EXAMEN DE MECANIQUE DU POINT MATERIEL

SESSION DE RATTRAPAGE - AUTOMNE — **DUREE : 1H 30 MIN**

Pendule conique

Le référentiel d'étude $\mathcal{R}$, associé au repère $\left(O, \overrightarrow{\mathbf{e_x}}, \overrightarrow{\mathbf{e_y}}, \overrightarrow{\mathbf{e_z}}\right)$, est supposé galiléen. On étudie un pendule, constitué d'un fil inextensible de longueur **l** attaché au point **O**, au bout duquel se trouve un point matériel **M** de masse **m**. La base $(\overrightarrow{\mathbf{e_r}}, \overrightarrow{\mathbf{e_\theta}}, \overrightarrow{\mathbf{e_z}})$ est liée au point **M**. On supposera que le fil reste tendu en permanence et que les éventuels frottements sont négligeables.

On s'intéresse à la situation d'un **pendule conique**, pour lequel la trajectoire du fil dans **($\mathcal{R}$)** est un cône d'angle au sommet α constant.

1- Monter que le vecteur position s'écrit comme suit : $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{l\sin\alpha}\, \overrightarrow{\mathbf{e_r}} - \mathbf{l\cos\alpha}\, \overrightarrow{\mathbf{e_z}}$ 1.5

2- Exprimer les vecteurs vitesse absolue $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M})_{\mathbf{R}}$ et accélération $\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{M})_{\mathbf{R}}$ dans $(\overrightarrow{\mathbf{e_r}}, \overrightarrow{\mathbf{e_\theta}}, \overrightarrow{\mathbf{e_z}})$**.** 3

3- Exprimer les forces agissant sur le point **M** dans la base $(\overrightarrow{\mathbf{e_r}}, \overrightarrow{\mathbf{e_\theta}}, \overrightarrow{\mathbf{e_z}})$. 3

4- Ecrire le principe fondamentale de la dynamique dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$. 2

5- En projetant le **PFD** sur $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_z}$, montrer que la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ de rotation de **M** est constante et l'exprimer en fonction de **l**, **g** et $\boldsymbol{\alpha}$. On note que : $\dot{\theta} = \omega$. 2.5

6- Quelle valeur minimale peut prendre $\boldsymbol{\omega}$? Cette valeur sera notée $\boldsymbol{\omega_{min}}$. 1

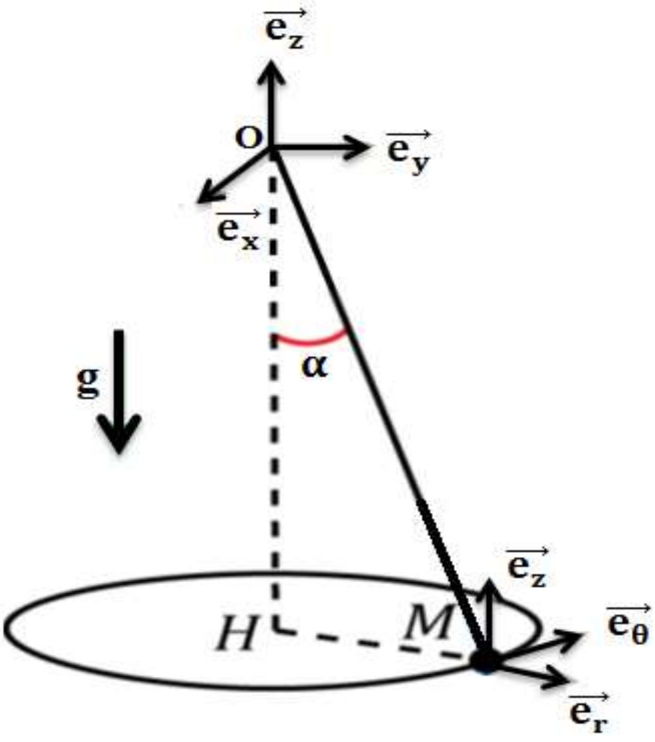
7- Que se passe-t-il pour $\boldsymbol{\omega} < \boldsymbol{\omega_{min}}$? 1

8- L'expérience montre que $\boldsymbol{\alpha}$ augmente lorsque $\boldsymbol{\omega}$ augmente. Quelle est la valeur limite prise par $\boldsymbol{\alpha}$ lorsque $\boldsymbol{\omega} \to \infty$? 1.5

9- Exprimer la norme **T** de tension du fil en fonction de **m**, **g** et $\boldsymbol{\alpha}$. 1.5

10- Sachant que le fil cède lorsque la tension du fil dépasse une valeur limite $\mathbf{T_{max}}$, exprimer l'angle $\boldsymbol{\alpha_{max}}$ et la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega_{max}}$ que peut atteindre le pendule conique. 1.5

11- **<u>Application numérique</u> : m = 20 g, g = 9,8 m.s^{-2}, l = 50 cm et $\mathbf{T_{max}}$ = 2 N**. Déterminer $\boldsymbol{\omega_{max}}$ en tour par seconde. 1.5



CORRECTION DE L'EXAMEN DE MECANIQUE DU POINT MATERIEL

1- le vecteur position s'écrit comme suit :

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r} + z\,\vec{e_z} = lsin\alpha\,\vec{e_r} - lcos\alpha\,\vec{e_z}$ avec $r = lsin\alpha$ et $z = -lcos\alpha\,\vec{e_z}$ **(1.5)**

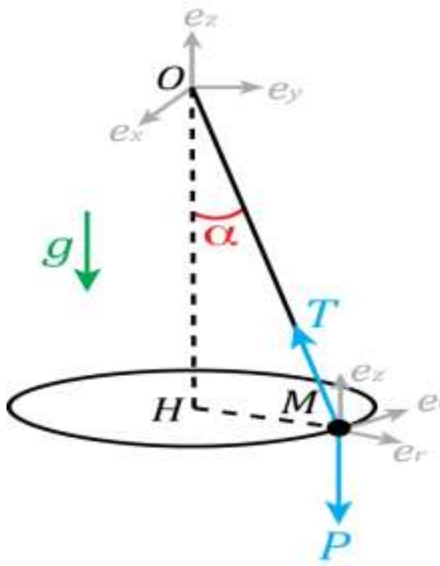
2-

Le vecteur vitesse absolue $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M})_R = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = lsin\alpha\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ **(1.5)**

Le vecteur accélération : $\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{M})_R = \left.\dfrac{d\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M})_R}{dt}\right)_R = -\,lsin\alpha\,\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + lsin\alpha\,\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ **(1.5)**

3- Les forces agissant sur le point **M** dans la base $(\vec{e_r},\ \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$.

- Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}$ **(1.5)**
- Tension du fil : $\vec{T} = -Tsin\alpha\,\vec{e_r} + Tcos\alpha\,\vec{e_z}$ **(1.5)**



4- Le principe fondamentale de la dynamique.

$$\vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{M})_R$$

$$-\mathrm{mg}\,\vec{e_z} - \mathrm{Tsin}\alpha\,\vec{e_r} + \mathrm{Tcos}\alpha\,\vec{e_z} = -\,\mathrm{mlsin}\alpha\,\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + \mathrm{mlsin}\alpha\,\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} \quad \textbf{(2)}$$

5- En projetant le ***PFD*** sur $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_z}$, on trouve :

$$\begin{cases} -\mathrm{Tsin}\alpha = -\,\mathrm{mlsin}\alpha\,\dot{\theta}^2 \\ 0 = \mathrm{mlsin}\alpha\,\ddot{\theta} \\ -\mathrm{mg} + \mathrm{Tcos}\alpha = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{T} = \mathrm{ml}\,\dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} = 0\ donc\ \dot{\theta} = cste = \omega \\ \mathrm{mg} = \mathrm{Tcos}\alpha \end{cases} \quad \textbf{(1.5)}$$

On vient ainsi de démontrer que la vitesse angulaire de rotation de M est constante, de valeur donnée par la première équation du système :

$$\mathrm{T} = \mathrm{ml}\,\omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{T}{\mathrm{ml}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{mg} = \mathrm{Tcos}\alpha \Longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l\,cos\alpha}} \quad \textbf{(1)}$$

ω Représente une vitesse angulaire de rotation: c'est donc une grandeur positive et bornée. Il n'y a donc de solution que si : $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$

6- La vitesse angulaire atteint sa valeur minimale lorsque **cosα** atteint sa valeur maximale :

$\cos\alpha = 1 \Longrightarrow \alpha = 0$ donc $\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ **(1)**

7- Si on impose au pendule une vitesse angulaire de rotation $\omega < \omega_{min}$, il n'y a pas de valeur de α qui soit solution du problème. Le pendule ne peut donc pas décrire un cône d'angle α constant et il se dirige vers la seule position d'équilibre du problème, à savoir α = 0. **(1)**

8- L'expérience montre que $\boldsymbol{\alpha}$ augmente lorsque **ω** augmente.

La valeur limite prise par $\boldsymbol{\alpha}$ lorsque $\boldsymbol{\omega} \rightarrow \infty$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\,cos\alpha}}$$

Ainsi $\omega \nearrow \Longrightarrow \alpha \nearrow$

Ainsi $\omega \rightarrow \infty \Longrightarrow \cos\alpha \rightarrow 0$ soit $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ **(1.5)**

9- La norme ***T*** de tension du fil en fonction de ***m***, ***g*** et $\boldsymbol{\alpha}$.

$$\mathrm{mg} = \mathrm{Tcos}\alpha \Rightarrow \mathrm{T} = \frac{mg}{\cos\alpha} \quad \textbf{(1.5)}$$

10- D'après l'expression précédente :

$$\mathrm{T} \nearrow \Leftrightarrow \cos\alpha \searrow \Leftrightarrow \alpha \nearrow$$

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_{max} \Leftrightarrow \alpha = \alpha_{max} = Arccos\left(\frac{mg}{T_{max}}\right)$$

$$\text{et} \quad \omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{l\cos(\alpha_{max})}} = \sqrt{\frac{T_{max}}{lm}} \quad \textbf{(1.5)}$$

11- <u>**Application numérique :**</u> ***m = 20 g, g = 9,8 m.s***$^{-2}$***, l = 50 cm et*** $\boldsymbol{T_{max}}$ ***= 2 N.***

$\alpha_{max} = 84.4\,°$ et $\omega_{max} = 2.25\ tour.s^{-1}$ **(1.5)**