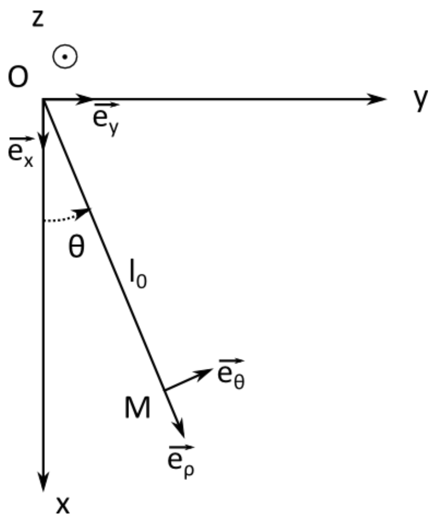
Examen du 2 novembre 2015

Vous disposez d'une heure pour résoudre les deux exercices proposés. Aucun document ni calculatrice n'est admis. Tous les appareils électroniques doivent être rangés. Préparez votre carte d'étudiant. Le barème est donné à titre indicatif uniquement. Pensez à simplifier au maximum vos résultats.

Exercice 1 : Le pendule (7 points)

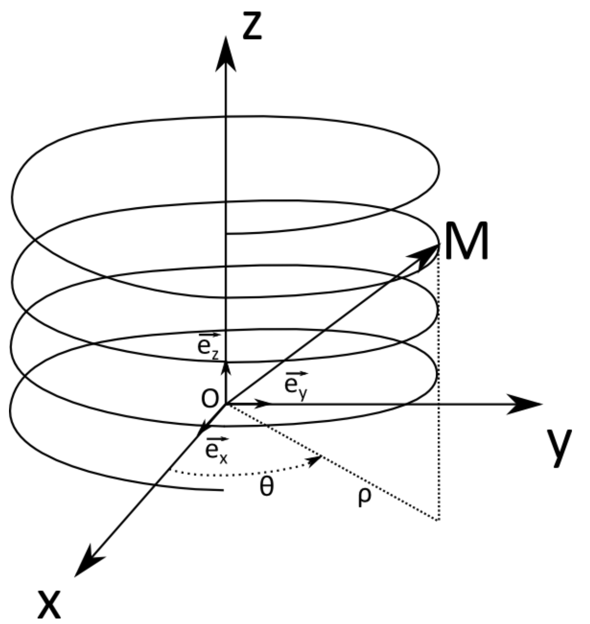


On considère un point matériel M attaché à une tige de longueur l_0. On étudie le mouvement du point M dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. A l'instant t = 0, $\theta(t=0) = 0$. On ne fait aucune hypothèse sur la dépendance temporelle de θ.

Les composantes du mouvement seront exprimées dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1) Exprimer $\vec{e}_\rho$ *et* $\vec{e}_\theta$ en fonction de $\vec{e}_x, \vec{e}_y$. **(1,5pts)**
2) Déterminer $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ à partir des expressions trouvées en 1) ? **(2pts)**
3) Donner l'expression de $\overrightarrow{OM}$. **(0,5pt)**
4) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ en fonction de l_0 et $\dot{\theta}$. **(1pt)**
5) Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ en fonction de l_0 et $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$. **(2pts)**

Exercice 2 : Le mouvement hélicoïdal (13 points)



Le mouvement hélicoïdal se décompose en un **mouvement circulaire et un mouvement de translation.** Dans notre cas, le mouvement circulaire est dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et le mouvement de translation selon l'axe z. Les équations horaires sont données par :

$$\left| \begin{aligned} x(t) &= \mathrm{R}.\cos(\theta(t)) \\ y(t) &= \mathrm{R}.\sin(\theta(t)) \\ z(t) &= 2\mathrm{R}.(1-\theta(t)) \end{aligned} \right.$$

Avec R le rayon associé au mouvement circulaire, $\frac{d\theta}{dt} = \omega = cste > 0$ et $\theta(t = 0) = 0$.

On étudie le mouvement du point M dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ d'abord dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ puis dans la base cylindrique $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Coordonnées cartésiennes :

1) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ en fonction de *R*, ω et t. **(1pt)**
2) Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ en fonction de *R*, ω et t. **(1pt)**

Coordonnées cylindriques :

3) Donner l'expression de $\overrightarrow{OM}$. **(1pt)**
4) Déterminer $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ à partir du vecteur rotation (ou vitesse angulaire) que vous définirez au préalable. **(2pts)**
5) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ en fonction de *R* et ω. **(1pt)**
6) Déterminer la vitesse $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ en fonction de *R* et ω. **(2pts)**
7) Calculer la norme de la vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$. **(1pt)**

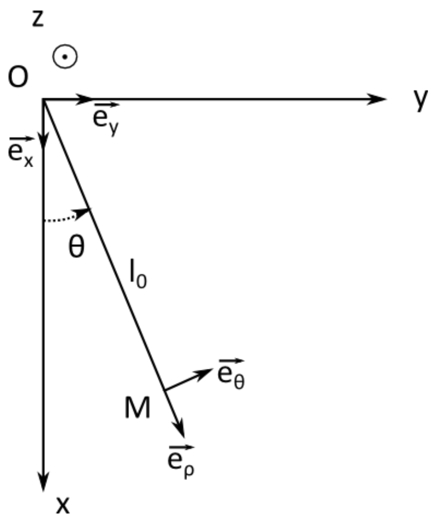
Composantes de Frenet :

8) Déterminer le vecteur $\vec{e}_T$ dans la base cylindrique. **(1,5pts)**
9) Représenter le vecteur $\vec{e}_N$ dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. **(1pt)**
10) Déterminer a_T puis a_N en fonction de *R* et ω. **(1,5pts)**

Examen du 2 novembre 2015

Vous disposez d'une heure pour résoudre les deux exercices proposés. Aucun document ni calculatrice n'est admis. Tous les appareils électroniques doivent être rangés. Préparez votre carte d'étudiant. Le barème est donné à titre indicatif uniquement. Pensez à simplifier au maximum vos résultats.

Exercice 1 : Le pendule (7 points)



On considère un point matériel M attaché à une tige de longueur l_0. On étudie le mouvement du point M dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. A l'instant t = 0, $\theta(t=0) = 0$. On ne fait aucune hypothèse sur la dépendance temporelle de θ.

Les composantes du mouvement seront exprimées dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1) Exprimer $\vec{e}_\rho$ *et* $\vec{e}_\theta$ en fonction de $\vec{e}_x, \vec{e}_y$. **(1,5pts)**

$$\vec{e}_\rho = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y$$

2) Déterminer $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ à partir des expressions trouvées en 1) ? **(2pts)**

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = -\dot{\theta}\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{e}_y = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$
$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{e}_x - \dot{\theta}\sin(\theta)\,\vec{e}_y = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho$$

3) Donner l'expression de $\overrightarrow{OM}$. **(0,5pt)**

$$\overrightarrow{OM} = l_0\vec{e}_\rho$$

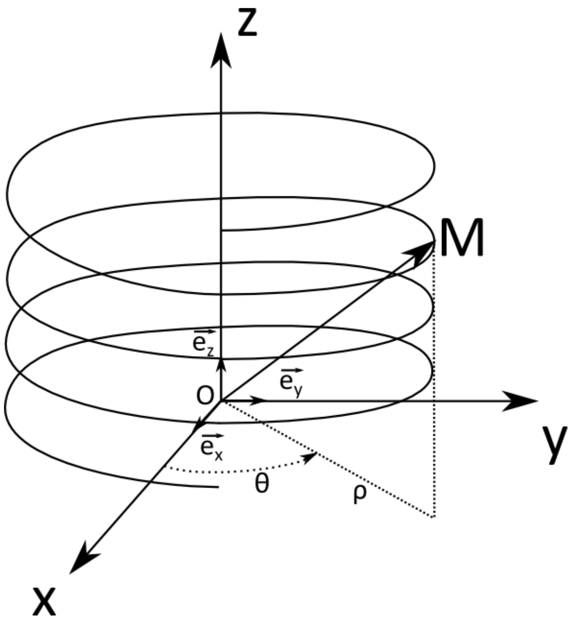
4) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ en fonction de l_0 et $\dot{\theta}$. **(1pt)**

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = l_0\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

5) Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ en fonction de l_0 et $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$. **(2pts)**

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = l_0\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - l_0\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho$$

Exercice 2 : Le mouvement hélicoïdal (13 points)



Le mouvement hélicoïdal se décompose en un **mouvement circulaire et un mouvement de translation.** Dans notre cas, le mouvement circulaire est dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et le mouvement de translation selon l'axe z. Les équations horaires sont données par :

$$\left| \begin{array}{l} x(t) = \mathrm{R}.\cos(\theta(t)) \\ y(t) = \mathrm{R}.\sin(\theta(t)) \\ z(t) = 2\mathrm{R}.(1 - \theta(t)) \end{array} \right.$$

Avec R le rayon associé au mouvement circulaire, $\frac{d\theta}{dt} = \omega = cste > 0$ et $\theta(t = 0) = 0$.

On étudie le mouvement du point M dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ d'abord dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ puis dans la base cylindrique $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Coordonnées cartésiennes :

1) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ en fonction de R, ω et t. **(1pt)**

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left| \begin{array}{c} -\mathrm{R}\omega.\sin(\omega t) \\ \mathrm{R}\omega.\cos(\omega t) \\ -2\mathrm{R}.\omega \end{array} \right.$$

2) Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ en fonction de R, ω et t. **(1pt)**

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left| \begin{array}{c} -\mathrm{R}\omega^2.\cos(\omega t) \\ -\mathrm{R}\omega^2.\sin(\omega t) \\ 0 \end{array} \right.$$

Coordonnées cylindriques :

3) Donner l'expression de $\overrightarrow{OM}$. **(1pt)**

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_\rho + 2\mathrm{R}.(1 - \omega t)\vec{e}_z$$

4) Déterminer $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ à partir du vecteur rotation (ou vitesse angulaire) que vous définirez au préalable. **(2pts)**

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \omega \wedge \vec{e}_\rho = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \omega \wedge \vec{e}_\theta = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho$$

5) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ en fonction de R et ω. **(1pt)**

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathrm{R}\omega \\ -2\mathrm{R}.\omega \end{vmatrix}$$

6) Déterminer la vitesse $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ en fonction de R et ω. **(2pts)**

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \begin{vmatrix} \mathrm{R}\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

7) Calculer la norme de la vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$. **(1pt)**

$$\left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\| = R\omega\sqrt{5}$$

Composantes de Frenet :

8) Déterminer le vecteur $\vec{e}_T$ dans la base cylindrique. **(1,5pts)**

$$\vec{e}_T = \frac{\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{\left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$$

9) Représenter le vecteur $\vec{e}_N$ dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. **(1pt)**

$$\vec{e}_N = -\vec{e}_\rho$$

10) Déterminer a_T puis a_N en fonction de R et ω. **(1,5pts)**

$$a_T = \frac{d\left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|}{dt} = 0$$

$$a_N = \left\|\vec{a}_{M/\mathcal{R}}\right\| = \mathrm{R}\omega^2$$

Rq : le rayon de courbure n’est donc pas R mais 5R