$$\Longrightarrow \; \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = \frac{dW(\vec{P}/\Re_1)}{dt} + \frac{dW(\vec{R}/\Re_1)}{dt} + \frac{dW(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1)}{dt}$$

$$\Longrightarrow \; \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = P(\vec{P}/\Re_1) + P(\vec{R}/\Re_1) + P(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1) \text{ (P : puissance)}$$

$$\frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = m\dot{\rho}\ddot{\rho}$$

$$P(\vec{R}/\Re_1) = \vec{R}.\vec{V}(M/\Re_1) = -\text{mg}\vec{\text{k}}.\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} = 0$$

$$P(M/\Re_1) = \vec{P}.\vec{V}(M/\Re_1) = (R_\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + R_z\vec{k}).\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} = 0$$

$$P(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1) = \overrightarrow{F_e}.\vec{V}(M/\Re_1) = (m\omega^2\rho\overrightarrow{e_\rho} - ma\,\vec{k}).\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} = m\omega^2\rho\dot{\rho}$$

$$\Longrightarrow m\dot{\rho}\ddot{\rho} = m\omega^2\rho\dot{\rho} \Longrightarrow \ddot{\rho} = \omega^2\rho$$

⇒ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0$

9- Théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$:

Rappel :

Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel non galiléen $\Re_1$

$dE_m(M/\Re_1) = dW(\overrightarrow{F_{ncon}}/\Re_1) + dW(\overrightarrow{F_{ie}}/\Re_1)$ si $\overrightarrow{F_e}$ est non conservative

Si $\overrightarrow{F_e}$ est conservative, ce théorème s'écrit : $dE_m(M/\Re_1) = dW(\overrightarrow{F_{ncon}}/\Re_1)$

En tenant compte de l'énergie potentielle dérivée par $\overrightarrow{F_e}$ dans le référentiel $\Re_1$.

$\Re_1$ est non Galiléen $\Rightarrow dE_m(M/\Re_1) = dW(\overrightarrow{F_{ncon}}/\Re_1)$ en tenant compte de l'énergie potentielle dérivée par $\overrightarrow{F_e}$ dans le référentiel $\Re_1$ ($\overrightarrow{F_e}$ est conservative dans $\Re_1$).

$$\frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = \frac{dW(\overrightarrow{F_{nc}}/\Re_1)}{dt} = P(\overrightarrow{F_{nc}}/\Re_1)$$

$$E_m(M/\Re_1) = E_c(M/\Re_1) + E_p(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + cste$$

$$\frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = m\dot{\rho}\ddot{\rho} - m\omega^2\rho\dot{\rho}$$

$$\overrightarrow{F_{nc}} = \vec{R} \;\Longrightarrow\; P(\overrightarrow{F_{nc}}/\Re_1) = P(\vec{R}/\Re_1) = \vec{R}.\vec{V}(M/\Re_1)) = (R_\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + R_z\vec{k}).\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} = 0$$

$$\Longrightarrow m\dot{\rho}\ddot{\rho} - m\omega^2\rho\dot{\rho} = 0 \Longrightarrow \ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0$$

⇒ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\rho} - \boldsymbol{\omega^2\rho = 0}$