# VII- Principaux systèmes de coordonnées

## 1- Choix du système de coordonnées

Dans plusieurs situations de mécanique et dans l'objectif de simplifier les calculs, il est important de bien choisir un système de coordonnées qui dépendra du type de mouvement du système étudie. Par exemple, dans le cas d'un mouvement rectiligne il est évident que le système de coordonnées cartésiennes est le mieux adapté, ce ne sera plus le cas pour des mouvements curvilignes.

Les différents systèmes de coordonnées couramment utilisés sont : coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques, sphériques et celle de Freinet.

Généralement, on choisit le repère R(O, X, Y, Z) constitué d'un point d'origine O et de trois axes (OX), (OY) et (OZ) définissant les trois dimensions de l'espace. Ce repère est associe à **une base vectorielle** notée ( $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ , $\overrightarrow{e_z}$).

Pour des raisons pratiques (en particulier lors de calcul des produits scalaires et produits vectoriels), il est important que la base utilisée soit orthonormée directe.

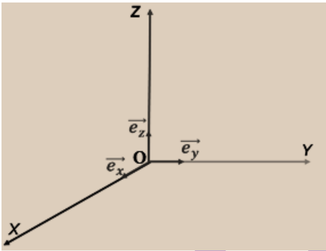


***Fig. 15 :** base orthonormée directe*

**Orthonormée** signifie que les vecteurs qui sont orthogonaux entre eux et unitaires:

$\overrightarrow{e_x}$ : Vecteur unitaire de l'axe (OX) ;

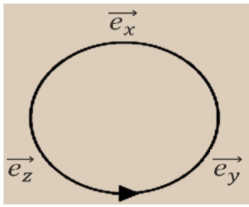
$\overrightarrow{e_y}$ : Vecteur unitaire de l'axe (OY) ;

$\overrightarrow{e_z}$: Vecteur unitaire de l'axe (OZ).

**- ortho :** $\overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_y}.\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_z}.\overrightarrow{e_x} = 0$ ;

**- normée :** $\|\overrightarrow{e_x}\| = \|\overrightarrow{e_y}\| = \|\overrightarrow{e_z}\| = 1$ ;

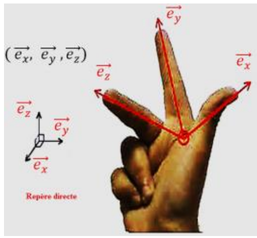
**- directe :** $\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z}$ ; $\overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_x}$ ; $\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{e_y}$, les vecteurs unitaires vérifient la règle de permutation circulaire.




**Remarque :**

i- $\|\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y}\| = \|\overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_z}\| = \|\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_x}\| = 1$

ii- La base orthonormée étant directe, la ''règle des trois doigts'' peut être utilisée.




## 2- Coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

### 2. 1- Définitions

Si le mouvement s'effectue dans l'espace, il est possible de repérer la position du point matériel M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ ou bien à l'aide des coordonnées cartésiennes (de René Descartes 1596 -1650) qui sont :

**x : abscisse** **y : ordonnée** **z : altitude**

Les coordonnées **x**, **y** et **z** d'un point **M** de l'espace affine, sont <u>les projections orthogonales</u> du vecteurs $\overrightarrow{OM}$ respectivement <u>sur les trois axes</u> orthonormés du repère **Ox**, **Oy** et **Oz**, soient : $x = \overrightarrow{OM}.\vec{i}$ , $y = \overrightarrow{OM}.\vec{j}$ et $z = \overrightarrow{OM}.\vec{k}$.

Les trois coordonnées sont de même nature et homogènes à une longueur.

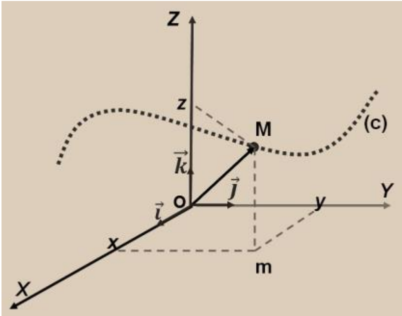



*Fig. 16 : Repère cartésiennes dans l'espace*

Le vecteur position s'écrit alors: $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

**Remarques :**

i) Dans l'expression $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$ (x, y, z) représentent les coordonnées cartésiennes du point M si l'origine du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est l'origine du repère.

ii) (x, y, z) sont aussi les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$).

iii) Les coordonnées de **M** peuvent être obtenues également de la manière suivante du fait que :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = (x\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}) + z\,\vec{k}:$$

- On projette orthogonalement le point M sur le plan **(xOy)** : c'est le point **m** ;
- On projette le vecteur $\overrightarrow{Om}$ orthogonalement sur **Ox** et **Oy** : on obtient respectivement **x** et **y** ;
- On projette orthogonalement **M** sur **Oz** (parallèlement à **Om**) : on obtient **z**.

Les données **x(t)**, **y(t)** et **z(t)** constituent les équations paramétriques du mouvement.

## 2. 2- Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes

**Définition :** Soit M et M′ deux positions occupées successivement par un point M dans un référentiel donné R. on définit le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ ou ($d\vec{\ell}$) par : $d\overrightarrow{OM} = \lim_{M \to M'} \overrightarrow{MM'}$

Le déplacement élémentaire du point **M(x, y, z)** en un point infiniment voisin **M'(x + dx, y + dy, z + dz)** engendre un déplacement vectoriel $\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$ :

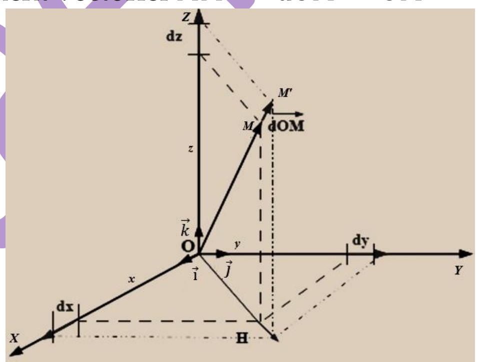



*Fig. 17 : Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes*

Ce déplacement élémentaire n'est autre que la différentielle du vecteur position : $d\overrightarrow{OM} = dx\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$

Elle permet d'exprimer une surface élémentaire $\delta S = dx.dy$ (Respectivement dy×dz, dx×dz), le volume élémentaire ($\delta V = dx.dy.dz$), ainsi il permet également de déterminer le vecteur vitesse et vecteur accélération.

## 2. 3- Élément de volume en coordonnées cartésiennes

Le volume définit par le déplacement élémentaire est appelé élément de volume ou encore volume élémentaire. En coordonnées cartésienne le volume élémentaire est un cube de cote **dx**, **dy** et **dz**.

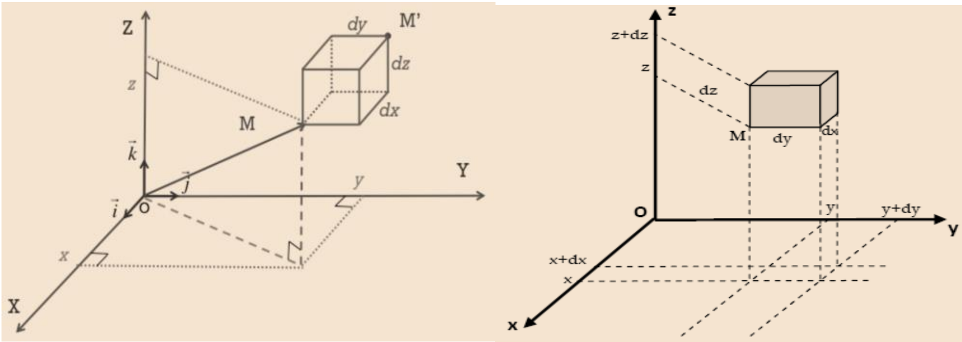



***Fig. 18 :*** *Représentation de volume élémentaire* $d^3V = dx.dy.dz$

## 3- Systèmes des coordonnées polaires

**3- 1- Définition :** C'est un système de coordonnées utilisé pour repérer la position d'un point **M** dans le plan. Il nécessite simplement une distance et un angle.

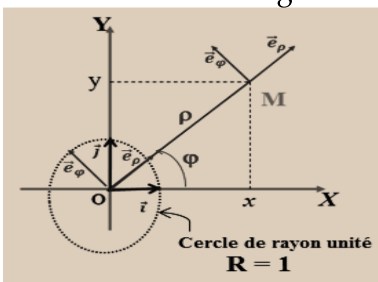



***Fig. 18:*** *Les coordonnées polaires* ***(ρ, φ)*** *et la base associe* $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi})$

Le point M est parfaitement repéré si on connaît la distance OM = ϱ et l'angle φ que fait le segment OM avec l'axe OX **(voir figure 18)**.

- Le point origine O fixe correspond au « pôle » d'où le terme coordonnée polaire.
- La longueur du segment OM correspond à sa **coordonnée radiale.** Elle est notée ϱ (rhô : lettre grecque) ou r.
- L'autre coordonnée est la **coordonnée angulaire** également appelée angle polaire ou azimut et noté φ (phi : lettre grecque).

Cet angle est mesuré par rapport à l'axe des abscisses OX appelé alors axe polaire.

Les coordonnées polaires du point M définis donc comme suit :

- $\rho = \|\overrightarrow{OM}\| \in \mathbb{R}^+$ est la distance entre O et M; appelé rayon polaire.
- $\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \in [0,2\pi]$ est l'angle orienté entre (OX) et $\overrightarrow{OM}$ : appelé angle polaire ou azimut

Contrairement aux coordonnées cartésiennes x et y, les coordonnées polaires ϱ et φ ne sont pas de même nature. La coordonnée radiale ϱ à la dimension d'une longueur comme x et y. La coordonnée angulaire s'exprime en radian qui est une unité d'angle sans dimension.

### 3-2- Définition du repère polaire $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi})$

- Pour exprimer les coordonnées de M, il est commode d'introduire une nouvelle base orthonormée directe $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi})$ naturellement associée à ce système de coordonnées et définie de la façon suivante **(voir figure 18)** :

- $\vec{e_\rho}$ est le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}$ : $\vec{e_\rho} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\rho}$ appelé vecteur radial (suivant le rayon) ;
- $\vec{e_\varphi}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur $\vec{e_\rho}$ dans le sens croissant de **φ**. Il est obtenu en effectuant une rotation d'un angle de $+\frac{\pi}{2}$ à partir du vecteur $\vec{e_\rho}$. Pour cela, il est appelé vecteur **orthoradial**, tel que $\vec{e_\rho}.\vec{e_\varphi} = 0$ (perpendiculaire au vecteur radial).

**(ϱ, φ)** sont les coordonnées polaires du point M mais ne correspondent pas aux composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ (contrairement à ce qu'on obtient en coordonnées cartésiennes). Les composantes de ce vecteur position sont (ρ, 0): il n'y a pas de composante suivant $\overrightarrow{e_\varphi}$ mais uniquement une composante ρ suivant $\overrightarrow{e_\rho}$.

**Remarque :**

A la différence du repère cartésien $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ qui est un repère fixe, le repère polaire $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi})$ est un repère local: on peut donc le représenter soit au pôle O, ou plutôt au point M **(voir figure 18)**.

## 3- 3- Relations de transfert entre le système de coordonnées polaire et ce de coordonnées cartésiennes

### a- Vecteurs de base

**Les composantes des vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ dans la base cartésienne $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ :**

Les composantes de $\vec{e}_\rho$: $\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}} = (\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}}.\vec{\imath}).\vec{\imath} + (\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}}.\vec{\imath}).\vec{\jmath}$

- Sur OX : $\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}}.\vec{\imath} = \|\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}}\| \times \|\vec{\imath}\| \cos\varphi = \cos\varphi$
- Sur OY : $\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}}.\vec{\jmath} = \|\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}}\| \times \|\vec{\jmath}\| \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi$

D'où l'expression de $\vec{e}_\rho$: $\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$

De même pour $\overrightarrow{e_\varphi}$ : $\overrightarrow{\mathbf{e_\varphi}} = (\overrightarrow{\mathbf{e_\varphi}}.\vec{\imath}).\vec{\imath} + (\overrightarrow{\mathbf{e_\varphi}}.\vec{\jmath}).\vec{\jmath}$

- Sur OX : $\overrightarrow{\mathbf{e_\varphi}}.\vec{\imath} = \|\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}}\| \times \|\vec{\imath}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi$
- Sur OY : $\overrightarrow{\mathbf{e_\varphi}}.\vec{\jmath} = \|\overrightarrow{\mathbf{e_\varphi}}\| \times \|\vec{\jmath}\| \cos\varphi = \cos\varphi$

D'où l'expression de $\overrightarrow{e_\varphi}$: $\overrightarrow{\mathbf{e_\varphi}} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$

De même, en inversant les relations précédentes on peut écrire :

$$\vec{\imath} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}} - \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{e_\varphi}}$$
$$\vec{\jmath} = \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}} + \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{e_\varphi}}$$

<u>Avec ses relations, il est toujours possible de passer d'un système de coordonnées à l'autre.</u>

Si l'étude est effectuée en coordonnées cartésiennes seules doivent apparaître les grandeurs (x , y , $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$). En coordonnées polaires n'apparaîtront que les grandeurs (ρ , φ , $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$). Il ne faut en aucun cas conserver des expressions comportant un mélange de ses grandeurs.

**Remarque :** $\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}}}{\mathbf{d\varphi}} = \frac{d(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath})}{d\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\boldsymbol{\varphi}\,\vec{\jmath} = \overrightarrow{\mathbf{e_\varphi}}$ d'où $\overrightarrow{\mathbf{e_\varphi}} = \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}}}{\mathbf{d\varphi}}$

On retiendra donc que la dérivée du vecteur unitaire $\vec{e}_\rho$, par rapport à la variable angulaire, est un vecteur perpendiculaire : $\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}}}{\mathbf{d\varphi}} \perp \vec{e}_\rho$ est égale à $\overrightarrow{\mathbf{e_\varphi}}$.

- Il faut noter aussi qu'on peut écrire : $\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$ et dérivons ce vecteur par rapport à **φ** t :

  $\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$, sachant que $\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin\varphi$ et $\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos\varphi$

  Alors $\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi}$ peut-être obtenir par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ et on peut écrire $\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi} = \overrightarrow{e_\varphi}$.

### b- Coordonnées

En utilisant le schéma dans la figure ci-dessus on peut trouver les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires :

On'a : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

Puisque : $\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$

Donc : $\overrightarrow{OM} = \rho\cos\varphi\,\vec{\imath} + \rho\sin\varphi\,\vec{\jmath} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

Par identification on trouve: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ ou $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \mathrm{Arctan}(\frac{y}{x}) \end{cases}$

## 4- Coordonnées cylindriques

### 4. 1- Définitions des coordonnés et du repère cylindriques

Il est possible de repérer la position, dans l'espace, d'un point M en utilisant le système de coordonnées cylindriques. Dans ce système la position du point est repérée par la donnée de la composante z (comme dans les coordonnées cartésiennes) et de ses coordonnées polaires qui permettent de repérer la position de la projection orthogonale du point M sur le plan horizontale.

Donc, les coordonnées cylindriques d'un point M de l'espace correspondent aux coordonnées polaires (ϱ, φ) auxquelles on rajoute une troisième coordonnée appelée la côte (z): M(ϱ, φ, z)

Le point M est situé sur un cylindre d'axe Oz, de rayon ϱ d'où le terme coordonnées cylindriques. Pour positionner un point sur le cylindre il suffit de préciser la cote z et la coordonnée angulaire φ.

La projection m du point M dans le plan (O, x, y) est repérée en coordonnées polaires (ϱ, φ). La projection de M sur l'axe Oz donne la cote z **(voir figure 20)**.

Les coordonnées cylindriques de M sont donc (ϱ, φ, z).

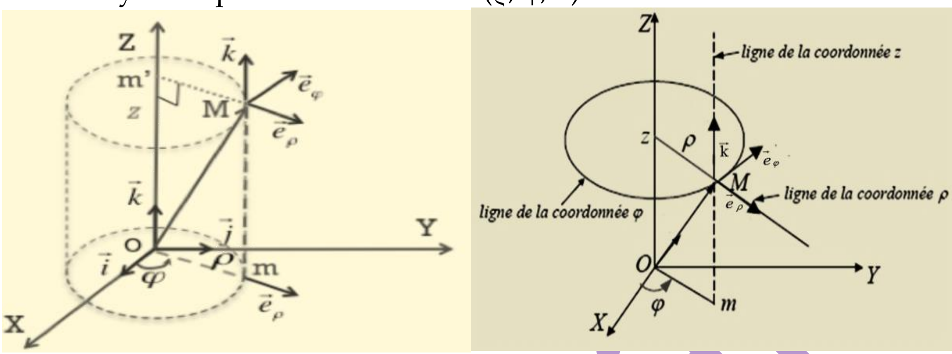



*Fig. 20 : Le système de coordonnées cylindriques*

La base associée est composée de la base polaire et du vecteur unitaire $\vec{k}$ suivant l'axe Oz.

On associe la base orthonormée $(\vec{\mathbf{e}}_\rho, \vec{\mathbf{e}}_\varphi, \vec{\mathbf{k}})$ aux coordonnées cylindriques, où le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{e}_\rho}$ est le vecteur unitaire de la direction $\overrightarrow{Om}$, et le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{e}_\varphi}$ est défini de tel sorte à ce que le trièdre $(\vec{\mathbf{e}}_\rho, \vec{\mathbf{e}}_\varphi, \vec{\mathbf{k}})$ soit directe.

On a donc d'après le paragraphe précédent :

- $\rho(t) = \|\overrightarrow{Om}\|$ : Le rayon polaire, tel que $\rho \in [0, +\infty]$ ;
- $\varphi(t) = (\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om}})$: L'angle polaire, tel que $\varphi \in [0, 2\pi]$ ;
- $z(t) = \|\overrightarrow{mM}\| = \|\overrightarrow{Om'}\|$ : La cote, tel que $z \in [-\infty, +\infty]$.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'obtient en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\vec{k}$$

Les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont **(ϱ, 0, z)** dans la base cylindrique $(\vec{\mathbf{e}}_\rho, \vec{\mathbf{e}}_\varphi, \vec{\mathbf{k}})$.

Son module est : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

## 4- 1- Relations de transfert entre le repère cartésien et le repère cylindrique

### a- Coordonnées

On' a : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et puisque $\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$

Donc : $\overrightarrow{OM} = \rho\cos\varphi\vec{i} + \rho\sin\varphi\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Par identification : $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ ou inversement $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \mathrm{Arctan}(\frac{y}{x}) \\ z = z \end{cases}$

**Remarque :** Ici, **ϱ** est le module de $\overrightarrow{Om}$ et non pas celui de $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$.

$$\rho = \|\overrightarrow{Om}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad r = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### b- Vecteurs de base

- $\vec{e}_\rho = \frac{\overrightarrow{Om}}{\|\overrightarrow{Om}\|} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$ : Vecteur unitaire du rayon polaire ϱ(t) ;
- $\vec{k}$: Vecteur unitaire de la cote z(t) ;
- $\vec{e}_\varphi$: Vecteur unitaire tel que $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$ forme une base orthonormée directe.

$$\vec{e}_\varphi = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

Les données **ρ(t)**, **φ(t)** et **z(t)** constituent les équations paramétriques du mouvement**.**

### 4. 2- Déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques

Le déplacement élémentaire en coordonnées cylindrique s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + dz\vec{k}$$

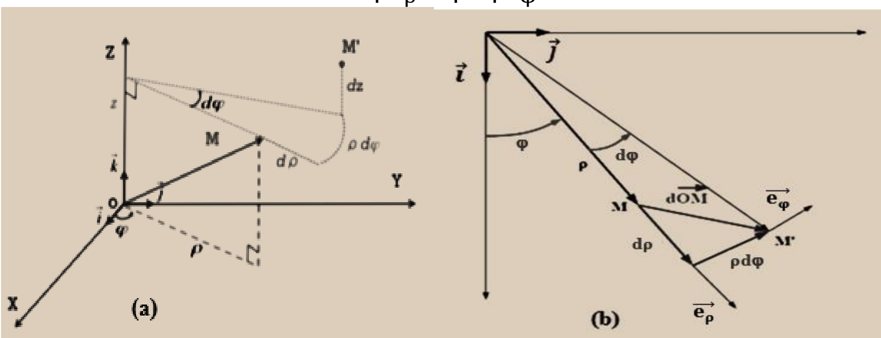



*Fig. 21: Déplacement élémentaire en coordonnées cylindrique (a) (polaire sur la figure (b))*

En effet, le déplacement de M vers M' s'effectue en faisant une translation dρ suivant $\vec{e}_\rho$, suivi d'une rotation d'un angle dφ, qui donne lieu à un déplacement de ρdφ, puis une translation dz suivant $\vec{k}$.

Cette expression permettre de déterminer le vecteur vitesse dans le systéme de coordonnées cylindriques.

Elle permet également d'exprimer une surface élémentaire δS = ρdρ.dφ.

Par définition, les vecteurs déplacement élémentaire et vitesse sont tangents à la trajectoire et orientés dans le sens du mouvement.

### 4. 3- Élément de volume en coordonnées cylindriques

Le volume élémentaire engendré par le déplacement élémentaire, décrit ci-dessus, est : $d^3V = \rho d\rho d\varphi dz$

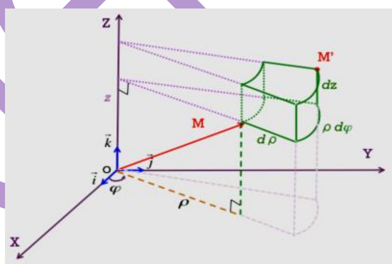



*Fig. 22 : Volume élémentaire en coordonnées cylindrique*

Cette représentation est à utiliser pour un système admettant une symétrie cylindrique (invariance par rotation autour de Oz).

**Remarque :** si z = 0 nous reconnaissons alors les coordonnées polaires qui ne sont donc qu'un cas particulier des coordonnées cylindriques.

## 5- Coordonnées sphériques

### 5. 1- Définitions des coordonnées sphériques

Dans l'espace à trois dimensions on peut utiliser le système des coordonnées sphériques, dont la base associée est une base mobile. Ce système de coordonnées est adéquat dans les cas où le système étudié présente un point particulier **O**, de symétrie autour duquel les rotations sont privilégiées.

La position du point matériel est alors repérée par la distance r et deux angles **φ** et **θ**. **r** étant la distance qui sépare le point matériel **M** du point particulier **O** (l'origine). L'angle **φ** appelé longitude ou azimut est l'angle que fait la projection du vecteur position sur le plan horizontal avec l'axe **(OX)** (similaire au cas du système de coordonnées cylindriques). L'angle $\boldsymbol{\theta}$, appelé colatitude, est l'angle que fait le vecteur position $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ avec l'axe **(OZ)**.

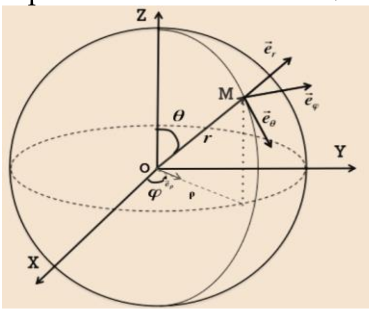



*Fig.23*

On a donc :

$$r = \|\overrightarrow{OM}\| \;;\; 0 \le r \le +\infty$$
$$\varphi = (\overrightarrow{Om}, \vec{i}) \,,\; \overrightarrow{Om} = \mathrm{Proj}_{xOy}(\overrightarrow{OM}) \;,\; 0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$\theta = (\overrightarrow{OM}, \vec{k}) \;;\; 0 \le \varphi \le \pi$$

## 5- 2- Définition du repère sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

La base orthonormée associées aux coordonnées cylindriques est notée $(\vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\theta, \vec{\mathbf{e}}_\varphi)$.

- $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire dans la direction et le sens de $\overrightarrow{OM}$ avec $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$;
- $\vec{e}_\theta$ est le vecteur unitaire obtenu par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ à partir de $\vec{e}_r$ dans le plan (OZ, OM) ;
- $\vec{e}_\varphi$ vecteur unitaire tangent à la parallèle passant par M et orienté dans le sens croissant de $\varphi$;

**Remarque :** le trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est un trièdre direct.

**La base sphérique :** on l'obtient par une rotation de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un angle $\varphi$ autour de Oz, suivie d'une rotation d'un angle $\theta$ autour de $\vec{e}_\varphi$.

## 5. 3- Relations de transfert entre le repère cartésien et le repère sphérique

### i) Coordonnées

On définit un vecteur auxiliaire dans le plan **(xOy)**, noté $\vec{\mathbf{e}}_\rho$ vecteur unitaire de $\overrightarrow{\mathbf{Om}}$ de module $\boldsymbol{\rho}$. On peut considérer le repère $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ comme un repère polaire : $\overrightarrow{Om} = \rho\vec{e}_\rho = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ avec $\vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$

En outre, on $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\vec{e}_\rho + z\,\vec{k}$ Avec : $\begin{cases}\rho = r\sin\theta \\ z = r\cos\theta\end{cases}$

Le vecteur unitaire sur Om s'écrit : $\vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$.

Le vecteur $\vec{e}_\varphi$ peut être obtenu par remplacer $\varphi$ par $\varphi + \frac{\pi}{2}$ dans $\vec{e}_\rho$ ou simplement par dérivé de ce dernier par rapport à $\varphi$ :

$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$. ce vecteur de base peut être exprimé en fonction du dérivé de $\vec{e}_r$ par rapport à $\varphi$.

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}$$

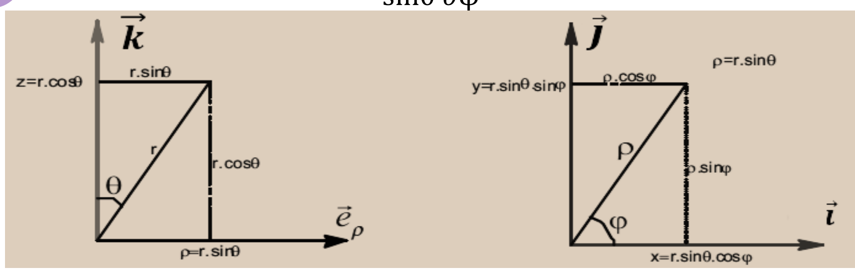



*Fig.24*

D'où les relations de passage du système de coordonnées sphériques au coordonnées cartésiennes suivantes (ou l'inverse) :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\ \cos\varphi \\ y = r\sin\theta\ \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{ou l'inverse} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \varphi = \arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

## 5. 4- Vecteurs de base

Cette base est reliée à la base des coordonnées cartésiennes par les relations:

$$\begin{cases} \vec{e_r} = \sin\theta\ \vec{e_\rho} + \cos\theta\vec{k} = \sin\theta\ \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\theta\ \sin\varphi\ \vec{\jmath} + \cos\theta\vec{k} \\ \vec{e_\theta} = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e_\rho} + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{k} = \cos\theta\,\vec{e_\rho} - \sin\theta\ \vec{k} = \cos\theta\cos\varphi\vec{\imath} + \cos\theta\ \sin\varphi\vec{\jmath} - \sin\theta\ \vec{k} \\ \vec{e_\varphi} = \frac{d\vec{e_\rho}}{d\varphi} = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{\imath} + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{k} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\ \vec{k} \end{cases}$$

Dans cette base, le vecteur position s'écrit de la façon suivante : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r}$

## 5. 5- Déplacement élémentaire en coordonnées Sphériques

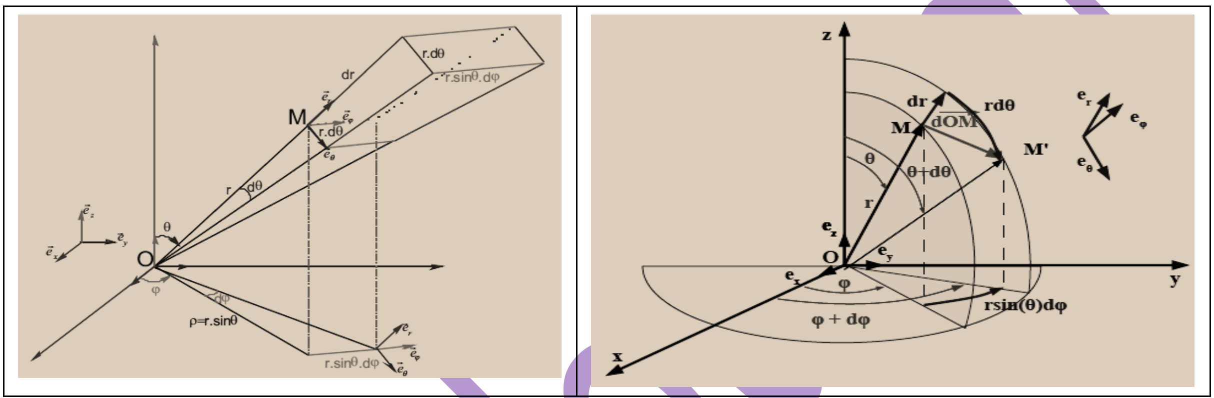



*Figure 25 – Déplacement élémentaire en coordonnées sphériques*

Le déplacement élémentaire en coordonnées sphérique s'écrit :

$$d\vec{M} = dr\ \vec{e_r} + \ rd\theta\ \vec{e_\theta} + r\sin\theta\ d\varphi\ \ \vec{e_\varphi}$$

Ce résultat peut être établi en calculant la différentielle du vecteur position :

$$d\vec{M} = d(r\vec{e_r}) = \ dr.\vec{e_r} + \ r.d\vec{e_r} = \ dr.\vec{e_r} + \ rd\theta\vec{e_\theta} + r\sin\theta\ d\varphi\,\vec{e_\varphi}$$

Puisque $\quad d\vec{e_r} = \frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\theta}d\theta\ + \ \frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\varphi}d\varphi = d\theta\ \vec{e_\theta} + \sin\theta d\varphi\ \vec{e_\varphi}$

Le troisième vecteur de la base est donné par : $\quad \vec{e_\theta} = \frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\theta}$

Le déplacement élémentaire est :

$$d\vec{M} = d(r\vec{e_r}) = \ dr.\vec{e_r} + \ r.d\vec{e_r} = \ dr.\vec{e_r} + \ r.\left(\frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\varphi}d\varphi\right) = \ dr.\vec{e_r} + \ r(d\theta\vec{e_\theta} + d\varphi.\sin\theta\vec{e_\varphi})$$

Le même résultat peut être obtenue en suivant une approche géométrique. En effet, une variation **dr** de **r** donne lieu à un déplacement $r\,\vec{e_r}$, une variation **dθ** de **θ** donne lieu à un déplacement $rd\theta\ \vec{e_\theta}$ et une variation **dφ** de **φ** donne lieu à un déplacement $r\sin\theta d\varphi\ \vec{e_\varphi}$.

Cette expression permet de déterminer les vecteur vitesse et accélération

Elle permet également de déterminer :

La surface élémentaire : $ds = r^2\sin\theta d\varphi d\theta$

Le volume élémentaire : $dv = r^2 dr\sin\theta d\varphi d\theta$

Si θ = constante, on retrouve des coordonnées polaires pour $\rho = r.\sin\theta$ et φ.

Si φ = constante, on retrouve des coordonnées polaires pour r et φ.

- un volume élémentaire : $\delta\tau = r^2 dr\ \sin\theta d\theta d\varphi$.

## 5. 6- Élément de volume en coordonnées sphériques

L'élément de volume en coordonnées sphérique est obtenu en prenant le produit des composantes du déplacement élémentaire: $\quad d^3V = dr.rd\theta.r\sin\theta d\varphi$

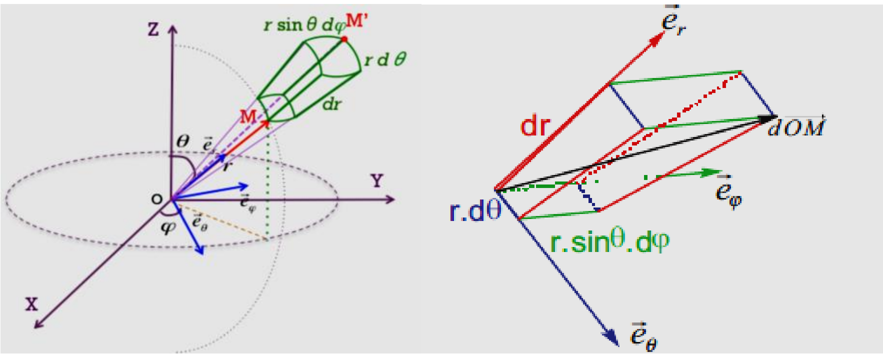
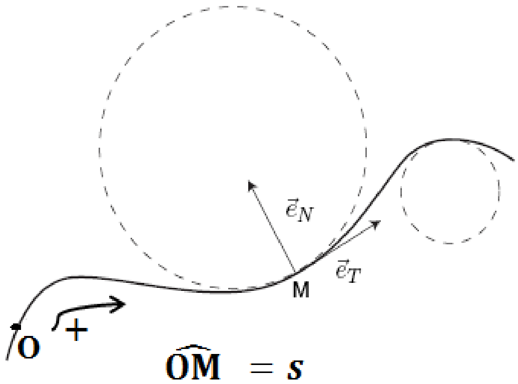



*Fig.26*

## 6- Les coordonnées curvilignes-base de Freinet

Nous pouvons repérer la position du mobile sur la trajectoire elle-même à l'aide de l'abscisse curviligne. Pour ce faire :

- On oriente la trajectoire au hasard,
- On choisit un point fixe O sur la trajectoire, comme étant l'origine des abscisses, L'abscisse curviligne est défini comme étant la grandeur algébrique s de l'arc appartenant à la trajectoire de O jusqu'à M.




$$\widehat{OM} = s$$

*Figure. 27- Coordonnées curvilignes*