Introduction

Le mouvement d'un point matériel est la conséquence de ses interactions avec les corps qui l'entourent. Pour décrire ces interactions on fait appel au concept de force.

La dynamique en physique est la science qui étudie la relation entre le corps en mouvement et les causes qui provoquent ce mouvement. Elle prédit aussi le mouvement du corps situé dans un milieu déterminé.

La dynamique, plus précisément, est l'analyse de la relation entre la force appliquée et les changements du mouvement du corps.

I- Action mécanique – La force

Qu'est-ce qu'une action mécanique ? Modélisation par une force

On appelle action mécanique de **A** sur B une action d'un système A sur un autre système B dont l'effet est une modification du mouvement ou une déformation du système B.

Modélisation d'une action mécanique par une force : En mécanique classique, une action mécanique est caractérisée par une direction, un sens, une intensité et un point d'application. On la modélise par un vecteur-force (ou une force) lié au point d'application.

Les forces découlent toutes des quatre interactions fondamentales suivantes :

i. Interactions gravitationnelles
ii. Interactions électromagnétiques
iii. Interactions nucléaires fortes
iv. Interactions nucléaires faibles

On peut sérier les forces en deux catégories :

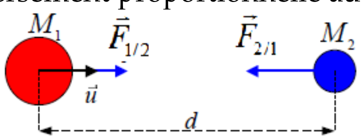
- Les forces à distances : les forces de gravitation, les forces de Lorentz (forces électriques et magnétiques), forces faibles et forces fortes ;
- Les forces de contact : elles représentent le résultat macroscopique des quatre (04) forces à distances (force de Laplace, force de frottement, poussée d'Archimède ….)

1- Les forces à distance

La physique utilise actuellement quatre forces pour décrire les interactions entre particule. Leur point commun est de décroitre lorsque la distance augmente

1- 1- La force gravitationnelle

Elle a été énoncée par Newton en 1650. Deux corps ponctuels de masses m_1 et m_2 s'attirent en exerçant l'un sur l'autre des forces de même module, de même direction, de sens opposé, proportionnelle à leur masse et inversement proportionnelle au carré de leur distance



Attraction des deux corps

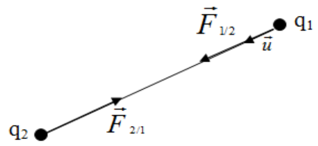
$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = G\,\frac{M_1 \times M_2}{d^2}\,\vec{u}$$

G : constante de gravitation universelle et **d** est la distance entre les deux corps

Ces forces d'interaction gravitationnelles sont énormes lorsqu'il s'agit des interactions entre les planètes du système solaire et le soleil, mais aussi entre les planètes et leurs satellites. Elles sont par contre très faibles pour des corps de petites masses en interaction sur la terre et pour les interactions entre particules chargées.

1- 2- La force de Coulomb

Elles interviennent lorsque les particules sont chargées et sont bien plus importantes que les forces gravitationnelles entre particules chargées. Ce sont les forces électriques ou coulombiennes qui s'appliquent à des particules au repos.



La force électrique s'écrit : $\vec{\mathbf{F}}_{1/2} = -\vec{\mathbf{F}}_{2/1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 \times q_2}{d^2}\,\vec{\mathbf{u}}$

q_1 et q_2 sont des charge exprimées en coulomb, **d** est la distance entre les deux charges. Les forces sont attractives ou répulsive suivant les signes des charges q_1 et q_2. Dans le schéma ci-dessus, les forces sont attractives, donc les charges sont de signes opposés.

La force magnétique apparaît lorsque les particules sont en mouvement. Elle s'ajoute à la force électrique. Elle se déduit de la force électrique par application des transformations relativistes et s'écrit pour la charge $\mathbf{q_2}$:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{q_2}\,(\vec{\mathbf{V}} \wedge \vec{\mathbf{B}})$$

Où $\vec{B}$ est le champ magnétique exprimé en Tesla, $\vec{V}$ la vitesse de la charge.

En rassemblant la force électrique et la force magnétique, on obtient :

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{q_2}\,(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{V}} \wedge \vec{\mathbf{B}})$$

1- 3- Les forces faibles (aussi appelée force faible et parfois force nucléaire faible)

Elle est responsable de la désintégration radioactive de particules subatomiques et est à l'origine de la fusion nucléaire dans les étoiles. Elle affecte toutes les catégories de fermions connues, à commencer par les électrons, les quarks et les neutrinos.

Elle permet la conversion de l'hydrogène en hélium qui est la source d'énergie principale des étoiles, donc de notre soleil.

1- 4- Les forces fortes

De très courte portée, elle assure par exemple la cohésion du noyau, sinon il serait instable sous l'effet des forces coulombiennes répulsives, car les charges sont toutes positives (protons).

2- Les forces de contact

Ces forces ne sont pas de nouvelles forces. Lorsqu'il y a contact de deux corps, ces forces sont la manifestation macroscopique des quatre forces fondamentales (les forces à distance). Ce sont : les forces de Laplace, les forces de frottement solide, le forces de frottement visqueux, la poussée d'Archimède, les forces de tension (fils, ressort, etc …..)

2- 1- La force de Laplace

Tout conducteur électrique de longueur **l**, placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ et parcouru par un courant électrique d'intensité I, subit une force :

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{I}\,\vec{\mathbf{l}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$$

Cette force est aussi appelée force électromagnétique. Elle représente au plan macroscopique la résultante des forces de Lorentz appliquées aux différentes charges traversant le conducteur.

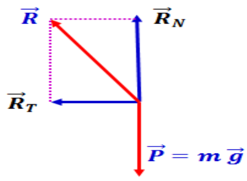
2- 2- Les forces de frottement solide

Deux cas peuvent se présenter : solides immobiles l'un par rapport à l'autre et solides en mouvement relatif ;

2- 2- 1- Solides immobiles l'un par rapport à l'autre (solides sans glissement relatif)

Le contact d'un solide de masse m susceptibles de bouger avec un autre corps, se manifeste par la réaction $\vec{R}$. On peut décomposer cette réaction en deux composantes : $\vec{R}_N$ réaction normale et $\vec{R}_T$ réaction tangentielle encore appelée force de frottement. Le sens de cette force de frottement est à priori inconnu.

Les lois du frottement nous apprennent que l'absence de glissement (mouvement relatif) n'est possible que si le rapport de la composante tangentielle $\mathbf{R_T}$ à la composante normale $\mathbf{R_N}$ ne dépasse pas une certaine valeur appelée coefficient de frottement statique $\mathbf{k_s}$.



$$\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$$

$$\frac{R_T}{R_N} \leq k_s \quad \Leftrightarrow \quad R_T \leq k_s\ R_N$$

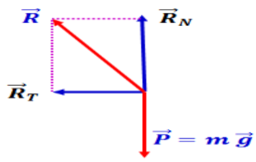
Lorsque le rapport $\mathbf{R_T/R_N}$ augmente, le système ne présente aucun glissement relatif tant qu'il est inférieur à $\mathbf{k_s}$. La valeur $\mathbf{k_s}$ est donc la valeur maximum de ce rapport. Lorsque ce rapport atteint (puis dépasse) $\mathbf{k_s}$, le système présente un glissement (relatif).

2- 2- 2- Solides en mouvement relatif (glissement l'un par rapport à l'autre)

Lorsqu'il y a glissement d'un solide de masse m sur un corps ou un support immobile, on définit un coefficient de frottement dynamique $\mathbf{k_d}$. On a alors :

$$\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$$

$$\frac{R_T}{R_N} = k_d \quad \Leftrightarrow \quad R_T = k_d\ R_N$$



En projetant suivant la verticale, on a :

$$R_N = P = m\,g \quad \Rightarrow \quad R_T = k_d\, m\ g$$

Dans cas, le sens de la force de frottement $\vec{R}_T$ est toujours opposé à celui du mouvement de du solide de masse **m**. Ce coefficient dynamique est généralement inférieur au coefficient statique.

Remarque : Dans le cas des forces de frottement **statique** le corps est au **repos**, par contre dans le cas des forces de frottement cinétique ou **dynamique** le corps est en **mouvement**.

2- 2- 3- Les forces de frottement visqueux

Ce frottement s'applique à un solide se déplaçant dans un milieu liquide ou gazeux, donc dans un fluide. Le problème est identique pour un objet fixe dans un fluide en mouvement et pour un objet mobile dans un fluide en mouvement. C'est la vitesse relative $\vec{V}$ que l'on prend en compte. La force exercée par le fluide a toujours une composante opposée à la vitesse qui s'appelle la traînée. Si le corps qui se déplace ne présente pas, dans la direction de la vitesse, un aspect symétrique, une composante perpendiculaire à la vitesse apparaît. Cette vitesse s'appelle la portance. Elle permet entre autres aux voiliers d'avancer et aux avions de voler.
Dans cette partie de ce cours nous ne parlerons que de la traînée.

La force exercée par le milieu sur la masse **m** à toujours même direction que la vitesse, mais elle est toujours de sens opposé : $\vec{F}_f = -\mathbf{b}\,\vec{V}$. A faible vitesse, le coefficient **b** peut être considéré comme constant, mais ce n'est plus vrai lorsque la vitesse dépasse un certain seuil.

i) Vitesse faible (régime laminaire) $\quad \vec{F}_f = -k\eta\,\vec{V}$

Où η est la viscosité du milieu (Pascal. seconde ou Poiseuille), indépendante de la vitesse
k n'est pas fonction de la vitesse, mais de la géométrie du système, et sa dimension est une longueur.
La force est donc proportionnelle à la vitesse (régime linéaire).
Exemple : dans le cas d'une sphère de rayon **R**, **k = 6πR**

$$\vec{F}_f = -6\,\pi R\eta\,\vec{V}$$ Cette loi est connue sous le nom de **Loi de Stockes.**

ii) Vitesse élevée (régime turbulent) $\quad \vec{F}_f = -\frac{1}{2}\,C S\rho V^2\,\vec{u}$

C est le coefficient de pénétration dans l'air ou coefficient de traînée, **S** la surface apparente du mobile dans le plan perpendiculaire au mouvement, et ρ la masse volumique du fluide.

$\vec{u}$ est un vecteur unitaire.
La force varie donc comme le carré de la vitesse (régime quadratique).

2- 2- 4- La poussée d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide (liquide ou gaz) est soumis à une force verticale, dirigée vers le haut, égale au poids du liquide déplacé :

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{Ar}} = \boldsymbol{\rho}\mathbf{Vg}\,\vec{\mathbf{u}}$$

ρ est la masse volumique du fluide, V est le volume du liquide déplacé et g est l'intensité de la pesanteur. $\vec{u}$ est un vecteur unitaire dirigé vers le haut suivant la verticale.
Remarque: le solide doit avoir un volume petit pour que $\vec{g}$ soit constant

2- 2- 5- Les forces de tension

Un fil élastique, un ressort, une lame que l'on plie exercent une force. Cette force est en première approximation proportionnelle à leur allongement, ou à l'amplitude de leur déformation. Dans cette approximation linéaire, un fil élastique ou un ressort exerce une force :

$$\vec{\mathbf{F}} = -\mathbf{k}(\mathbf{l} - \mathbf{l}_0)\,\vec{\mathbf{u}}$$

k est la constante de raideur du ressort, $\mathbf{l_0}$ est sa longueur au repos c'est-à-dire lorsqu'aucune force n'est exercée par le ressort, **l** la longueur après allongement; $\vec{u}$ est un vecteur unitaire dans la direction du ressort, orienté de son point de fixation vers le point où il exerce la force.

Une lame exerce une force de tension proportionnelle à l'amplitude de la déformation.

Un fil inextensible exerce une force de tension dont la norme peut être mesurée avec un dynamomètre.

2- 2- 6- Les forces pressantes

Une force pressante est une force $\vec{F}$ qui modélise l'action mécanique de contact qu'exerce un solide ou un fluide sur la surface **S** d'un corps.

$\mathbf{F} = \mathbf{P} \times \mathbf{S}$ Avec P pression du fluide ou du solide

La force $\vec{F}$ est perpendiculaire à la surface S.

2- 3- Les forces intérieures et extérieures

Pour étudier tout système donné, il convient de sérier les forces de contact et à distance en forces intérieures et extérieures. Etant donné que seules les forces extérieures déterminent le mouvement du point matériel, il sera fait un bilan de toutes les forces extérieures dans l'application des lois.

2- 4- Système matériel

2- 4- 1- Définitions

Par définition, nous appellerons **système matériel** un ensemble de points matériels. Nous distinguerons deux sortes de systèmes matériels :

- **Système matériel indéformable** : tous les points matériels constituant le système restent fixes les uns par rapport aux autres. Ceci correspond à la définition d'un solide en mécanique.
- **Système matériel déformable** : tous les points matériels constituant le système ne restent pas fixes les uns par rapport aux autres. Les corps déformables, soit incompressibles (les liquides), soit compressibles (les gaz).

2- 4- 2- Système isolé et pseudo-isolé

Lorsqu'il ne subit aucune action venant de l'extérieur, un système matériel est dit **isolé** (ou fermé). C'est le cas d'un système seul dans l'espace, loin de toute autre masse.

Si des actions extérieures agissant sur un système se compensent, alors on dit que le système est **pseudo-isolé**, c'est-à-dire que tout se passe comme s'il était isolé.

Sur la Terre, il n'est pas possible de rencontrer des systèmes rigoureusement isolés. L'action de la Terre est une action extérieure pour tout système matériel. Par contre on peut rencontrer des systèmes pseudo-isolés chaque fois que l'action de la Terre est compensée. C'est le cas des mobiles autoporteurs ou encore d'un système se trouvant sur une table soufflante. Dans ces cas, le coussin d'air compense l'action de la Terre et élimine les principales forces de frottements qui sont les frottements solide-solide. On retrouve la même situation sur une surface horizontale glissante comme la surface gelée d'une patinoire.

Par la suite, par mesure de simplification, nous utiliserons le terme « isolé » pour tout système effectivement isolé ou seulement pseudo-isolé.

II- Quantité de mouvement

Définition

Pour un point matériel **M**, de masse **m** animée d'une vitesse $\vec{V}$ par rapport à un référentiel **R**, la quantité de mouvement de **M** par rapport à $\mathcal{R}$ est définie par :

$$\vec{\mathbf{p}}(\mathbf{M/R}) = \mathbf{m}\,\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M/R}) \qquad \text{d'unité : Kg.m.s}^{-1}$$

La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle. Cette notion est très importante car elle introduit deux éléments qui caractérisent l'état de mouvement de la particule : sa **masse** et sa **vitesse**.

La masse dans cette définition est la masse dite inertielle.

La dimension de la quantité de mouvement $[\mathbf{p}] = \mathbf{M.L.T^{-1}}$

III– Les lois fondamentales de la dynamique

1- Première loi de Newton (1642 – 1727) (Principe d'inertie Galiléen)

La mécanique, comme de nombreuses branches de la physique, prend ses fondements dans des principes ou des postulats que l'on ne démontre pas. Vérifiés expérimentalement, ils restent valables tant qu'il n'existe pas d'expériences les mettant en défaut. Parmi ceux-ci nous trouvons le **principe d'inertie** qui est à la base de l'étude du mouvement des systèmes matériels. Ce principe, déjà entrevu par Galilée, a été repris par Newton et constitue ce que l'on appelle la première loi de Newton.

1. 1- Enonce du principe d'inertie

Si le corps matériel n'est soumis à aucune force, il est :
- **soit en mouvement rectiligne uniforme,**
- **soit au repos, s'il était initialement au repos.**

Ce principe peut se traduit par :

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{V}} = \overrightarrow{\mathbf{cste}} \quad \Rightarrow \begin{cases} \vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{0}} \\ \mathbf{ou} \\ \vec{\mathbf{V}} = \overrightarrow{\mathbf{cste}} \neq \vec{\mathbf{0}} \end{cases}$$

Pour une particule le principe d'inertie s'énonce ainsi: « **Une particule libre et isolée se déplace en mouvement rectiligne avec une vitesse constante** ». C'est pour cette raison qu'une particule accélérée n'est ni libre ni isolée mais, soumise sans aucun, doute, à une force.

Et puisque le mouvement est une notion relative, il est indispensable de définir un repère auquel sera rapporté le mouvement de la particule libre : ce repère, à son tour, doit être libre (c'est pour cette raison qu'on l'appelle galiléen ou d'inertie, et dans lequel la particule libre se déplace à vitesse constante (La quantité de mouvement aussi est constante)).

1. 2- Référentiel Galiléen

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le mouvement d'un point isolé est rectiligne et uniforme.

Un référentiel Galiléen est aussi appelé référentiel d'inertie.

Le principe d'inertie permet en même temps de définir le référentiel Galiléen, Il s'agit en effet, de tout référentiel où le principe d'inertie est applicable.

Le principe d'inertie stipule donc que l'accélération d'un point matériel isolé est nulle dans un référentiel Galiléen. Or, d'après les résultats du chapitre précédent, l'accélération du point matériel sera aussi nulle dans tout référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel Galiléen. Ceci conduit au résultat suivant :

Tout référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel Galiléen est aussi Galiléen.

2- Deuxième loi de Newton – Principe fondamental de la dynamique (PFD)

« La dérivée de la quantité de mouvement s'appelle force »

Cela veut dire que, dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un point M de masse m et son accélération sont liées par :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{V}$$

Cette équation s'appelle « **équation du mouvement** »

La masse est une grandeur scalaire positive qui caractérise l'inertie d'un corps.

A l'échèle macroscopique la masse ne varie pas en fonction du temps donc sa dérivée est nulle, pour cela la force se réduit alors à :

$$\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\,\vec{\gamma}$$

L'accélération d'un point matériel M en mouvement est proportionnelle à la résultante des forces qui s'exercent sur lui et inversement proportionnelle à sa masse: C'est la deuxième loi de Newton.

Enoncé du principe fondamental de la dynamique (Deuxième loi de Newton)

Dans un référentiel Galiléen la somme vectorielle des forces extérieures qui s'exercent sur un point matériel est égale au produit du vecteur accélération et de la masse du point matériel : $$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\,\vec{\gamma}(M)$$

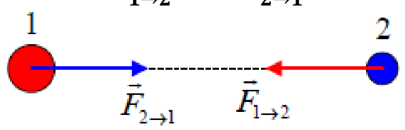
Cette loi permet de relier la cinématique du point matériel aux causes du mouvement. Ainsi les systèmes dits pseudo-isolés (systèmes pour lesquels la somme des forces appliquées est nulle) ont une accélération nulle.

3- Troisième loi de Newton - Principe de l'action et de la réaction (Principe des actions réciproques)

Enoncé de la loi : « **lorsque deux particules sont en influence mutuelle, la force appliquée par la première particule sur la deuxième est égale et de signe contraire à la force appliquée par la deuxième particule sur la première** ».

Si un objet (1) exerce une force, $\vec{F}_{1\to2}$, sur un autre objet (2), ce dernier exerce en retour une force, $\vec{F}_{2\to1}$, d'intensité égale mais de sens opposée:

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$$



Action et réaction

Il est important de noter que cette loi, aussi appelée principe des actions réciproques, est indépendante du référentiel d'étude.

4- Expression du PFD en utilisant la quantité de mouvement

i- Relation avec l'accélération : En dérivant la définition ci-haut, on montre que la dérivée de la quantité de mouvement est proportionnelle à l'accélération. En effet, on a :

$$\left.\frac{d\vec{p}(M/R)}{dt}\right|_R = m\,\vec{\gamma}(M/R)$$

ii- PFD : Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors en terme de la quantité de mouvement :

$$\left.\frac{d\vec{p}(M/R)}{dt}\right|_R = \sum \vec{F}_{ext}$$

Les trois lois de Newton n'apportent rien de plus que les deux lois précédentes et sont même plus restrictives. Cependant elles ont eu une grande importance historique puisqu'elles ont régit la mécanique de Newton jusqu'au 20^{eme} siècle. Les lois de Newton ne sont valables que pour des corps dont la masse est constante.

Remarque:

Le sens d'une force est celui du mouvement qu'elle tend à produire ; si la force et le mouvement sont dans le même sens la force est dite motrice ; dans le cas contraire, la force est dite résistante.

Par exemple, les forces de frottement sont des forces résistantes.

Propriété de tous les référentiels galiléens

Soit M (pseudo-) isolé. Supposons qu'on l'étudie dans deux référentiels galiléens R et R′.

Alors le principe fondamental de la dynamique donne dans R et R′.

$$\begin{cases} m\,\vec{\gamma}_{M/R} = \vec{0} \\ m\,\vec{\gamma}_{M/R'} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{\gamma}_{M/R} = \vec{\gamma}_{M/R'}$$

Or, on sait que : $\vec{\gamma}_{M/R} = \vec{\gamma}_{M/R'} + \vec{\gamma}_e(M) + 2\Omega_{R'/R} \wedge \vec{V}_{M/R'}$

D'où, pour tout Point M pseudo-isolé : $\vec{\gamma}_e(M) + 2\Omega_{R'/R} \wedge \vec{V}_{M/R'} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Omega_{R'/R} = \vec{0} : \text{R' et R sont en translation l'un par rapport à l'autre} \\ \vec{\gamma}_e(M) = \vec{0} : \quad \text{et cette translation doit être rectiligne uniforme.} \end{cases}$$

- Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres ; et donc par rapport à l'un d'entre eux.
- Autrement dit : Si un référentiel galiléen est connu, tous les autres s'en déduisent par translations rectilignes uniformes.

Principe de relativité de Galilée

Ce principe est une conséquence de la propriété précédente. Soit un point M soumis à $\vec{F}$ dans **R** et à $\vec{F}'$ dans **R′**. Par application du P.F.D. dans **R** et dans **R′**, on obtient :

$$\mathbf{m}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{M/R}} = \vec{\mathbf{F}} \text{ et } \mathbf{m}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{M/R'}} = \vec{\mathbf{F}}'$$

Comme R et R′ sont en translation l'un par rapport à l'autre :

$$\mathbf{m}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{M/R}} = \vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{M/R'}} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}'$$

Propiétés:

- Les forces **issues des interactions fondamentales** sont les mêmes **dans tous** les référentiels **galiléens**.

✷ Autrement dit: Si M est soumis à $\vec{F}$ dans un référentiel **galiléen R**, alors il est soumis à $\vec{F} = \vec{F}'$ dans tout autre référentiel galiléen **R′**.
✷ Autrement dit: **les Lois de la mécanique sont invariantes par changement de référentiel galiléen**.

Conséquence : Il est impossible de distinguer un référentiel galiléen d'un autre à l'aide des lois de la physique.

IV- Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non Galiléen

L'énoncé du principe fondamental de la dynamique donné auparavant est valide dans un référentiel Galiléen. Cependant nous avons vu, avec la loi de composition des accélérations, que l'accélération n'est pas nécessairement la même dans tous les référentiels. En particulier, l'accélération dans un référentiel Galiléen n'est pas la même que dans un référentiel non Galiléen.

1- PFD et forces d'inertie.

Considérant un référentiel non Galiléen $\mathcal{R}'$ en mouvement par rapport à un référentiel Galiléen $\mathcal{R}$.

Le PFD, dans le référentiel Galiléen $\mathcal{R}$ s'écrit : $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}(M/R)$

$\mathcal{R}$ étant le référentiel absolu et $\mathcal{R}'$ le référentiel relatif, la loi de composition des accélérations s'écrit alors:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma_a}(M) = \vec{\gamma_r}(M) + \vec{\gamma_e}(M) + \vec{\gamma_c}(M)$$

Le PFD dans $\mathcal{R}$ devient alors $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma_r}(M) + m\,\vec{\gamma_e}(M) + m\,\vec{\gamma_c}(M)$.

Ceci permet d'écrire le PFD, dans le référentiel non-Galiléen (relatif) R′.

$$m\vec{\gamma_r}(M/R') = m\vec{\gamma_r}(M) = \sum \vec{F}_{ext} - m\,\vec{\gamma_e}(M) - m\,\vec{\gamma_c}(M) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

Où on a appelé les termes: $-\,m\,\vec{\gamma_e}(M) -\,m\,\vec{\gamma_c}(M)$, les forces d'inertie (ou pseudo-forces) qui se décomposent généralement en deux composantes la force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie de Coriolis, tel que :

$\vec{F_{ie}} = -\,m\,\vec{\gamma_e}(M)$: est la force d'inertie d'entrainement ;
$\vec{F_{ic}} = -\,m\,\vec{\gamma_c}(M)$: est la force d'inertie de Coriolis.

Dans un référentiel non- Galiléen il faut, en plus des forces extérieures agissant sur le point matériel, tenir compte des forces d'inertie. Cependant il est important de noter que les forces d'inertie ne sont pas dues à une interaction particulière. Elles ne sont donc pas considérées comme des forces réelles au même titre que les autres forces, même si leurs effets physiques sont réels.

Une **force d'inertie**, ou **inertielle**, ou **force fictive**, est une force apparente qui agit sur les masses lorsqu'elles sont observées à partir d'un référentiel non inertiel, autrement dit depuis un point de vue en mouvement accéléré ou en rotation. Une telle force n'est pas le résultat d'une interaction physique, mais plutôt de l'inertie s'opposant à l'accélération du référentiel lui-même.

La **force de Coriolis** est une force inertielle agissant perpendiculairement à la direction du mouvement d'un corps en déplacement dans un milieu (un référentiel) lui-même en rotation uniforme, tel que vu par un observateur partageant le même référentiel. Cette force est nommée ainsi en l'honneur de l'ingénieur français Gaspard-Gustave Coriolis.

Remarques : Le PFD dans un référentiel non galiléen s'exprime aussi en utilisant la quantité de mouvement :

$$\left.\frac{d\vec{p}(M/R)}{dt}\right|_{R'} = \sum \vec{F}_{ext} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}} \qquad \text{Si } \mathcal{R}' \text{ n'est pas Galiléen.}$$

2- Exemples particuliers

$\mathcal{R}'$ en translation rectiligne par rapport à $\mathcal{R}$:

Dans ce cas on a $\vec{\gamma}_e(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_R$ et $\vec{\gamma}_c = \vec{0}$

Ce qui donne pour les forces d'inertie : $\vec{F}_{ie}(M) = -m \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_R$ et $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$

$\mathcal{R}'$ en rotation par rapport à $\mathcal{R}$:

On considère le cas où le référentiel $\mathcal{R}'$ Est en rotation par rapport au référentiel absolu $\mathcal{R}$, et que la rotation s'effectue autour d'un axe passant par l'origine commun aux deux référentiels O : $\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{\omega}$

On a alors $\overrightarrow{\gamma_e}(M) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$ et $\overrightarrow{\gamma_c}(M) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$.

Les forces d'inerties sont obtenues en multipliant ces accélérations par le facteur (- m) :

$$\overrightarrow{F_{ie}}(M) = -m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} - m\,\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F_{ic}}(M) = -2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

Si on plus, le mouvement de rotation de $\mathcal{R}'$ Par rapport à $\mathcal{R}$ est uniforme :

$\vec{\omega} = \overrightarrow{cste}$, les forces d'inertie s'écrivent alors sous la forme :

$$\overrightarrow{F_{ie}}(M) = -m\,\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F_{ic}}(M) = -2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

Comment traiter un problème à l'aide du PFD

La méthodologie est toujours la même. Ecrire le problème physique puis le résoudre.

1- Choisir un référentiel.

2- Choisir un système de coordonnées adapté au problème.

3- Connaître l'expression de l'accélération dans ce système

4- Faire le bilan des forces sans en oublier et sans en inventer

5- Projeter ces forces (ou les exprimer) dans le système de coordonnées

6- Ecrire le PFD pour relier les causes à leurs effets :

PFD (sous forme vectorielle)

Théorème de l'énergie cinétique (voir plus tard)

Théorème de l'énergie mécanique (voir plus tard)

Théorème du moment cinétique (voir plus tard)

La physique s'arrête là. Après, ce sont des mathématiques (résolution d'équations différentielles par exemple). Si le problème physique est mal posé, les mathématiques ne vous sauveront pas.

7- Projeter la relation vectorielle obtenue sur la base de projection du repère défini précédemment

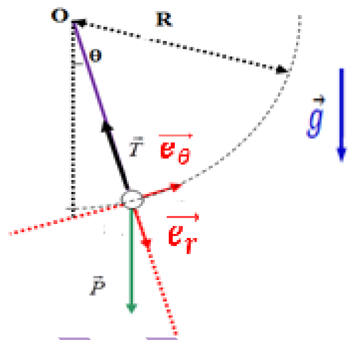
8- Résoudre les équations différentielles obtenues :

Pour connaître la trajectoire (coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$)

Pour déterminer des forces inconnues (tension d'un fil, réaction normale du support etc.)

Exercices d'application

Exercice d'application N°1



On considère un pendule simple constitué d'un objet ponctuel $\boldsymbol{M}$ de masse $\boldsymbol{m}$, accroché à un fil inextensible de longueur $\boldsymbol{l}$ et de masse négligeable. Son mouvement a lieu dans le plan vertical **(xOy)** du référentiel fixe $\mathfrak{R}(O,xyz)$.
On écarte le pendule d'un angle $\boldsymbol{\theta}$ de sa position d'équilibre **($\theta = 0$)** et on le lâche sans vitesse initiale. Les forces de frottement sont supposées inexistantes.
L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{\mathbf{g}}$ considéré comme uniforme.

N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \vec{k})$ (Voir figure)

1- Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$.

2- Calculer $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M}/\mathfrak{R})$ et $\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{M}/\mathfrak{R})$ respectivement les vecteurs vitesse et accélération de $\boldsymbol{M}$ dans $\mathfrak{R}$.

3- Exprimer les forces appliquées au point M dans la base $(\overrightarrow{\mathbf{e_r}}, \overrightarrow{\mathbf{e_\theta}}, \vec{\mathbf{k}})$.

4- En appliquant le Principe Fondamentale de la Dynamique **(*PFD*)** dans le référentiel galiléen $\mathfrak{R}$:

a- En projetant le **PFD** sur $\overrightarrow{\mathbf{e_\theta}}$, établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas de faibles oscillations **($\sin\theta \approx \theta$)**.

b- Résoudre cette équation différentielle.

5- Etablir l'expression de la tension $\boldsymbol{T}$ du fil.

Correction Exercice d'application N°1

1- L'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM} = l\,\overrightarrow{e_r}$$

2- Calcul des vecteurs vitesse et accélération $\vec{V}(M/\mathfrak{R})$ et $\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})$ de M dans $\mathfrak{R}$.

* Vecteur vitesse de M dans $\mathfrak{R}$

$$\vec{V}(M/\mathfrak{R}) = l\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

* Vecteur accélération de M dans $\mathfrak{R}$

$$\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) = -l\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r} + l\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

3- L'expression des forces appliquées au point M dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \vec{k})$.

Les forces appliquées au point M sont :

Le poids $\vec{P}$ avec : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - mg\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$

La tension du fil $\vec{T}$ avec : $\vec{T} = -T\,\overrightarrow{e_r}$

4- Le Principe Fondamentale de la Dynamique (PFD) dans le référentiel galiléen $\mathfrak{R}$, s'écrit:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})$$

$$\Rightarrow\; m\,\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) = \vec{P} + \vec{T}$$

$$-ml\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r} + ml\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} = (mg\cos\theta - T)\,\overrightarrow{e_r} - mg\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

a- En projetant le PFD sur $\overrightarrow{e_\theta}$, l'équation différentielle du mouvement dans le cas de faibles oscillations ($\sin\theta \approx \theta$), s'écrit :

$$ml\ddot{\theta} = -\,m\,g\sin\theta$$

$$\Rightarrow\; ml\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow\; \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Pour des faibles oscillations, $\sin\theta \approx \theta$ (θ très petit)

On trouve finalement :

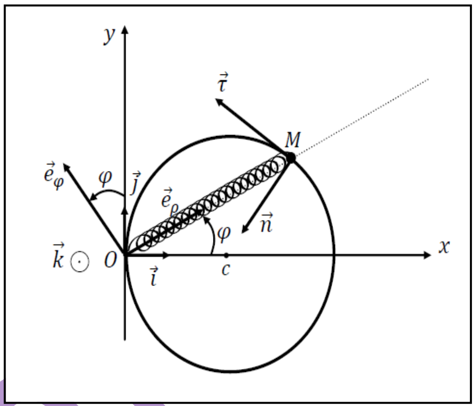
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

5- l'expression de la tension T du fil.

La projection du PFD sur $\vec{e_r}$ donne :

$$-ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$$
$$\Rightarrow T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2$$

Exercice d'application N°2



Soient $\mathfrak{R}(O, xyz)$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $(\mathfrak{R}_1(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ le référentiel relatif. Dans le plan horizontal (xOy), une tige circulaire de rayon $\boldsymbol{a}$ et de centre $\boldsymbol{c}$ est maintenue fixe. Un anneau M de masse $\boldsymbol{m}$ est assujetti à se déplacer sans frottement sur la tige circulaire. Il est repéré dans $\mathfrak{R}$ par : $\overrightarrow{OM} = 2a\cos\varphi\,\vec{e}_\rho$ où $\varphi = (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}})$ avec $-\frac{\pi}{2} < \boldsymbol{\varphi} < \frac{\pi}{2}$. L'anneau M est attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur $\boldsymbol{k}$ et de longueur à vide $\boldsymbol{a}$. L'autre extrémité du ressort est fixée au point O. En plus de la force de rappel $\boldsymbol{F}$ exercée par le ressort, l'anneau M est soumis à la réaction de la tige $\vec{\mathbf{R}}$ et à son poids $\vec{\mathbf{P}} = -\mathbf{mg}\,\vec{\mathbf{k}}$. On désigne par $((\vec{\boldsymbol{\tau}}, \vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{k}})$ la base de Frénet comme l'indique la figure ($\vec{\mathbf{n}}$ est le vecteur dirigé vers le centre de cercle).

N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $((\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

1- a- Calculer la vitesse de $\boldsymbol{M}$ par rapport à $\mathfrak{R}$.

   b- En déduire le vecteur $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ tangent à la trajectoire.

   c- Calculer le vecteur $\vec{\mathbf{n}}$ normal à la trajectoire.

2- Déterminer les accélérations relative $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}}(\mathbf{M})$, d'entraînement $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{e}}(\mathbf{M})$ et de Coriolis $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{c}}(\mathbf{M})$ de M.

3- Donner les expressions des forces appliquées à $\boldsymbol{M}$ dans $\mathfrak{R}_1$.

4- a- Ecrire le **PFD** appliqué à $\boldsymbol{M}$ dans $\mathfrak{R}_1$.

   b- En projetant le **PFD** sur $\vec{\boldsymbol{\tau}}$, donner l'équation différentielle du mouvement de $\boldsymbol{M}$ dans $\mathfrak{R}$.

   c- Que devient cette équation pour des faibles valeurs de $\boldsymbol{\varphi}$.

   d- En projetant le **PFD** sur $\vec{\mathbf{n}}$ et $\vec{\mathbf{k}}$, trouver les composantes de la réaction $\vec{\mathbf{R}}$ du support sur $\boldsymbol{M}$.

Correction Exercice d'application N°2

1- a- Calcul de la vitesse de $\boldsymbol{M}$ par rapport à $\mathfrak{R}$.

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}\left(2a\cos\varphi\,\vec{e_\rho}\right)_{\mathcal{R}} = 2a\dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi})$$

   b- En déduire l'expression du vecteur $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ tangent à la trajectoire.

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}(M)}{\|\vec{V}(M)\|} = -\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}$$

   c- Calcul du le vecteur $\vec{\mathbf{n}}$ normal à la trajectoire.

$$\vec{n} = \vec{k}\wedge\vec{\tau} = \vec{k}\wedge\left(-\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}\right) = -\sin\varphi\,\vec{e_\varphi} - \cos\varphi\,\vec{e_\rho}$$

2- Les expressions des accélérations relative $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}}(\mathbf{M})$, d'entraînement $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{e}}(\mathbf{M})$ et de Coriolis $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{c}}(\mathbf{M})$ de M.

$$\vec{\gamma_r}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_1} = \frac{d}{dt}\left(2a\cos\varphi\,\vec{e_\rho}\right)_{\mathcal{R}_1} = -2a(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\vec{e_\rho}$$

$$\vec{\gamma_e}(M/\mathcal{R}) = \ddot{\varphi}\vec{k}\wedge 2a\cos\varphi\,\vec{e_\rho} + \dot{\varphi}\vec{k}\wedge\left(\dot{\varphi}\vec{k}\wedge 2a\cos\varphi\,\vec{e_\rho}\right) = 2a\ddot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e_\varphi} - 2a\dot{\varphi}^2\cos\varphi\,\vec{e_\rho}$$

$$\vec{\gamma_c}(M/\mathcal{R}) = 2\dot{\varphi}\vec{k}\wedge\vec{V_r}(M/\mathcal{R}) = 2\dot{\varphi}\vec{k}\wedge 2a(-\dot{\varphi}\sin\varphi)\vec{e_\rho} = -4a\dot{\varphi}^2\sin\varphi\,\vec{e_\varphi}$$

2- Les expressions des forces appliquées à $\boldsymbol{M}$ dans $\mathfrak{R}_1$.

$$\vec{P} = -mg\,\vec{k}$$
$$\vec{R} = R_n\vec{n} + R_t\,\vec{k}$$
$$\vec{F} = -k(\rho - a)\overrightarrow{e_\rho} = -ka\,(2\cos\varphi - 1)\,\overrightarrow{e_\rho}$$
$$\overrightarrow{F_{ie}} = -m\,\overrightarrow{\gamma_e}(M/\mathcal{R}) = -2am(\ddot{\varphi}\sin\varphi\overrightarrow{e_\varphi} - \dot{\varphi}^2\cos\varphi\overrightarrow{e_\rho})$$
$$\overrightarrow{F_{ic}} = -m\overrightarrow{\gamma_c}(M/\mathcal{R}) = -4am\dot{\varphi}^2\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

3- a- Le **PFD** appliqué à ***M*** dans $\mathfrak{R}_1$.

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}} = m\overrightarrow{\gamma_r}(M/\mathcal{R})$$

b- En projetant le **PFD** sur $\vec{\boldsymbol{\tau}}$

L'équation différentielle du mouvement de ***M*** dans $\mathfrak{R}_1$.

Tout calcul fait conduit à :

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{2m}(1 - 2\cos\varphi)\sin\varphi = 0$$

c- Cette équation devient pour des faibles valeurs de $\boldsymbol{\varphi}$.

$$\ddot{\varphi} - \frac{k}{2m}\,\varphi = 0 \;(\sin\varphi \cong \varphi \text{ et } \cos\varphi \cong 1)$$

d- En projetant le **PFD** sur $\vec{\mathbf{n}}$ et $\vec{\mathbf{k}}$.

Les composantes de la réaction $\vec{\mathbf{R}}$ du support sur ***M***.

Tout calcul fait donne :

$$R_k = mg \quad \text{et} \quad R_n = -ka\,(2\cos\varphi - 1)\cos\varphi + 4am\dot{\varphi}^2$$

V- Théorème du moment cinétique

Quand on tourne le volant d'une voiture, on exerce deux forces opposées en deux points diamétralement opposés. D'après la loi de la quantité de mouvement on vérifie que le centre de masse du système ne se déplace pas. Pourtant, le fait d'exercer ce "couple" de force permet de mettre en mouvement le volant. Le mouvement va donc être décrit par une nouvelle loi, bien adaptée à l'étude des mouvements de rotation : la loi du moment cinétique.

La quantité de mouvement s'est révélée très utile dans l'étude des mouvements de translation. Le **moment cinétique** est la grandeur physique qui joue un rôle analogue dans le cas des mouvements de rotation; on l'appelle aussi **quantité de mouvement de rotation**. Dans ce cas de rotation, il est plus commode d'utiliser le théorème du moment cinétique que le **PFD**.

1- Moment cinétique

1- 1- Moment cinétique par rapport à un point fixe

1- 1- 2- Définition : Le moment cinétique du point matériel **M** par rapport à un point **O** dans le référentiel $\mathcal{R}$ est défini par :

$$\overrightarrow{\sigma_O}(M)_{/R} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M)_{/R} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M)_{/R}$$

Dimensionnellement $\|\vec{\sigma}\| = ML^2T^{-1}$ (kg.m².s⁻¹ en unité SI).

Autre écriture courante: le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_O}(M)_{/R}$ est fréquemment noté $\overrightarrow{L_O}(M)_{/R}$.

1- 1- 2- Propriété

Soit un point **O'** dans le référentiel $\mathcal{R}$ différent de **O**

$$\overrightarrow{\sigma_{O'}}(M)_{/R} = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{p}(M)_{/R} = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}\right) \wedge \vec{p}(M)_{/R} = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}(M)_{/R} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M)_{/R}$$

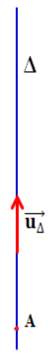
$$= \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}(M)_{/R} + \overrightarrow{\sigma_O}(M)_{/R}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{O'}}(M)_{/R} = \overrightarrow{\sigma_O}(M)_{/R} + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}(M)_{/R}$$

1- 2- Moment cinétique par rapport à un axe orienté

Le moment cinétique du point matériel **M** par rapport à un axe fixe **Δ**, passant par **O** et de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$, dans le référentiel $\mathcal{R}$ est défini par:

$$\sigma_\Delta(M/R) = \overrightarrow{\sigma_O}(M/R).\overrightarrow{u_\Delta}$$



Quelques remarques :

* Le signe de $\boldsymbol{\sigma_\Delta}$ dépend du sens d'orientation choisi.
* $\boldsymbol{\sigma_\Delta}$ est indépendante de la position du point **O** choisi sur l'axe.

Soit $\mathbf{O'} \in \Delta$ tel que $\overrightarrow{\mathbf{OO'}} \neq \vec{\mathbf{0}}$.

D'après la propriété précédemment

$\overrightarrow{\sigma_{O'}}(M)_{/R} = \overrightarrow{\sigma_O}(M)_{/R} + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}(M)_{/R}$

On montre que :

$$\overrightarrow{\sigma_{O'}}(M)_{/R}.\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{\sigma_O}(M)_{/R}.\overrightarrow{u_\Delta} + \underbrace{(\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}(M)_{/R}).\overrightarrow{u_\Delta}}_{=0 \quad \overrightarrow{OO'}//\overrightarrow{u_\Delta}} = \overrightarrow{\sigma_O}(M)_{/R}.\overrightarrow{u_\Delta} = \sigma_\Delta$$

1- 3. Moment cinétique d'un système de points par rapport à un axe orienté

On considère un système **S** de points matériels $\mathbf{M_i}$ de masse de $\mathbf{m_i}$ avec i = 1…. n. Le moment cinétique en **O** du système, par rapport à un référentiel **R** donné est la somme des moments cinétiques de chacun des points.

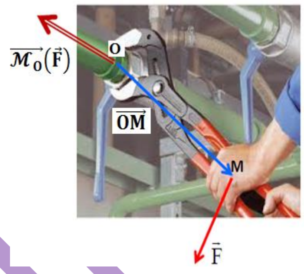
$$\overrightarrow{\sigma_O} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\sigma_O}(M_i) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\vec{V}(M_i)$$

Par projection, le moment cinétique du système **S** par rapport à un axe Δ orienté sera :

$$\sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma_O}.\overrightarrow{u_\Delta} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\sigma_O}(M_i).\overrightarrow{u_\Delta} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_\Delta(M_i)$$

2- Moment d'une force

2- 1- Moment d'une force par rapport un point



Supposons qu'en utilisant un clé de taille moyenne, vous n'arriveriez pas à dévisser un boulon grippé. Votre expérience vous souffle que vous avez de meilleures chances d'y parvenir en utilisant un clé de taille supérieure (Cf. figure ci-contre). La force que vous appliquez sur les deux clés est pourtant la même. La seule chose qui change c'est qu'avec une poignée plus longue, vous pouvez exercer la force plus loin de la pince. Cette force est alors plus efficace.

Il est plus facile d'ouvrir une porte très lourde en poussant loin des gonds. Si vous poussez du mauvais côté, vous réussirez peut-être à ouvrir la porte, mais vous savez bien que ce sera beaucoup plus dur.

Ces expériences montrent que pour faire tourner un objet, il faut non seulement appliquer une force, mais faire attention à l'endroit où on l'applique.

2- 1- 1- Définition : Si M est soumis à une force $\vec{F}$ alors on définit le moment de la force $\vec{F}$ par rapport un point O quelconque dans le référentiel $\mathcal{R}$ par :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Dimensionnellement $\|\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})\|$ est homogène à une force multipliée par une longueur. Cela correspond également aux dimensions d'une énergie mais en unité SI, le moment d'une force s'exprime généralement en N.m.

Le moment en O de la force sera nul si :

– la force s'applique au point O lui-même (M = O)

– $\vec{F}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$: la droite définie par M et $\vec{F}$ passe par O (force centrale).

$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})$ correspond à l'aptitude de $\vec{F}$ à modifier le mouvement de rotation de M par rapport à O.

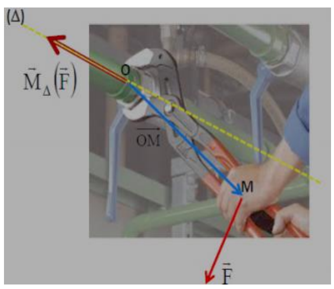
2- 1- 2- Propriété

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{F}) = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F} = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}\right) \wedge \vec{F} = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}$$

2- 2- Moment d'une force par rapport un axe

2- 2- 1- Définition



Le moment du force du point matériel M par rapport à un axe fixe Δ, passant par O quelconque et de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$,est la projection scalaire de $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})$ selon $\overrightarrow{u_\Delta}$:

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}).\overrightarrow{u_\Delta}$$

2- 2- 2- Quelques remarques

i- Le signe de $\boldsymbol{\mathcal{M}_\Delta}$ dépend du sens d'orientation choisi.

ii- On peut vérifier que, de la même manière que pour le moment cinétique par rapport à un axe, la définition de $\boldsymbol{\mathcal{M}_\Delta}$ est indépendante de la position du point **O** choisi sur l'axe.

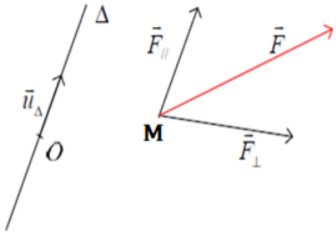
Soit $\mathbf{O}' \in \Delta$ tel que $\overrightarrow{OO'} \neq \vec{0}$.

D'après la propriété précédemment $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}$, d'où

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{F}).\vec{u_\Delta} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}).\vec{u_\Delta} + \underbrace{(\overrightarrow{O'O}\wedge\vec{F}).\vec{u_\Delta}}_{=0\ \ \overrightarrow{O'O}//\vec{u_\Delta}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}).\vec{u_\Delta} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$$

iii- Si l'axe $(M,\vec{F})$ passe par O, $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \vec{0}$

2-2- 3- Propriété



On a : $\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_\perp$

avec $\vec{F}_\perp$ perpendiculaire à Δ ;

$\vec{F}_{//}$ parallèle à Δ ;

On a alors :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}).\vec{u_\Delta} = (\underbrace{\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}_{//}}_{\perp\,\vec{u_\Delta}} + \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}_\perp).\vec{u_\Delta}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}_\perp).\vec{u_\Delta} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_\perp)$$

Cas particulier : $\vec{F}\ //\ \Delta \Longrightarrow \vec{F}_\perp = \vec{0} \Longrightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{0}$

3- Théorème du moment cinétique

3- 1- Théorème du moment cinétique dans un référentiel galiléen R

i) Par rapport à un point

A partir de $\vec{\sigma_A}(M)_{/R} = \overrightarrow{AM}\wedge m\vec{V}(M)_{/R}$, on établit :

Dérivons par rapport au temps et /R :

$$\left(\frac{d\,\vec{\sigma_A}(M)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_R \wedge m\vec{V}(M)_{/R} + \overrightarrow{AM}\wedge m\left(\frac{d\,\vec{V}(M)_{/R}}{dt}\right)_R$$

Développant cette dérivée :

$$\left(\frac{d\,\vec{\sigma_A}(M)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_R \wedge m\vec{V}(M)_{/R} + \overrightarrow{AM}\wedge m\left(\frac{d\,\vec{V}(M)_{/R}}{dt}\right)_R$$

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_R = ?$$

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d}{dt}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM})\right)_R = \left(-\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right)_R + \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right)_R = -\overrightarrow{V(A)}_{/R} + \overrightarrow{V(M)}_{/R}$$

et $\left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_R \wedge m\vec{V}(M)_{/R} = \left[-\overrightarrow{V(A)}_{/R} + \overrightarrow{V(M)}_{/R}\right]\wedge m\vec{V}(M)_{/R} = m\,\overrightarrow{V(M)}_{/R}\wedge\overrightarrow{V(A)}_{/R}$

$$\overrightarrow{AM}\wedge m\left(\frac{d\,\overrightarrow{V(M)}_{/R}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{AM}\wedge m\,\overrightarrow{\gamma(M)}_{/R} = \overrightarrow{AM}\wedge\sum\vec{F}$$

Le théorème du moment cinétique (par rapport à un point quelconque) **A** s'écrit:

$$\left(\frac{d\vec{\sigma_A}(M)_{/R}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{AM}\wedge\sum\vec{F} + m\,\overrightarrow{V(M)}_{/R}\wedge\overrightarrow{V(A)}_{/R}$$

On se place dans le cas particulier où A est fixe dans R :

$$\boldsymbol{\left(\frac{d\vec{\sigma_A}(M)_{/R}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{AM}\wedge\sum\vec{F} = \sum\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ext})}$$

Théorème du moment cinétique (T.M.C) : Pour un point matériel M soumis à la résultante des forces $\vec{F}_{ext}$ dans un référentiel galiléen R:

$$\boldsymbol{\left(\frac{d\vec{\sigma_A}(M)_{/R}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ext})} \quad \textbf{avec} \quad \begin{cases}\vec{\sigma_A}(M) = \overrightarrow{AM}\wedge m\,\overrightarrow{V(M)}_{/R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ext}) = \overrightarrow{AM}\wedge\vec{F}_{ext}\end{cases}$$

NB : On peut définir le moment dynamique par rapport à un point fixe

Le moment dynamique du point matériel M par rapport à O dans le référentiel $\mathcal{R}$ est défini par :

$$\overrightarrow{\delta_O}(M)_{/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_O}(M)_{/R}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\overrightarrow{\gamma(M)}_{/R}$$

Remarque: Il y a donc bien analogie entre le T.M.C. et le P.F.D

T.C.M. $\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}(M)_{/R}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ext}) \quad \leftrightarrow \quad \left(\frac{d\vec{p}(M)_{/R}}{dt}\right)_R = \vec{F}_{ext}$ P.F.D

Moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_O}(M)_{/R} \leftrightarrow \vec{p}(M)_{/R}$ Quantité de mouvement

Moment d'une force $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ext}) \leftrightarrow \vec{F}_{ext}$ Force

ii) par rapport à un axe

Hypothèse : on suppose l'axe Δ fixe dans R.

* Alors $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{cste}$ soit $\left(\frac{d\overrightarrow{u_\Delta}}{dt}\right)_R = \vec{0}$

* on peut alors écrire :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}_{/R}}{dt}\right)_R . \overrightarrow{u_\Delta} = \begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{\sigma_A}_{/R}.\overrightarrow{u_\Delta}}{dt} = \dfrac{d\sigma_\Delta}{dt} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ext}).\overrightarrow{u_\Delta} = \mathcal{M}_\Delta \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique (T.C.M) selon un axe fixe Δ de R : Pour un point matériel M soumis à la résultante des forces $\vec{F}_{ext}$ dans un référentiel galiléen R_g :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma_A}(M).\overrightarrow{u_\Delta} \\ \mathcal{M}_\Delta = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ext}).\overrightarrow{u_\Delta} \end{cases}$$

3- 2 - Théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen R′

i) par rapport à un point

Méthode : Pour établir le théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen, on dérive par rapport au temps le moment cinétique de M, évalué en A, dans le référentiel non galiléen R′.

A partir de $\overrightarrow{\sigma_A}(M)_{/R'} = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{V}(M)_{/R'}$, on établit :

Dérivons par rapport au temps et /R :

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_A}(M)}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{R'} \wedge m\vec{V}(M)_{/R'} + \overrightarrow{AM} \wedge m\left(\frac{d\,\vec{V}(M)_{/R'}}{dt}\right)_{R'}$$

Dans le cas général,

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d}{dt}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})\right)_{R'} = \left(-\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right)_{R'} + \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right)_{R'} = -\overrightarrow{V(A)}_{/R'} + \overrightarrow{V(M)}_{/R'}$$

Et

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{R'} \wedge m\vec{V}(M)_{/R'} = \left[-\overrightarrow{V(A)}_{/R'} + \overrightarrow{V(M)}_{/R'}\right] \wedge m\vec{V}(M)_{/R'} = m\,\overrightarrow{V(M)}_{/R'} \wedge \overrightarrow{V(A)}_{/R'}$$

$$\overrightarrow{AM} \wedge m\left(\frac{d\,\overrightarrow{V(M)}_{/R'}}{dt}\right)_{R'} = \overrightarrow{AM} \wedge m\,\overrightarrow{\gamma(M)}_{/R'} = \overrightarrow{AM} \wedge \sum \vec{F}$$

Le théorème du moment cinétique (par rapport à un point quelconque) A s'écrit :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}(M)_{/R'}}{dt}\right)_{R'} = \overrightarrow{AM} \wedge \sum \vec{F} + m\,\overrightarrow{V(M)}_{/R'} \wedge \overrightarrow{V(A)}_{/R'}$$

On se place dans le cas particulier où A est fixe dans R :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}(M)_{/R'}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{AM} \wedge \sum \vec{F}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}(M)_{/R'}}{dt}\right)_{R'} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}_{ext} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}_{ie} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}_{ic}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}(M)_{/R'}}{dt}\right)_{R'} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ext}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ie}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ic})$$

Théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen: la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel **M**, évalué en **A**, dans le référentiel non galiléen R′, est égale à la somme des moments en A des forces, en tenant compte des forces d'inertie :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_A(M)_{/R'}}{dt}\right)_{R'} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ext}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ie}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ic})$$

ii) par rapport à un axe

Hypothèse : On suppose l'axe Δ fixe dans R′.

* Alors $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{cste}$ soit $\left(\frac{d\overrightarrow{u_\Delta}}{dt}\right)_{R'} = \vec{0}$

* on peut alors écrire :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_{A/R'}}{dt}\right)_{R'}.\overrightarrow{u_\Delta} = \begin{cases} \frac{d\vec{\sigma}_{A/R'}.\overrightarrow{u_\Delta}}{dt} = \frac{d\sigma_\Delta}{dt} \\ (\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ext}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ie}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ic})).\overrightarrow{u_\Delta} = \mathcal{M}_\Delta \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique (T.C.M) selon un axe fixe Δ de R′ : Pour un point matériel M soumis à la résultante des forces $\vec{F}_{ext}$ dans un référentiel galiléen R′:

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma_A}(M).\overrightarrow{u_\Delta}} \\ \boldsymbol{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = (\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ext}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ie}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}_{ic})).\overrightarrow{u_\Delta}} \end{cases}$$

3- 3- Conclusion

L'ensemble des résultats de la mécanique newtonienne du point matériel peut être utilisé dans un référentiel **R** quelconque, à condition d'ajouter les effets des forces d'inertie (ou pseudo-forces) à ceux des forces «vraies» (issues des interactions fondamentales entre particules/ de la présence des autres corps matériels).

4- Conservation du moment cinétique

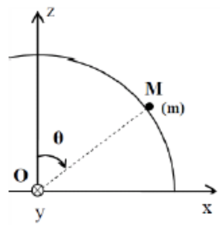
Le moment cinétique est conservé si $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{0}$. Ceci se produit :

- $\vec{F} = \vec{0}$: c'est le cas d'un point matériel libre. Par conséquent, dans un référentiel galiléen, le moment cinétique en un point O quelconque d'un point matériel libre est une constante du mouvement.
- Ou bien $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

5- Application du théorème du moment cinétique

Exercice d'application

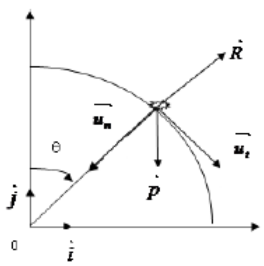
Une masse m glisse à partir d'un point A et sans vitesse initial sur une surface formée par une sphère de rayon a et de centre O on négligera les frottements.



a- En utilisant les coordonnées FRENET et le Principe fondamentale de la dynamique, déterminer l'expression de la vitesse de la masse m puis déduire l'expression de la réaction R de la surface sur la masse, est-il possible que m quitte la surface.

b- En utilisant le théorème du moment cinétique et les coordonnées intrinsèques (base de Frenet) l'expression de la vitesse de la masse m

Correction de l'exercice d'application



La masse est soumise à deux forces son poids et la réaction du support

a- On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{\gamma}(A/R)$$

- Si on choisit la base de Frenet, il faut projeter cette équation sur cette base

$$\vec{P} = m\,g\sin\theta\,\vec{u_t} + m\,g\cos\theta\,\vec{u_n}$$
$$\vec{R} = -R\,\vec{u_n}$$
$$\vec{\gamma} = m\,\frac{dV}{dt}\,\vec{u_t} + \frac{V^2}{a}\vec{u_n}$$

L'équation tangentielle sera :

$$m\,g\sin\theta = m\,\frac{dV}{dt} \Rightarrow g\sin\theta = \frac{dV}{dt} \quad (1)$$

L'équation normale sera : $m\,g\cos\theta - R = m\,\frac{V^2}{a} \quad (2)$

De l'équation (1) on déduit l'expression de la vitesse

$$\frac{dV}{dt} = g\sin\theta \Rightarrow \frac{dV}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = g\sin\theta \quad \text{avec} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{a}$$
$$\frac{V}{a}\,\frac{dV}{d\theta} = g\sin\theta \Rightarrow V\,dV = a\,g\sin\theta\;\; d\theta$$
$$\Rightarrow \int_0^V V\,dV = \int_0^\theta a\,g\sin\theta\;\; d\theta \Rightarrow \frac{V^2}{2} = -g\,[\cos\theta]_0^\theta$$

Donc $V = \sqrt{2a\,g\,(1-\cos\theta)}$

Détermination de la réaction : $R = m\,g\,(3\cos\theta - 2)$

- La masse quitte la surface pour R = 0 $\cos\theta = 2/3$ d'où $\theta = 48°$

b- En utilisant le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{\sigma_O}}{dt} = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Puisque on a deux forces donc on aura deux moments de force celui du poids et celui de la réaction.

$$\vec{\sigma_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{V} = -a\vec{u_n} \wedge m\,V\,\vec{u_t} = a\,m\,V\,\vec{k}$$
$$\frac{d\vec{\sigma_O}}{dt} = a\,m\,\frac{dV}{dt}\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -a\vec{u_n} \wedge (m\,g\sin\theta\,\vec{u_t} + m\,g\cos\theta\,\vec{u_n}) = a\,m\,g\sin\theta\,\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = -a\vec{u_n} \wedge (R\,\vec{u_n}) = \vec{0}$$

Donc on aura : $g\sin\theta = \frac{dV}{dt}$