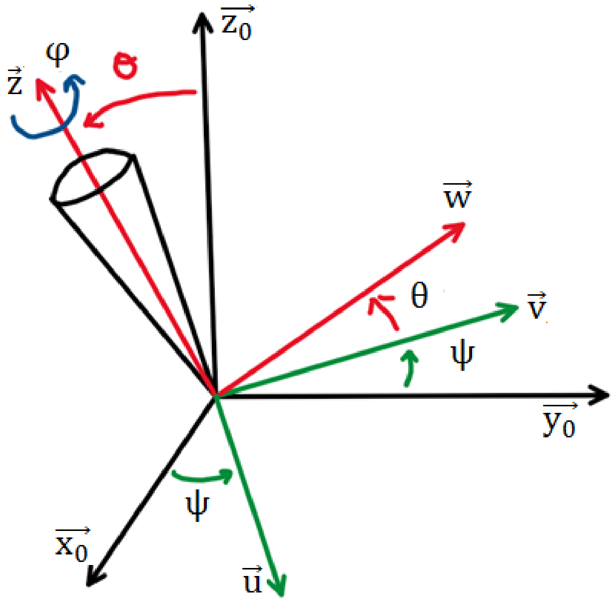
Université Cady Ayyad, Marrakech *Année universitaire 2022 - 2023*
Faculté polydisciplinaire - Safi *Filière : SMP*
Session de rattrapage d'Automne (S5) *Durée : 2 h*

Examen de Mécanique Analytique & Vibrations

Problème de Mécanique Analytique

Par rapport au repère orthonormé direct fixe et galiléen $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ où $(O,\overrightarrow{z_0})$ est la verticale ascendante, on considère dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, le mouvement d'un cône homogène (S) autour de son sommet fixe O. Le solide (S) et de masse m, de centre d'inertie G et d'axe de symétrie de révolution $(O,\vec{z})$.



On pose $\overrightarrow{OG} = a\,\vec{z}$ $(a > 0)$ et on note A, A et C les moments principaux d'inertie de (S) en O. On introduit les repères orthonormés directs intermédiaires : $R_1(O,\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{z_0})$ et $R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ et on note : $\psi = (\widehat{O\overrightarrow{x_0}, O\vec{u}})$, $\theta = (\widehat{O\overrightarrow{z_0}, O\vec{z}})$ et φ les angles de précession, de nutation et de rotation propre de (S) mesurés autour de O.

A tout instant, on suppose :

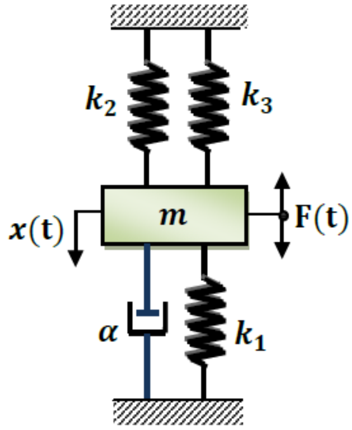
- qu'une force connue, donnée par $\vec{F} = X\,\vec{u} + Y\,\vec{w} + Z\,\vec{z}$, est appliquée sur (S) en G.
- et qu'une couple $\vec{C}$ impose à (S) une précession : $\psi = \omega t + \psi_0$ (ω et ψ_0 constantes).

<u>Toutes les liaisons seront prises principales</u>

1- Donner, ***dans la base associée au repère*** R_2, les composantes des vecteurs rotation instantanée $\vec{\Omega}\,(S/R_0)$ de (S) par rapport à R_0 et vitesse $\vec{V}\,(G/R_0)$ de G par rapport à R_0 compatibles avec les liaisons principales.
2- Calculer l'énergie cinétique compatible $T(S/R_0)$ de (S) par rapport à R_0;
3- Donner l'énergie potentielle de pesanteur $U_p(S/R_0)$ de (S) par rapport à R_0;
4- Calculer les puissances virtuelles de la réaction $\overrightarrow{R_0}$, du couple $\vec{C}$ et de la force $\vec{F}$.
5- Ecrire les équations de Lagrange du mouvement de (S) par rapport à R_0.

Problème de vibrations

Le système de la figure ci-contre est constitué d'une masse $\boldsymbol{m}$, d'un ensemble de ressorts k_1, k_2, k_3 et d'un amortisseur de coefficient d'amortissement visqueux $\boldsymbol{\alpha}$.



1. Trouver le système équivalent. On donne :

$$k_1 = k \text{ et } k_2 = k_3 = 2k$$

<u>I- Etude du système libre non amorti</u>

1- Trouver l'équation différentielle du mouvement.

2- Déduire la pulsation propre ω_0 et la solution de l'équation différentielle du mouvement.

<u>II. Etude du système libre amorti</u>

1- Donner l'équation différentielle du mouvement.

2- On donne $\alpha = \sqrt{\frac{km}{8}}$, calculer le facteur d'amortissement $\boldsymbol{\delta}$ puis la pulsation des oscillations amorties ω_a.

3- Donner la solution de l'équation différentielle du mouvement dans le cas des oscillations faiblement amorties.

<u>III. Etude du système forcé amorti</u>

Le système est soumis à une force extérieure $F(t) = F_0 \cos\Omega t$ appliquée à la masse $\boldsymbol{m}$.

1- Etablir l'équation différentielle du mouvement forcé amorti.

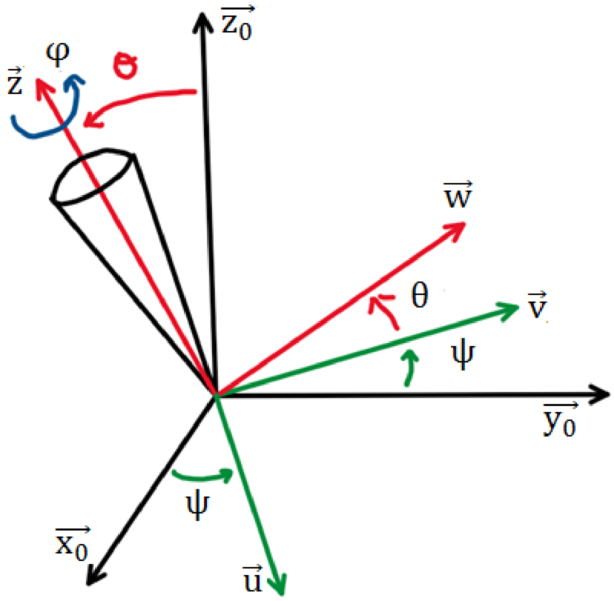
2- Donner les expressions de l'amplitude $(\boldsymbol{\Omega})$ et de la phase $(\boldsymbol{\Omega})$ de la solution particulière représentant le régime permanent.

3- Donner la solution générale de l'équation différentielle du mouvement.

Université Cady Ayyad, Marrakech *Année universitaire 2022 - 2023*
Faculté polydisciplinaire - Safi *Filière : SMP*
Session de rattrapage d'Automne (S5) *Durée : 2 h*

Correction de l'examen de Mécanique Analytique & Vibrations

Problème de Mécanique Analytique



Le solide est paramétré par 6 paramètres principales : (x, y, z) et (ψ, θ, φ)

On a : O est un point fixe

et $\psi = \omega t + \psi_0$

$$R_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0}) \xrightarrow[(O,\vec{z_0})]{\text{rot }\psi:\text{precession}} R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z_0}) \xrightarrow[(O,\vec{u})]{\text{rot }\theta} R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z}) \xrightarrow[(O,\vec{z})]{\text{rot }\varphi} R_S \text{ lié à } (S)$$

1- les composantes de vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R_0)$

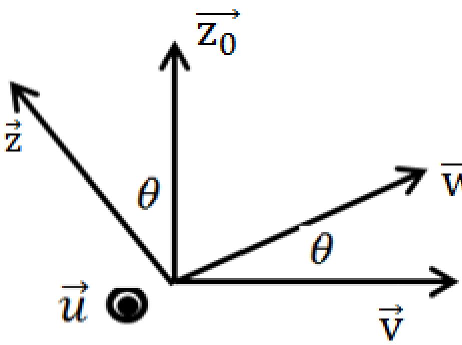
$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z_0} + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} = \omega\cos\theta\,\vec{z} + \omega\sin\theta\,\vec{w} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\theta}\,\vec{u} + \omega\sin\theta\,\vec{w} + (\omega\cos\theta + \dot{\varphi})\,\vec{z}$$

Avec $\vec{z_0} = \cos\theta\vec{z} + \sin\theta\,\vec{w}$

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\dot{\theta}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\dot{\varphi}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{\Omega^*}(S) = \begin{pmatrix}\theta^*\\0\\\varphi^*\end{pmatrix}_{R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$



Les composantes de vecteur rotation $\vec{V}(G/R_0)$

$$\vec{V}(G/R_0) = \vec{V}(O/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{OG} = a\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{z}$$

$$= a\left(\dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\,\vec{z}\right) \wedge \vec{z} = a(-\dot{\theta}\vec{w} + \dot{\psi}\sin\theta\vec{u})$$

$$\vec{V}(G/R_0) = a\omega\sin\theta\vec{u} - a\dot{\theta}\vec{w}$$

$\vec{V}(O/R_0) = \vec{0}$: O est fixe

Donc : $\vec{V^*}(G/R_0) = \frac{d\vec{V}(G/R_0)}{d\dot{\theta}}\dot{\theta}^* + \frac{d\vec{V}(G/R_0)}{d\dot{\varphi}}\dot{\varphi}^* = -a\dot{\theta}^*\vec{w}$

Avec $\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{d\dot{\theta}} = -a\vec{w}$ et Avec $\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{d\dot{\varphi}} = \vec{0}$

$$\vec{V^*}(G/R_0) = \underset{R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z})}{} \begin{pmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta}^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

2- Calcul de l'énergie cinétique compatible $T(S/R_0)$ de (S) par rapport à R_0

$\psi = \omega t + \psi_0$: liaison principale dépendante du temps ; donc T est non quadratique

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} m\left[\vec{V}(O/R_0)\right]^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t(S/R_0)[J_O]\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$T(S/R_0) = 0 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t(S/R_0)\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})} \vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\left\{A\left(\underbrace{\omega^2\sin^2\theta}_{\text{non quadratique}} + \dot{\theta}^2\right) + C(\underbrace{\omega\cos\theta}_{\text{non quadratique}} + \dot{\varphi})^2\right\}$$

3- L'énergie potentielle de pesanteur $U_p(S/R_0)$ de (S) par rapport à R_0 est :

$$U_p(S/R_0) = +mg\,\vec{OG}.\vec{z_0} = +\,mga\cos\theta + cste$$

On trouve donc, les forces généralisées :

$$Q_\theta = -\frac{\partial U_p}{\partial \theta} = mga\,\dot{\theta}\sin\theta \quad \text{et} \qquad Q_\varphi = -\frac{\partial U_p}{\partial \varphi} = 0$$

4- Calcul des puissances virtuelles de la réaction $\vec{R_0}$, du couple $\vec{C}$ et de la force $\vec{F}$.

- Bilan des forces :
  - $\vec{P} = -mg\,\vec{z_0}$ conservative
  - $\vec{R_0} = \begin{pmatrix} \vec{R_{N_1}} \\ \vec{R_{N_2}} \\ \vec{R_{N_3}} \end{pmatrix}$ liaison
  - $\vec{F}$ avec $\vec{F} = X\,\vec{u} + Y\,\vec{w} + Z\,\vec{z}$
  - $\vec{C} = C\,\vec{z_0}$ liaison

<u>Les puissances virtuelles :</u>

- $P^*(\vec{R_0}) = \vec{R_0}.\vec{V}(O/R_0) = 0$ car $\vec{V}(O/R_0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}^*(O/R_0) = \vec{0}$
- $P^*(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{V}^*(G/R_0) = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta}^* \\ 0 \end{pmatrix} = -aY\dot{\theta}^*$ $\qquad P^*(\vec{F}) = -aY\dot{\theta}^*$

$$Q_\theta = -\,aY \quad \text{et} \qquad Q_\varphi = 0$$

- $\vec{C}$ agit juste sur la précession

  Donc $P^*(\vec{C}) = \vec{C}.\vec{\Omega}_{precesion}{}^* = 0$

  car $\vec{\Omega}_{precesion} = \dot{\psi}\,\vec{z_0} = \omega\,\vec{z_0} \Rightarrow \vec{\Omega^*}_{precesion} = \vec{0} \Rightarrow Q_\theta = 0$ et $Q_\varphi = 0$

$$\vec{\Omega}_{precesion}{}^* = \frac{\partial\vec{\Omega}_{precesion}}{\partial\theta}\partial\theta + \frac{\partial\vec{\Omega}_{precesion}}{\partial\varphi}\partial\varphi = 0$$

On trouve donc :

$$Q_{\theta_{global}} = -\,a\,Y \qquad \text{et} \qquad Q_{\varphi_{global}} = 0$$

5- Les équations de Lagrange du mouvement de (S) par rapport à R_0.

θ, φ, $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$ sont indépendantes

$L\varphi$: $\quad \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \omega\cos\theta) \qquad \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial U_P}{\partial \varphi} = 0$ et $Q_{\varphi_{global}} = 0$

Donc d'après l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = cste \qquad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi} + \omega\cos\theta = cste = K$$

donc à t= 0 $\dot{\varphi}_0 + \omega\cos\theta_0 = 0$: Les conditions initiales

$L\theta$: $\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = A\dot\theta$ $\quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = A\omega^2 \sin\theta\cos\theta - C\omega\sin\theta\,(\dot\varphi + \omega\cos\theta) = A\omega^2\sin\theta\cos\theta - K\omega\sin\theta$

avec $C\,(\dot\varphi + \omega\cos\theta) = cste = K$

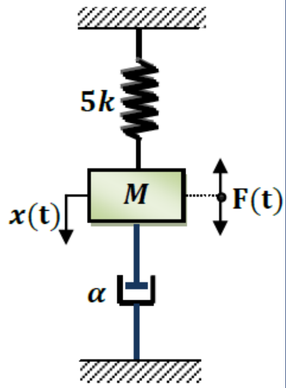
$$\frac{\partial U_P}{\partial \theta} = -mga\sin\theta$$
$$Q_{\varphi_{global(sans\ U_P)}} = 0$$

Donc d'après l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U_P}{\partial \theta} = Q_{\varphi_{global(sans\ U_P)}}$$
$$A\ddot\theta - A\omega^2\sin\theta\cos\theta + K\omega\sin\theta - mga\sin\theta = -a\,Y$$

Deux équations des 2 inconnus θ et φ

Problème de vibrations



1- Ecriture du système équivalent :

◎ Les 2 ressorts sont en parallèles donc $k_{e1} = k_2 + k_3 = 4k$

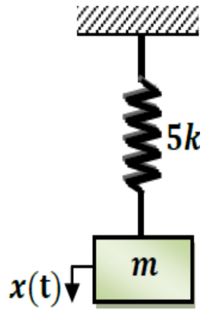
◎ Les 2 ressorts sont en parallèles : donc $k_{e2} = k + 4k = 5k$

Donc on peut avoir le schéma ci-contre.

I. Etude du système libre non amorti

- L'énergie cinétique : $T = \frac{1}{2}m\dot x^2$
- L'énergie potentielle : $U = \frac{5}{2}kx^2$
- La fonction de Lagrange:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot x^2 - \frac{5}{2}kx^2$$



Dans le cas d'un système libre non amorti, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) = m\,\ddot x \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -5\,k\,x$$

1. Ecriture de l'équation différentielle du mouvement : $m\,\ddot x + 5\,k\,x = 0$

2. a) Déduction de la pulsation propre ω_0: On peut écrire l'équation différentielle sous la forme: $\ddot x + \frac{5\,k}{m}\,x = 0$, tel que $\omega_0{}^2 = \frac{5\,k}{m}$: donc : $\omega_0 = \sqrt{\frac{5\,k}{m}}$

b) La solution de l'équation différentielle du mouvement : La solution est sinusoïdale du type :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

II- Etude du système libre amorti

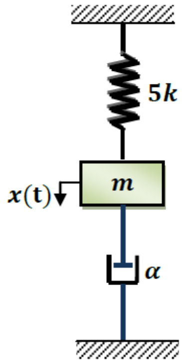
- La fonction de dissipation :

Dans le cas d'un système libre amorti, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot x}$$
$$\frac{\partial D}{\partial \dot x} = \alpha\,\dot x$$

1- Ecriture de l'équation différentielle du mouvement : $m\,\ddot x + \alpha\,\dot x + 5\,k\,x = 0$

2- Calcul du facteur d'amortissement δ puis la pulsation ω_0 pour $\alpha = \sqrt{\frac{mk}{8}}$:



On peut écrire l'équation différentielle sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{5\,k}{m}\,x = 0 \\ \ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + {\omega_0}^2\,x = 0 \end{cases}$$

tel que : $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ **et** $\omega_0 = \sqrt{\frac{5\,k}{m}}$

$$\delta = \frac{1}{2m}\sqrt{\frac{mk}{8}} \Longrightarrow \delta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{2m}} \quad , \quad \omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{5k}{m} - \frac{k}{32m}}$$

$$\Longrightarrow \omega_a = \sqrt{\frac{159k}{32m}}$$

3- La solution de l'équation différentielle du mouvement $\delta < \omega_0 \rightarrow x(t) = Ce^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi)$

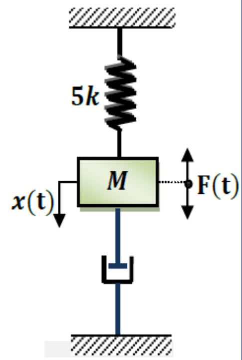
$$x(t) = Ce^{-\sqrt{\frac{k}{32m}}t}\sin\left(\sqrt{\frac{159k}{32m}}t + \varphi\right)$$

III- Etude du système forcé amorti

Le système est soumis à une force extérieure $F(t) = F_0\cos\Omega t$ appliquée à la masse m.

Dans le cas d'un système forcé amorti l'équation de Lagrange devient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F(t)$$



1- Ecriture de l'équation différentielle du mouvement :

$$m\,\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + 5\,k\,x = F_0\cos\Omega t$$

2- Ecriture de la solution de l'équation différentielle du mouvement en donnant l'expression de l'amplitude et de la phase $\Phi(\Omega)$:

$$A = \frac{B}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \Omega^2) + (2\delta)^2}} \quad , \quad \Phi(\Omega) = \mathrm{Arctg}\,\frac{-2\delta\Omega}{{\omega_0}^2 - \Omega^2}\,;\, B = \frac{F_0}{m}$$

3- La solution générale de l'équation différentielle du mouvement :

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) = Ce^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi) + \frac{B}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \Omega^2) + (2\delta)^2}}\sin\left(\Omega t + \mathrm{Arctg}\,\frac{-2\delta\Omega}{{\omega_0}^2 - \Omega^2}\right)$$