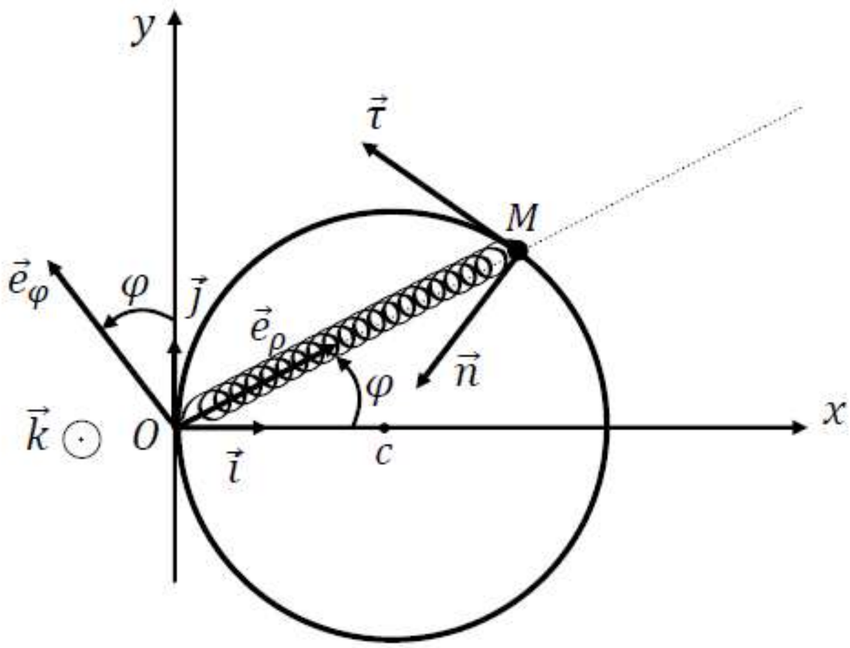
Université Cady Ayyad, Marrakech — *Année universitaire 2021 - 2022*

Faculté polydisciplinaire - Safi — *Filière : SMPC*

Session de rattrapage d'Automne (S1) — *Durée : 1h30min*

Examen de Mécanique du Point Matériel

Soient $\Re(O,\ xyz)$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $(\Re_1(\overrightarrow{e_\rho},\ \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$ le référentiel relatif. Dans ***le plan horizontal (xOy)***, une tige circulaire de rayon a et de centre C est maintenue fixe. Un anneau M de masse m est assujetti à se déplacer ***sans frottement*** sur la tige circulaire. Il est repéré par : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} = 2a\cos\varphi\,\overrightarrow{e_\rho}$ où $\varphi = (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}})$ avec $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. L'anneau M est attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide a. L'autre extrémité du ressort est fixée au point O. En plus de la force de rappel $\vec{F}$ exercée par le ressort, l'anneau M est soumis à la réaction de la tige $\vec{R} = R_n\vec{n} + R_k\vec{k}$ et à son poids $\vec{P}$. On désigne par $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{k})$ la base de Freinet comme l'indique la figure ***($\vec{n}$ est le vecteur dirigé vers le centre de cercle)***. L'accélération de la pesanteur est telle que $\vec{g} = -g\,\vec{k}$ et la vitesse de rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$ est donnée par $\vec{\Omega}\,(\Re_1/\Re) = \dot{\varphi}\,\vec{k}$.



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\overrightarrow{e_\rho},\ \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$.

I- Etude cinématique (4,5 pt)

1- Exprimer $\vec{V}_r(M)$ et $\vec{V}_e(M)$ respectivement les vitesses relative et d'entrainement et déduire $\vec{V}_a(M)$ la vitesse absolue de M.	1.5
2- Déduire les expressions des vecteurs tangent $\vec{\tau}$ et normal $\vec{n}$ à la trajectoire au point M.	1
3- Exprimer $\vec{\gamma}_r(M)$, $\vec{\gamma}_e(M)$ et $\vec{\gamma}_c(M)$ respectivement les accélérations relative, d'entrainement et de Coriolis de M. Puis déduire $\vec{\gamma}_a(M)$ l'accélération absolue de M.	2

II- Application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel relatif $\mathfrak{R}_1$ (7,5 pt)	
1- Donner les expressions des forces appliquées à l'anneau M.	1
2- Ecrire le PFD appliqué à M, en l'exprimant dans $(\overrightarrow{e_\rho},\ \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$.	1.5
3- En projetant le principe fondamental de la dynamique sur $\vec{\tau}$, montrer que l'équation différentielle du mouvement de M s'écrit sous la forme : $\ddot{\varphi} + \frac{k}{2m}(1 - 2cos\varphi)\sin\varphi = 0$.	1.5
4- Que devient cette équation pour des faibles valeurs de φ (On donne ($sin\varphi \cong \varphi$ et $cos\varphi \cong 1$).	0.5
5- Déduire l'équation horaire du mouvement sachant que : $\varphi(t = 0) = \frac{\pi}{4}$ et $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$.	1
6- En projetant le principe fondamental de la dynamique sur $\vec{n}$ et $\vec{k}$, trouver l'expression de la réaction $\vec{R}$.	1.5
III- Application du théorème d'énergie cinétique dans le référentiel absolu $\mathfrak{R}$ (4 pt)	
1- Exprimer l'énergie cinétique $E_c(M/\mathcal{R})$ de M dans $\mathcal{R}$.	0.5
2- Exprimer les puissances de chacune des forces appliquées sur le point M dans $\mathcal{R}$.	1.5
3- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, retrouver l'équation différentielle vérifiée par φ.	2
IV- Application du théorème du moment cinétique dans le référentiel absolu $\mathfrak{R}$ (4 pt)	
1- Calculer $\overrightarrow{\sigma_C}\,(M/\mathfrak{R})$ le moment cinétique par rapport au point C de M dans $\mathfrak{R}$.	1
2- Calculer les moments par rapport à C des forces appliquées à M dans $\mathfrak{R}$.	1.5
3- En appliquant le théorème du moment cinétique, retrouver l'équation différentielle du mouvement de M dans $\mathfrak{R}$.	1.5

Université Cady Ayyad, Marrakech — Année universitaire 2021 - 2022
Faculté polydisciplinaire - Safi — Filière : SMPC
Session de rattrapage d'Automne (S1) — Durée : 1h30min

Correction de l'examen de Mécanique du Point Matériel

I- Etude cinématique

1- Les expressions $\vec{V}_r(M)$ et $\vec{V}_e(M)$ respectivement les vitesses relative et d'entrainement et en déduire $\vec{V}_a(M)$ la vitesse absolue de M.

- La vitesse relative : $\vec{V}_r(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d(2acos\varphi\ \vec{e_\rho})}{dt}\right|_{R_1} = -2a\dot{\varphi}\ \sin\varphi\,\vec{e}_\rho$
- La vitesse d'entrainement :

$$\vec{V}_e(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO}}{dt}\right|_{\mathfrak{R}} + \vec{\Omega}\,(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) \wedge \overrightarrow{OM} = \dot{\varphi}\,\vec{k} \wedge 2a\cos\varphi\,\vec{e}_\rho = 2a\dot{\varphi}\ \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

On déduit $\vec{V}_a(M)$ la vitesse absolue de M.

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) = 2a\dot{\varphi}\ (-\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi)$$

2- En déduire les expressions des vecteurs tangent $\vec{\tau}$ et normal $\vec{n}$ à la trajectoire au point M.

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}\,(M/\mathfrak{R})}{\left\|\vec{V}\,(M/\mathfrak{R})\right\|} = -\sin\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\vec{n} = \vec{k} \wedge \vec{\tau} = \vec{k} \wedge \left(-\sin\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}\right) = -\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi} - \cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} = -\cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} - \sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

3- Exprimons $\vec{\gamma}_r(M)$, $\vec{\gamma}_e(M)$ et $\vec{\gamma}_c(M)$ respectivement les accélérations relative, d'entrainement et de Coriolis de M. Puis déduisons $\vec{\gamma}_a(M)$ l'accélération absolue de M.

- L'accélération relative de M :

$$\overrightarrow{\gamma_r}(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{\mathfrak{R}_1} = \left.\frac{d^2(2acos\varphi\overrightarrow{e_\rho})}{dt^2}\right|_{\mathfrak{R}_1} = -2a\,(\ddot{\varphi}\ sin\varphi + \dot{\varphi}^2 cos\varphi\,)\overrightarrow{e_\rho}$$

- L'accélération d'entrainement de M :

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O/R) + \frac{d\Omega\,(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R})}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}\,(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) \wedge (\vec{\Omega}\,(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) \wedge \overrightarrow{OM}\,)$$

$$\overrightarrow{\gamma_e}(M) = \ddot{\varphi}\,\vec{k} \wedge 2acos\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\varphi}\,\vec{k} \wedge (\dot{\varphi}\,\vec{k} \wedge 2acos\varphi\overrightarrow{e_\rho}) = 2a\ddot{\varphi}\ cos\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi} - 2a\dot{\varphi}^2 cos\varphi\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e}(M) = -2a\left(\dot{\varphi}^2 cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} - \ddot{\varphi}\ cos\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi}\right)$$

- L'accélération de Coriolis de M :

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2(\vec{\Omega}\,(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) \wedge \vec{V}_r(M)$$

$$\overrightarrow{\gamma_C}(M) = 2\dot{\varphi}\,\vec{k} \wedge \vec{V}_r(M) = 2\dot{\varphi}\,\vec{k} \wedge (-2a\dot{\varphi}\ \sin\varphi)\overrightarrow{e_\rho} = -4a\dot{\varphi}^2 sin\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi}$$

D'après la loi de composition des accélérations, on déduit l'accélération absolue de M :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_a(M) &= \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M) = \\ &= -2a\,(\ddot{\varphi}\ sin\varphi + \dot{\varphi}^2 cos\varphi\,)\overrightarrow{e_\rho} - 2a\left(\dot{\varphi}^2 cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} - 2a\ddot{\varphi}\ cos\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi}\right) - 4a\dot{\varphi}^2 sin\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi} \\ &= -2a\,(\ddot{\varphi}\ sin\varphi + 2\dot{\varphi}^2 cos\varphi\,)\overrightarrow{e_\rho} + 2a(\ddot{\varphi}\ cos\varphi - 2\dot{\varphi}^2 sin\varphi)\ \overrightarrow{e_\varphi}\end{aligned}$$

II- Application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel relatif $\mathfrak{R}_1$.

1- Les expressions des forces appliquées à l'anneau M par rapport à $\mathfrak{R}_1$.

$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$

$$\vec{R} = R_n\vec{n} + R_k\vec{k} = -R_n \cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} - R_n\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi} + R_k\vec{k}$$

$$\vec{F} = -k(\rho - a)\overrightarrow{e_\rho} = -ka(2cos\varphi - 1)\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\overrightarrow{f_{ie}} = -m\overrightarrow{\gamma_e}(M) = -2am\left(-\dot{\varphi}^2cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \ddot{\varphi}\,cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}\right)$$

$$\overrightarrow{f_{iC}} = -m\overrightarrow{\gamma_C}(M) = 4am\dot{\varphi}^2sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

2- Ecrivons le PFD appliqué à M, en l'exprimant dans $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$.

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \overrightarrow{f_{ie}} + \overrightarrow{f_{iC}} = m\,\overrightarrow{\gamma_r}(M)$$

$$-mg\vec{k} - R_n\cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} - R_n\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi} + R_k\vec{k} - ka(2cos\varphi - 1)\overrightarrow{e_\rho} - 2am\left(-\dot{\varphi}^2cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \ddot{\varphi}\,cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}\right)$$
$$+ 4am\dot{\varphi}^2sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi} = -2am\,(\ddot{\varphi}\,sin\varphi + \dot{\varphi}^2cos\varphi\,)\overrightarrow{e_\rho}$$

$$-mg\vec{k} - R_n\cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} - R_n\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi} + R_k\vec{k} + [-ka(2cos\varphi - 1) + 2am\dot{\varphi}^2cos\varphi]\,\overrightarrow{e_\rho}$$
$$+ (-2am\ddot{\varphi}\,cos\varphi + 4am\dot{\varphi}^2sin\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi} = -2am\,(\ddot{\varphi}\,sin\varphi + \dot{\varphi}^2cos\varphi\,)\overrightarrow{e_\rho}$$

$$[-ka(2cos\varphi - 1) + 2am\dot{\varphi}^2cos\varphi - R_n\cos\varphi]\,\overrightarrow{e_\rho} + (-2am\ddot{\varphi}\,cos\varphi + 4am\dot{\varphi}^2sin\varphi - R_n\sin\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}$$
$$+ (R_k - mg)\vec{k} = -2am\,(\ddot{\varphi}\,sin\varphi + \dot{\varphi}^2cos\varphi\,)\overrightarrow{e_\rho}$$

3- En projetant le principe fondamental de la dynamique sur $\vec{\tau}$, pour trouver l'équation différentielle du mouvement de M.

$$\{[-ka(2cos\varphi - 1) + 2am\dot{\varphi}^2cos\varphi - R_n\cos\varphi]\,\overrightarrow{e_\rho} + (-2am\ddot{\varphi}\,cos\varphi + 4am\dot{\varphi}^2sin\varphi - R_n\sin\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}$$
$$+ (R_k - mg)\vec{k} = -2am\,(\ddot{\varphi}\,sin\varphi + \dot{\varphi}^2cos\varphi\,)\overrightarrow{e_\rho}\}.(-\sin\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi})$$

$$-[-ka(2cos\varphi - 1) + 2am\dot{\varphi}^2cos\varphi - R_n\cos\varphi]\sin\varphi$$
$$+ (-2am\ddot{\varphi}\,cos\varphi + 4am\dot{\varphi}^2sin\varphi - R_n\sin\varphi)\cos\varphi = 2am\sin\varphi\,(\ddot{\varphi}\,sin\varphi + \dot{\varphi}^2cos\varphi\,)$$

$$2m\ddot{\varphi} + k(1 - 2cos\varphi)\sin\varphi = 0$$

4- cette équation pour des faibles valeurs de φ.

$$2m\ddot{\varphi} - k\varphi = 0 \qquad \text{avec} \qquad (sin\varphi \cong \varphi \quad \text{et } cos\varphi \cong 1)$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{k}{2m}\varphi = 0$$

5- Déduisons l'équation horaire du mouvement sachant que : $\varphi(t = 0) = 0$ et $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$.

$$\varphi(t) = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$$

$$\dot{\varphi}(t) = A\omega_0 e^{\omega_0 t} - \omega_0\,Be^{-\omega_0 t}$$

$$\varphi(0) = A + B = \frac{\pi}{4}$$

$$\dot{\varphi}(0) = A\omega_0 - \omega_0\,B = 0$$

$$A = B = \frac{\pi}{8}$$

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{8}(e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}cosh\omega_0 t$$

6- En projetant le principe fondamental de la dynamique sur $\vec{n}$ et $\vec{k}$, pour trouver l'expression de la réaction $\vec{R}$.

- La projection sur $\vec{n}$:

$$\{[-ka(2cos\varphi - 1) + 2am\dot{\varphi}^2 cos\varphi - R_n \cos\varphi]\,\overrightarrow{e_\rho} + (-2am\ddot{\varphi}\,cos\varphi + 4am\dot{\varphi}^2 sin\varphi - R_n \sin\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$+ (R_k - mg)\vec{k} = -2am\,(\ddot{\varphi}\,sin\varphi + \dot{\varphi}^2 cos\varphi\,)\overrightarrow{e_\rho}\}.(-\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi} - \cos\varphi\overrightarrow{e_\rho})$$

$$-[-ka(2cos\varphi - 1) + 2am\dot{\varphi}^2 cos\varphi - R_n \cos\varphi]\cos\varphi$$

$$-(-2am\ddot{\varphi}\,cos\varphi + 4am\dot{\varphi}^2 sin\varphi - R_n \sin\varphi)\sin\varphi = 2am\,(\ddot{\varphi}\,sin\varphi + \dot{\varphi}^2 cos\varphi\,)\cos\varphi$$

$$R_n = -ka(2cos\varphi - 1)cos\varphi + 4am\dot{\varphi}^2$$

- La projection sur $\vec{k}$:

$$\{[-ka(2cos\varphi - 1) + 2am\dot{\varphi}^2 cos\varphi - R_n \cos\varphi]\,\overrightarrow{e_\rho}$$

$$+ (-2am\ddot{\varphi}\,cos\varphi + 4am\dot{\varphi}^2 sin\varphi - R_n \sin\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi} + (R_k - mg)\vec{k}$$

$$= -2am\,(\ddot{\varphi}\,sin\varphi + \dot{\varphi}^2 cos\varphi\,)\overrightarrow{e_\rho}\}.\vec{k}$$

$$R_k = mg$$

III- Application du théorème d'énergie cinétique dans le référentiel absolu $\mathfrak{R}$

1- Expressions de l'énergie cinétique $E_c(M/\mathcal{R})$ de M dans $\mathcal{R}$.

$$E_C(M) = \frac{1}{2}m{V_a}^2(M) = 2ma^2\dot{\varphi}^{\,2}$$

2- Expressions des puissances de chacune des forces appliquées sur le point M dans $\mathcal{R}$.

$$P\,(\vec{P}\,/\mathfrak{R}) = \vec{P}.\vec{V}_a(M) = (-mg\vec{k}).[2a\dot{\varphi}\,\,(-\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi)] = 0$$

$$P\,(\vec{R}\,/\mathfrak{R}) = \vec{R}.\vec{V}_a(M) = (R_n\vec{n} + R_k\vec{k}\,).[2a\dot{\varphi}\,\,(-\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi)] = 0$$

$$P\,(\vec{F}\,/\mathfrak{R}) = \vec{F}.\vec{V}_a(M) = (-ka(2cos\varphi - 1)\overrightarrow{e_\rho}).[2a\dot{\varphi}\,\,(-\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi)]$$

$$= 2ka^2\dot{\varphi}\,\sin\varphi(2cos\varphi - 1)$$

3- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, pour retrouver l'équation différentielle vérifiée par ρ.

$$\frac{dE_C(M)}{dt} = ma^2\dot{\varphi}\,\ddot{\varphi}$$

$$\mathrm{P}\left(\sum\vec{\mathrm{F}}\right)\Big|_{\mathcal{R}} = P\,(\vec{P}\,/\mathfrak{R}) + P\,(\vec{R}\,/\mathfrak{R}) + P\,(\vec{F}\,/\mathfrak{R})$$

$$\mathrm{P}\left(\sum\vec{\mathrm{F}}\right)\Big|_{\mathcal{R}} = 0 + 0 + 2ka^2\dot{\varphi}\,\sin\varphi(2cos\varphi - 1)$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'énonce comme suit :

$$\frac{dE_C(M)}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} = \mathrm{P}\left(\sum\vec{\mathrm{F}}\right)\Big|_{\mathcal{R}}$$

$$ma^2\dot{\varphi}\,\ddot{\varphi} = 2ka^2\dot{\varphi}\,\sin\varphi(2cos\varphi - 1)$$

$$m\ddot{\varphi} = 2k\sin\varphi(2cos\varphi - 1)$$

Pour des faibles oscillations ($\varphi \longrightarrow 0$), on retrouve l'équation différentielle du mouvement de M vérifiée par ρ: $\ddot{\varphi} - \frac{k}{2m}\varphi = 0$

IV- Application du théorème du moment cinétique dans le référentiel absolu $\mathfrak{R}$

1- Calculons $\overrightarrow{\sigma_C}\,(M/\mathfrak{R})$ le moment cinétique par rapport au point C de M dans $\mathfrak{R}$.

$$\overrightarrow{\sigma_C}\,(M/\mathfrak{R}) = \overrightarrow{CM}\,\wedge m\vec{V}_a(M) = \left(-a\,(-\cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} - \sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}\,)\right)\wedge m\left(2a\dot{\varphi}\,\,(-\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi)\right)$$

$$= 2ma^2\dot{\varphi}\,\sin^2\varphi\,\vec{k} + 2ma^2\dot{\varphi}\,\cos^2\varphi\,\vec{k} = 2ma^2\dot{\varphi}\,\vec{k}$$

2- Calcul des moments par rapport à C des forces appliquées à M dans $\mathfrak{R}$.

$$\vec{\mathcal{M}}\,(\vec{P}\,/\mathfrak{R}) = \overrightarrow{CM}\,\wedge\vec{P} = (-a\,\vec{n})\,\wedge(-mg\vec{k}) = a\,mg\,\vec{\tau} = a\,mg\,(-\sin\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi})$$

$$\vec{\mathcal{M}}\left(\vec{R}/\Re\right)=\overrightarrow{CM}\wedge\vec{R}=(-a\,\vec{n})\wedge\left(R_n\vec{n}+R_k\vec{k}\right)=-aR_k\vec{\tau}\;=-aR_k\left(-\sin\varphi\overrightarrow{e_\rho}+\cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}\right)$$

$$\vec{\mathcal{M}}\left(\vec{F}/\Re\right)=\overrightarrow{CM}\wedge\vec{F}=(-a\,\vec{n})\wedge\left(-ka(2\cos\varphi-1)\overrightarrow{e_\rho}\right)$$

$$=-a\left(-\cos\varphi\overrightarrow{e_\rho}-\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}\right)\wedge\left(-ka(2\cos\varphi-1)\overrightarrow{e_\rho}\right)=ka^2\sin\varphi(2\cos\varphi-1)\vec{k}$$

3- En appliquant le théorème du moment cinétique pour retrouver l'équation différentielle du mouvement de M.

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_C}(M/\Re)}{dt}=2a^2m\ddot{\varphi}\vec{k}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_C}(M/\Re)}{dt}=\vec{\mathcal{M}}\left(\vec{P}/\Re\right)+\vec{\mathcal{M}}\left(\vec{R}/\Re\right)+\vec{\mathcal{M}}\left(\vec{F}/\Re\right)$$

$$2a^2m\ddot{\varphi}\vec{k}=a\,mg\left(-\sin\varphi\overrightarrow{e_\rho}+\cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}\right)-aR_k\left(-\sin\varphi\overrightarrow{e_\rho}+\cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}\right)+ka^2\sin\varphi(2\cos\varphi-1)\vec{k}$$

$$2m\ddot{\varphi}=k\sin\varphi(2\cos\varphi-1)$$

$$2m\ddot{\varphi}-k\varphi=0\qquad\text{avec}\qquad(\sin\varphi\cong\varphi\quad\text{et }\cos\varphi\cong1)$$

$$\ddot{\varphi}-\frac{k}{2m}\varphi=0$$