Mécanique du point matériel :

Contrôle N : 1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2007-2008 FSSM :

Exercice 1 :

On considère un point matériel M se déplaçant dans un référentiel $R(O,xyz)$ muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.Les coordonnées du point M dans R sont données par :

$X(t) = t + 1\ ;\ y(t) = t^2 + 1\ et\ z(t) = 0$, (t étant le temps).

a) Donner l'équation de la trajectoire de M dans R .En déduire sa nature ;
b) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/R)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du point M.

Exercice 2 :

On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne s(t).La vitesse du point M dans R(O,xyz) est $\vec{V}(M/R)$ de module $V = \frac{ds(t)}{dt}$. On défini la base locale(ou base de Frenet) $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$.telle que$\vec{V}(M/R) = V \times \vec{\tau}$.

a) Que désigne les vecteurs $\vec{\tau},\vec{n}$ et $\vec{b}$.
b) Montrer que l'accélération du point M est donnée par :

$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{r}\vec{n}$; r étant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M.

c) Exprimer r en fonction de$\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M/R)$.

Exercice 3 :

On considère la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ attachée à un référentiel absolu R(O,xyz) et la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ lié à un référentiel $R_1(O,x_1y_1z_1)$.Un point M est assujetti à se déplacer sur un tige(T_1). La tige (T_1) est solidaire en O_1 avec une tige (T) en rotation autour de l'axe (Oz) d'angle φ(t) , (voir figure). La tige (T_1) est située dans le plan vertical $(\vec{e}_\rho,\vec{k})$. Le point O_1 est repéré par $\overrightarrow{OO_1} = \rho(t)\vec{e}_\rho$ et le point M est repéré sur la tige (T_1) par
$\overrightarrow{O_1M} = V_0 t\,\vec{u}$ $(V_0 = Cte)$.Le vecteur $\vec{u}$ fait un angle α constant avec le vecteur $\vec{e}_\rho$

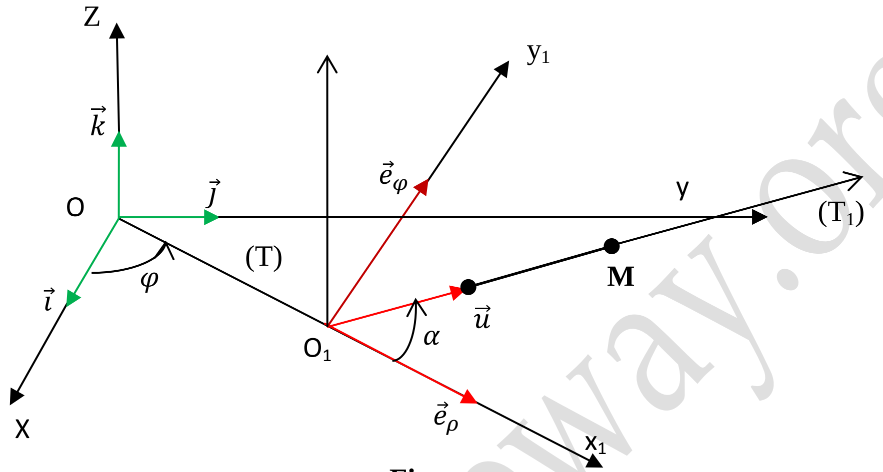
N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$

I. Etude de la cinématique de M par calcul direct :

a) Vérifier que la vitesse de rotation $\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\varphi}\vec{k}$.
b) Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{e}_\rho$, $\vec{k}$ et l'angle α.
c) Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
d) Déterminer la vitesse absolue de M, $\vec{V}(M/R)$.
e) Déterminer l'accélération absolue de M, $\vec{\gamma}(M/R)$.

II. Etude de la cinétique de M par décomposition de mouvement

a) Déterminer la vitesse relative de M, $\vec{V}(M/R_1)$.
b) Déterminer la vitesse d'entrainement de M, $\vec{V}_e(M)$.
c) En déduire la vitesse absolue de M , $\vec{V}(M/R)$.
d) Déterminer l'accélération relative de M, $\vec{\gamma}(M/R_1)$.
e) Déterminer l'accélération d'entrainement de M , $\vec{\gamma}_e(M)$.
f) Déterminer l'accélération de Coriolis de M , $\vec{\gamma}_C(M)$.
g) En déduire l'accélération absolue de M, $\vec{\gamma}(M/R)$.



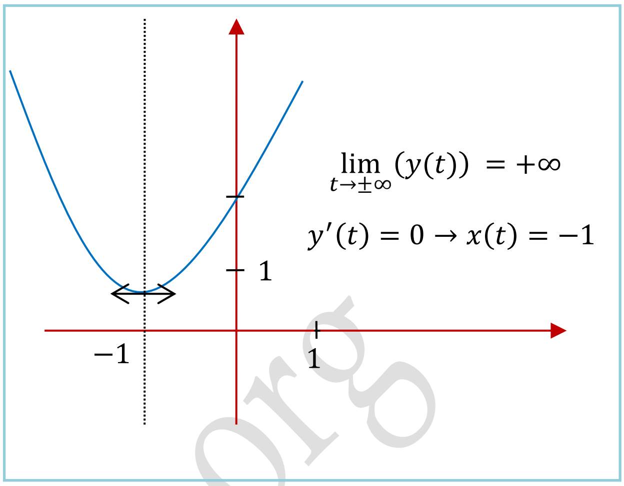
Figure

Corrigés Contrôle N :1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2007-2008 FSSM:

Exercice 1 :

a) Soit un point matériel M de coordonnées

$x(t), y(t)$ *et* $z(t)$ *données par* :
$x(t) = t + 1$ (1) ; $y(t) = t^2 + 1$ (2) et z(t)=0 (3).



L'équitation de la trajectoire de M dans R
(1) $\longrightarrow t = x(t) - 1$ on remplace dans l'équitation
(2) $\longrightarrow y(t) = (x(t) - 1)^2 + 1$.
Donc la trajectoire décrit par le point M est un Parabole.

b) Calculons : la vitesse $\vec{V}(M/R)$

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d[(t+1)\vec{\imath}+(t^2+1)\vec{\jmath}]}{dt}\right|_R 1\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}$$

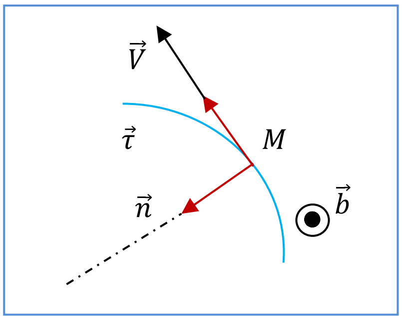
Alors :

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = 1\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}}$$

$\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ *sont fixe dans R donc* $\left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{\jmath}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = 0$

L'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(1\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath})}{dt}\right|_R = 2\vec{\jmath} \quad \text{donc :} \quad \boxed{\vec{\gamma}(M/R) = 2\vec{\jmath}}$$



Exercice 2 :

a) $\vec{\tau}$: Vecteur unitaire tangent en M, elle a le même sens du mouvement.
$\vec{n}$: Vecteur unitaire ⊥ à $\vec{\tau}$ dirigé vers le centre de courbure.
$\vec{b}$: Vecteur unitaire ⊥ au plan qui contient les deux vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$.

b) Montrons que $\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{r}\vec{n}$ (avec r le rayon de courbure).

On a $\vec{V}(M/R) = V\vec{\tau}$ Alors $\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{dV}{dt}\right|_R \vec{\tau} + V\left.\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|_R$

Or : $\left.\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|_R = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \times \left.\frac{ds}{dt}\right|_R$ et $ds = Rd\alpha \Longrightarrow \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} \times \frac{d\alpha}{ds}$

$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{\vec{n}}{R}$ avec: $\left(\frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} = \vec{n} \;\middle|\; \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}\right)$ *Alors*: $\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{dV}{dt}\right|_R \vec{\tau} + \frac{ds}{dt} \times \frac{d\tau}{ds} \times \left.\frac{ds}{dt}\right|_R$

$$\Longrightarrow \vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{dV}{dt}\right|_R \vec{\tau} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \times \frac{\vec{n}}{R} \qquad \boxed{\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{dV}{dt}\right|_R \vec{\tau} + \frac{V^2}{R}\vec{n}}$$

c) R en fonction de $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M/R)$.

$$\vec{V}(M/R)\wedge\vec{\gamma}(M/R) = (V\vec{\tau})\wedge\left(\left.\frac{dV}{dt}\right|_R \vec{\tau}\right) + \left(V\vec{\tau}\wedge\frac{V^2}{R}\vec{n}\right) = \frac{V^3}{R}\vec{b} \qquad (\text{avec } \vec{\tau}\wedge\vec{n} = \vec{b} \text{ et } \|\vec{b}\| = 1)$$

$$\|\vec{V}(M/R)\wedge\vec{\gamma}(M/R)\| = \frac{V^3}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{V^3}{\|\vec{V}(M/R)\wedge\vec{\gamma}(M/R)\|}}$$

Exercice 2 :

R(O,x,y,z) $\longrightarrow$ $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ Référentiel absolu et R1(O,x1y1z1).$\longrightarrow$ $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ Référentiel relatif.

$\overrightarrow{OO_1}=\rho(t)\vec{e}_\rho$; $\overrightarrow{O_1M}=V_0 t\,\vec{u}$ avec $V_0=\text{Cst}$ et $(\widehat{\vec{u}\wedge\vec{e}_\rho})=\alpha=\text{Cst}$.

$\left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_R=\left.\frac{d\vec{\jmath}}{dt}\right|_R=\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R=0$ car $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ *Base de R* *et* $\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{R1}=\left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_{R1}=\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{R1}=0$ car $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ Base de R1

Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$

I. Etude de la cinématique de M par calcul direct

a) La vitesse de rotation $\vec{\Omega}(R_1/R)$

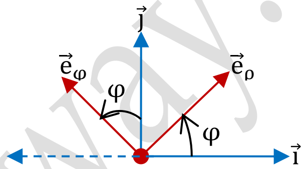
En effet : $\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R=\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{R1}+\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{e}_\rho$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{d(\cos\varphi\vec{\imath}+\sin\varphi\vec{\jmath})}{dt}\right|_R=0+\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{e}_\rho$$

$$\left.\frac{d(\cos\varphi\vec{\imath}+\sin\varphi\vec{\jmath})}{dt}\right|_R=\dot\varphi(-\sin\varphi\vec{\imath}+\cos\varphi\vec{\jmath})=\dot\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\left.\frac{d(\cos\varphi\vec{\imath}+\sin\varphi\vec{\jmath})}{dt}\right|_R=\dot\varphi\vec{k}\wedge\vec{e}_\rho$$

Alors : $\vec{\Omega}(R_1/R)=\dot\varphi\vec{k}$



$\vec{e}_\rho=\cos\varphi\vec{\imath}+\sin\varphi\vec{\jmath}$

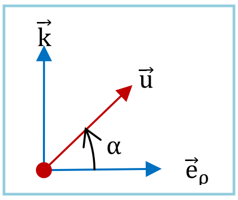
$\vec{e}_\varphi=\sin\varphi\vec{\imath}+\cos\varphi\vec{\jmath}$

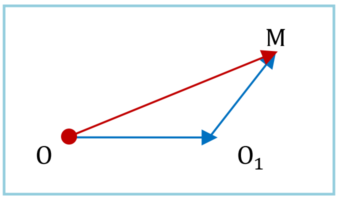
$$\left.\frac{d(\cos\varphi)}{dt}\right|_R=\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\times\frac{d\varphi}{dt}$$

$$=-\sin\varphi\times\dot\varphi$$

b) L'expression de $\vec{u}$ en fonction de $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{k}$ et α

$\vec{u}=\cos\alpha\,\vec{e}_\rho+\sin\alpha\,\vec{k}$





c) L'expression de $\overrightarrow{OM}$

On a $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1M}=\rho(t)\vec{e}_\rho+V_0 t\,\vec{u}$

$\overrightarrow{OM}=\rho(t)\vec{e}_\rho+V_0 t\,(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho+\sin\alpha\,\vec{k})$ Alors : $\boxed{\overrightarrow{OM}=(\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)\vec{e}_\rho+V_0 t\sin\alpha\vec{k}}$

a) La vitesse absolue de M , $\vec{V}(M/R)$

On a : $\vec{V}(M/R)=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R=\left.\frac{d(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1M})}{dt}\right|_R=\left.\frac{d\left((\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)\vec{e}_\rho+V_0 t\sin\alpha\vec{k}\right)}{dt}\right|_R$

Avec V_0 et *α sont des constantes* $\vec{k}$ fixe dans R

$$\vec{V}(M/R)=(\dot\rho(t)+v_0\cos\alpha)\vec{e}_\rho+(\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R+V_0 t\sin\alpha\,\vec{k}$$

$$\textit{Avec}\ \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R=\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\times\frac{d\varphi}{dt}\right|_R=\dot\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{V}(M/R)=(\dot\rho(t)+v_0\cos\alpha)\vec{e}_\rho+(\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)\dot\varphi\vec{e}_\varphi+V_0 t\sin\alpha\,\vec{k}}$$

b) L'accélération absolue de M :

$$\vec{\gamma}(M\,/\,R)=\left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R=\left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R=\left.\frac{d\left(\underbrace{(\dot{\rho}(t)+v_0\cos\alpha)\overrightarrow{e_\rho}}_{A}+\underbrace{(\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}}_{B}+\underbrace{V_0 t\sin\alpha\,\vec{k}}_{C}\right)}{dt}\right|_R$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_R=\ddot{\rho}(t)\overrightarrow{e_\rho}+(\dot{\rho}(t)+v_0\cos\alpha)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_R=\ddot{\varphi}(\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)\overrightarrow{e_\varphi}+(\dot{\rho}(t)+V_0\cos\alpha)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}+\dot{\varphi}^2(\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)\left(-\overrightarrow{e_\rho}\right)$$

$$=\left(\ddot{\varphi}(\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)+(\dot{\rho}(t)+V_0\cos\alpha)\right)e_\varphi-\dot{\varphi}^2(\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)\overrightarrow{e_\rho}$$

$$∢:\ \left.\frac{\overrightarrow{de_\varphi}}{dt}\right|_R=\left.\frac{\overrightarrow{de_\varphi}}{d\varphi}\times\frac{d\varphi}{dt}\right|_R=-\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\left.\frac{dC}{dt}\right|_R=\vec{0}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{\gamma}(M\,/\,R)=\begin{cases}\ddot{\rho}(t)-\dot{\varphi}^2(\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)\overrightarrow{e_\rho}\\ \ddot{\varphi}(\rho(t)+\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)+2\dot{\varphi}(\dot{\rho}(t)+v_0\cos\alpha)\,\overrightarrow{e_\varphi}\\ 0\vec{k}\end{cases}}$$

II. Etude de la cinétique de M par décomposition de mouvement

a) la vitesse relative de M, $\vec{V}(M\,/\,R_1)$

$$\vec{V}(M/R_1)=\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}\quad \text{avec } O_1 \text{ l'origine de } R_1 \text{ et } \overrightarrow{O_1M}=V_0 t\,(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho}+\sin\alpha\,\vec{k})$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}=V_0\,(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho}+\sin\alpha\,\vec{k})\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{V}(M/R_1)=V_0\,(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho}+\sin\alpha\,\vec{k})}$$

b) vitesse d'entrainement de M $\vec{V}_e(M)$

$$\vec{V}_e(M)=\left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_R+\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\overrightarrow{O_1M}=\left.\frac{d(\rho(t)\overrightarrow{e_\rho})}{dt}\right|_R+\dot{\varphi}\vec{k}\wedge(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho}+\sin\alpha\,\vec{k})V_0\,t$$

$$\vec{V}_e(M)=\dot{\rho}(t)\overrightarrow{e_\rho}+\rho(t)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}+\dot{\varphi}\,V_0\,t\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\varphi}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{V}_e(M)=\dot{\rho}(t)\overrightarrow{e_\rho}+\dot{\varphi}(\rho(t)+V_0\,t\cos\alpha)\overrightarrow{e_\varphi}}$$

c) La vitesse absolue de M, $\vec{V}(M\,/\,R)$

$$\vec{V}(M/R)=\vec{V}_r(M)+\vec{V}_e(M)=\vec{V}(M/R_1)+\vec{V}_e(M)$$

$$=V_0\,(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho}+\sin\alpha\,\vec{k})+\dot{\rho}(t)\overrightarrow{e_\rho}+\dot{\varphi}(\rho(t)+V_0\,t\cos\alpha)\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\boxed{\vec{V}(M/R)=(\dot{\rho}(t)+V_0\cos\alpha)\overrightarrow{e_\rho}+\dot{\varphi}(\rho(t)+V_0\,t\cos\alpha)\overrightarrow{e_\varphi}+V_0\,\sin\alpha\,\vec{k}}$$

d) L'accélération relative de M, $\vec{\gamma}(M/R_1)$

[(V_0,α) *sont des Constantes et* $(\overrightarrow{e_\rho},\vec{k})$ fixe dans R_1]

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R_1)=\left.\frac{d\vec{V}(M/R_1)}{dt}\right|_{R_1}=\left.\frac{d[V_0\,(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho}+\sin\alpha\,\vec{k})]}{dt}\right|_{R_1}=\vec{0}}$$

e) L'accélération d'entrainement de M , $\vec{\gamma}_e(M)$

$$\vec{\gamma}_e(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R \wedge\overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge[\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\overrightarrow{O_1M}]$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_R = (\dot{\rho}(t)\overrightarrow{e_\rho} + \rho(t)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}) \qquad \sphericalangle:\ [\overrightarrow{OO_1} = \rho(t)\overrightarrow{e_\rho}]$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_R = \ddot{\rho}(t)\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\varphi}\dot{\rho}(t)\overrightarrow{e_\varphi} + \rho(t)\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} - \rho(t)\dot{\varphi}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_R = [\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\varphi}^2]\overrightarrow{e_\rho} + [2\dot{\varphi}\dot{\rho}(t) + \rho(t)\ddot{\varphi}]\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R \wedge\overrightarrow{O_1M} = (\ddot{\varphi}\vec{k})\wedge\left(V_0t\left(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho + \sin\alpha\,\vec{k}\right)\right)$$

$$Or:\ \left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(\dot{\varphi}\vec{k})}{dt}\right|_R = \ddot{\varphi}\vec{k} \quad et \quad \vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\varphi}\vec{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R \wedge\overrightarrow{O_1M} = (\ddot{\varphi}\vec{k})\wedge\left(V_0t\left(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho\right)\right) = \ddot{\varphi}V_0t\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge[\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\overrightarrow{O_1M}] &= (\dot{\varphi}\vec{k})\wedge\left[(\dot{\varphi}\vec{k})\wedge\left(V_0t\left(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho + \sin\alpha\,\vec{k}\right)\right)\right]\\ &= (\dot{\varphi}\vec{k})\wedge[\dot{\varphi}V_0t\,\cos\alpha\,\vec{e}_\varphi + 0]\\ &= -\dot{\varphi}^2V_0t\,\cos\alpha\,\vec{e}_\rho \qquad \sphericalangle:\ \vec{k}\wedge\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\rho\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_e(M) = [\ddot{\rho}(t) - \dot{\varphi}^2[\rho(t) + V_0t\,\cos\alpha]]\overrightarrow{e_\rho} + [\ddot{\varphi}(V_0t\,\cos\alpha + \rho(t)) + 2\dot{\varphi}\dot{\rho}(t)]\overrightarrow{e_\varphi}}$$

f) L'accélération de Coriolis : $\vec{\gamma}_C(M)$

$$\vec{\gamma}_C(M) = 2\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{V}(M/R_1) \qquad \sphericalangle:\ \vec{V}(M/R_1)\text{ est la vitesse relatif de M}$$

$$\vec{\gamma}_C(M) = 2(\dot{\varphi}\vec{k})\wedge[V_0\left(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho} + \sin\alpha\,\vec{k}\right)] = 2\dot{\varphi}V_0t\,\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\varphi} + \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_C(M) = 2\dot{\varphi}V_0t\,\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\varphi}}$$

g) L'accélération absolue de M, $\vec{\gamma}(M/R)$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/R) &= \vec{\gamma}(M/R_1) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_C(M)\\ &= \vec{0} + [\ddot{\rho}(t) - \dot{\varphi}^2[\rho(t) + V_0t\,\cos\alpha]]\overrightarrow{e_\rho} + [\ddot{\varphi}(V_0t\,\cos\alpha + \rho(t)) + 2\dot{\varphi}\dot{\rho}(t)]\overrightarrow{e_\varphi}\\ &\quad + 2\dot{\varphi}V_0t\,\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\varphi}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où :}\quad \vec{\gamma}(M/R) = \begin{cases}[\ddot{\rho}(t) - \dot{\varphi}^2[\rho(t) + V_0t\,\cos\alpha]] & \overrightarrow{e_\rho}\\ \ddot{\varphi}(V_0t\,\cos\alpha + \rho(t)) + 2\dot{\varphi}(\dot{\rho}(t) + V_0t\,\cos\alpha) & \overrightarrow{e_\varphi}\\ 0 & \vec{k}\end{cases}}$$

Il ne faut pas beaucoup d'esprit pour ce qu'on soit mais il en faut infiniment pour enseigner ce qu'on ignore

Montesquieu

Contrôle N : 1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2008/2009 FSSM:

Toute les bases considérées sont orthonormées directes

Exercice1

Les coordonnées d'une particule mobile dans le référentiel $R_0(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont données en fonction du temps par :$X(t) = t^2 - 4t + 1$; $y(t) = -2t^4$ et $Z(t) = 3t^2$

Dans un deuxième référentiel $R_1(O_1,\vec{i_1} = \vec{i},\vec{j_1} = \vec{j},\vec{k_1} = \vec{k})$, elles ont pour expression : X_1(t)=t^2+t=2 Y_1(t)=-2t^4+5 Z_1(t)=3t^4-7

1) Déterminer les expressions des vitesses $\vec{V}(M/R_0)$ et $\vec{V}(M/R_1)$
2) Exprimer la vitesse $\vec{V}(M/R_0)$ en fonction de la vitesse $\vec{V}(M/R_1)$
3) Exprimer l'accélération $\vec{\gamma}(M/R_0)$ en fonction de l'accélération $\vec{\gamma}(M/R_1)$
4) Quelle est la nature du mouvement du référentiel R_1par rapport au référentiel R_0 ?
5) Supposons R_0 galiléen.R_1est-il aussi galiléen ? Justifier votre réponse.

Exercice 2

Soient R$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$un référentiel fixe et $R_1(O_1,\vec{i_1} = \vec{i},\vec{j_1} = \vec{j},\vec{k})$ un référentiel mobile tel que : $\vec{V}(O_1/R)$=at $\vec{j_1}$ où a est une constante positive.

Soit $R_2(O_1,\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$ un deuxième référentiel, lié à une particule mobile M (point matériel) et tel que :
$\overrightarrow{O_1M}$=l$\vec{e_\rho}$ où l est une constante positive et l'angle $(\vec{i_1},\vec{e_\rho})$=$\varphi(t)$ (voir figure)

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$

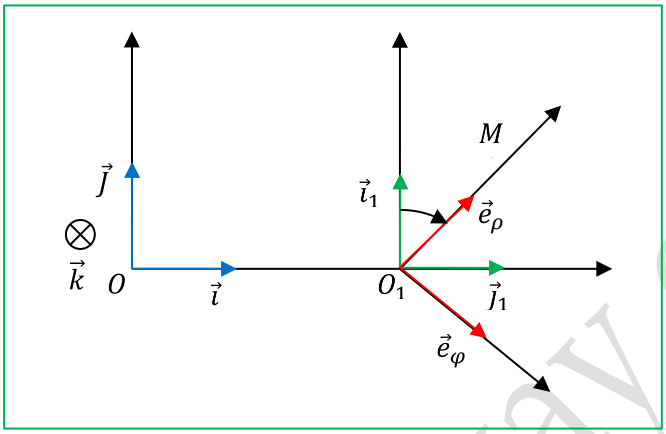
A. Considérer R$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ comme référentiel absolu et $R_1(O_1,\vec{i_1},\vec{j_1},\vec{k})$ comme référentiel relatif

1) Quelle est la nature de la trajectoire de M dans R_1 ? (sans faire de calcul)
2) Déterminer l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_1/R)$
3) déterminer l'expression de la vitesse relative $\vec{V}(M/R_1)$ et de la vitesse d'entrainement$\vec{V_e}$(M). En déduire la vitesse absolue$\vec{V}$(M).
4) Quelle est la nature du mouvement de R_1par rapport à R ?
5) Déterminer l'expression des vecteurs accélérations relatives$\vec{\gamma}(M/R_1)$, d'entrainement $\vec{\gamma_c}$(M).En déduire l'accélération absolue $\vec{\gamma_a}(M)$

B. Considérer R$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$comme référentiel absolu et $R_2(O_1,\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$ comme référentiel relatif

1) Donner l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$.En déduire le vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_2/R)$
2) Déterminer l'expression de la vitesse relative $\vec{V}(M/R_2)$ et de la vitesse d'entrainement$\vec{V}(M)$. En déduire la vitesse absolue$\vec{V}(M/R)$

3) Déterminer l'expression des vecteurs accélération relative $\overrightarrow{\gamma_a}(M/R_2)$, d'entrainement $\overrightarrow{\gamma_e}$(M) et de Coriolis $\overrightarrow{\gamma_c}$(M) . En déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}$(M)
4) Comparer les expressions de la vitesse absolue $\vec{V}$(M/R) déterminé dans les équations A-3 et B-2
5) Comparer les expressions de l'accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}$(M) déterminées dans les equation A-5 et B-3



Corrigé du contrôle N : 1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2008/2009 FSSM:

Exercice 1 :

Soit $\begin{cases} X(t) = t^2 - 4t + 1 \\ Y(t) = -2t^4 \\ Z(t) = 3t^2 \end{cases}$; $\begin{cases} X_1(t) = t^2 + t + 2 \\ Y_{1=} = -2t^4 + 5 \\ Z_1(t) = 3t^2 - 7 \end{cases}$

1) Les expressions des vitesses $\vec{V}(M/R_0)$ et $\vec{V}(M/R_1)$

- L'expression de la vitesse $\vec{V}(M/R_0)$
  $\vec{V}(M/R_0) = \frac{d}{dt/R_0}((t^2 - 4t + 1)\vec{\imath} - 2t^4\vec{\jmath} + 3t^2\vec{k}) \Rightarrow \vec{V}(M/R_0) = (2t-4)\,\vec{\imath} - 8t^3\,\vec{\jmath} + 6t\,\vec{k}$
- L'expression de $\vec{V}(M/R_1)$
  $\vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d((t^2+t+2)\vec{\imath}(-(2t^4+5)\vec{\jmath}+(3t^2-7)\vec{k})}{dt}\right|_{R_1} = (2t+1)\,\vec{\imath} - 8t^3\,\vec{\jmath} + 6t\,\vec{k}$

2) $\vec{V}(M/R_0)$ en fonction de la vitesse $\vec{V}(M/R_1)$

On a $\vec{V}(M/R_0) = (2t-4)\,\vec{\imath} - 8\,t^3\vec{\jmath} + 6t\,\vec{k} = (2t+1)\,\vec{\imath} - 5\vec{\imath} - 8t^3\vec{\jmath} + 6t\,\vec{k} \Longrightarrow \vec{V}(M/R_0) = \vec{V}(M/R_1) - 5\,\vec{\imath}$

3) $\vec{\gamma}\,(M/R_0)$ en fonction de $\vec{\gamma}\,(M/R_1)$

$\vec{\gamma}\,(M/R_0) = \frac{d\,\vec{V}(M/R_0}{dt}/R_0 = \frac{d}{dt/R}(\,\vec{V}(M/R_1) - 5\vec{\imath}) \Longrightarrow \vec{\gamma}\,(M/R_0) = \vec{\gamma}\,(M/R_1) + \vec{0}\begin{pmatrix} \vec{\imath} = \vec{\imath_1} \\ \vec{\jmath} = \vec{\jmath_1} \\ \vec{k} = \vec{k_1} \end{pmatrix}$

$\vec{\gamma}\,(M/R_0) = \vec{\gamma}(M/R_1)$ Où bien : On a $\vec{V}(M/R_0) = (2t-4)\vec{\imath} - 8t^3\,\vec{\jmath} + 6\,t\,\vec{k}$ et $\vec{V}(M/R_1) = (2t+1)\,\vec{\imath} - 8\,t^3\,\vec{\jmath} + 6t\,\vec{k}$

$\vec{\gamma}(M/R_0) = \left.\frac{d\,(\vec{V}(M/R_0))}{dt}\right|_{R_0} = 2\vec{\imath} - 24\,t^2\,\vec{\jmath} + 6\,\vec{k}$ et $\vec{\gamma}(M/R_1) = \left.\frac{d\,(\vec{V}(M/R_1))}{dt}\right|_{R_1} = 2\vec{\imath} - 24\,t^2\,\vec{\jmath} + 6\,\vec{k}$

Finalement $\vec{\gamma}(M/R_1) = \vec{\gamma}(M/R_0)$

4) La nature du mouvement du R_1 par rapport à R_0

- On a $\vec{\Omega}\,(R_1/R_0) = \vec{0}$ ⇒ translation
- $\vec{V}((M/R_0) - \vec{V}((M/R_1) = -5\,\vec{\imath}$ ⇒ Rectiligne
- $\vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{\gamma}(M/R_1)$ ⇒ Uniform

R_1 est en translation rectiligne uniforme

5) Si R_0 est galiléen alors R_1 est aussi galiléen
6) Car R_1 est en translation réctiligne uniforme par rapport à R_0.

Exercice 2 :

R $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ Référentiel fixe $R_1(O_1,\vec{\imath_1},\vec{\jmath_1},\vec{k})$ Référentiel mobile $R_2(O_1,\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$ Référentiel lié à M.
$\vec{V}\,(O_1/R) = at\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{O_1M} = \rho\,\vec{e_\rho}$ avec: $\rho > 0$ et $(\,\vec{\imath_1}\,,\vec{e_\rho}\,) = \varphi\,(t)$

A. R $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ référentiel absolu et $R_1(O_1,\vec{\imath_1},\vec{\jmath_1},\vec{k})$ relatif.

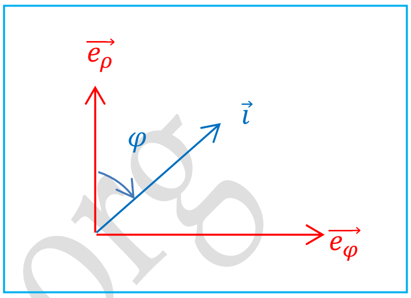
La nature de la trajectoire de M dans $\overrightarrow{R_1}$

On a $\|\overrightarrow{qM}\|$ = l = cste   Donc dans R_1 la trajectoire de M est circulaire de centre O_1

1) l'expression du $\vec{\Omega}(R_1/R)$

Le référentiel R_1 ne fait aucune rotation par rapport à R alors : $\vec{\Omega}(R_1/R) = \vec{0}$

2) Expressions des vitesses relative et d'entrainement

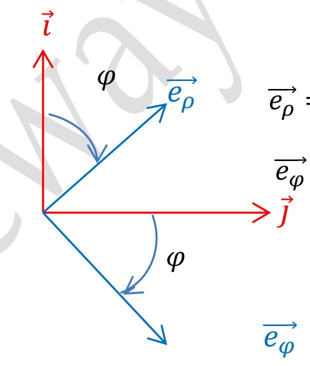


- Vitesse relative $\vec{V}(M/R_1)$

$$\vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(\rho\overrightarrow{e_\rho})}{dt}\right|_{R_1} = \rho \left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_{R_1} = \rho\frac{de_\rho}{d\varphi} \times \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{R_1} = \rho\,\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\boxed{\vec{V}(M/R_1) = \rho\,\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}}$$

- Vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}(M)$



$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}$

$$\overrightarrow{V_e}(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R_1/R)\Lambda\overrightarrow{OM}$$

$\vec{V}(O_1/R)$=at$\vec{\jmath}$=at$(\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi})$

$$\boxed{\overrightarrow{V_e}(M) = \text{at}\,(\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi})}$$

- Vitesse absolue $\vec{V}(M/R)$

$\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M/R_1) + \overrightarrow{V_e}(M)$

$\vec{V}(M/R) = at\sin\varphi\,\overrightarrow{e\rho} + (\dot{\varphi} + at\cos\varphi)\,\overrightarrow{e\varphi}$

3) On a $\vec{\Omega}(R_1/R) = \vec{0}$ ⇒ translation

$\vec{V}(O_1/R)$ = at $\vec{\jmath}$ ⇒ réctiligne

4) L'accélération relative $\vec{\gamma}(M/R_1)$

$$\vec{\gamma}\left(\frac{M}{R_1}\right) = \left.\frac{d\vec{V}\left(\frac{M}{R_1}\right)}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d(\rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi})}{dt}\right|_{R_1} = \rho\ddot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\overrightarrow{e_\rho} \quad \text{Avec } \frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi} \times \frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\rho}$$

$\vec{\gamma}(M/R_1) = -\rho\,\dot{\varphi}^{\,2}\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho\,(\frac{d\varphi}{dt})^2\,\overrightarrow{e_\varphi}$

- L'accélération d'entrainement $\overrightarrow{\gamma_e}$(M)

$$\overrightarrow{\gamma_e}(M) = \left.\frac{dV(O_1/R)}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R \Lambda\overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}\Lambda(\vec{\Omega}\Lambda\overrightarrow{O_1M})$$

$\vec{\gamma}(M) = = \left.\frac{dat\,\vec{\jmath}}{dt}\right|_R$ = a $\vec{\jmath}$ =a $(\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi})$ ⇒ $\boxed{\vec{\gamma}(M) = a\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + a\cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}}$

- L'accélération de Coriolis $\gamma_c(M)$

$\overrightarrow{\gamma_c}(M) = 2\,\vec{\Omega}(R_1/R)\Lambda\vec{V}(M/R_1) = \vec{0}$ ⇒ $\boxed{\overrightarrow{\gamma_c}(M) = \vec{0}}$

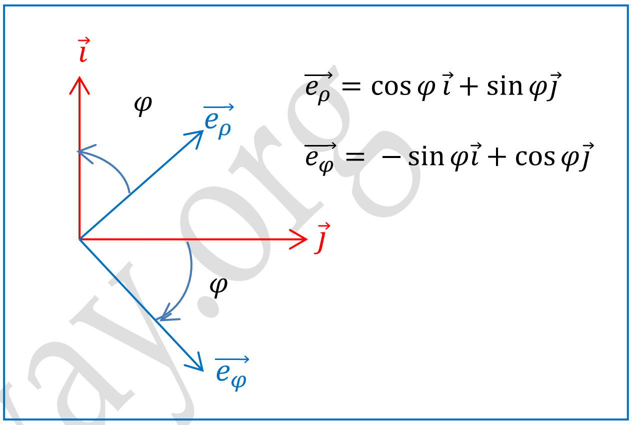
- L'accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}(M)$

$$\overrightarrow{\gamma_a}(M) = \vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}(M/R_1) + \vec{\gamma_e}(M) + \vec{\gamma_c}(M) = = \rho\,\ddot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi} - \rho\dot{\varphi}^2\overrightarrow{e_\rho} + a\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + a\cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\gamma_a}(M) = (\,a\sin\varphi - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e_\rho} + (\rho\,\ddot{\varphi} + a\cos\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}}$$

B. R $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ comme referential absolu et R_2 comme relatif.

1) L'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$



$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\left.\frac{d(\cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath})}{dt}\right|_{R} = \vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\overrightarrow{e_\rho}$$

Car $\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_{R_2} = \vec{0}$

$\dot{\varphi}\,(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}) = \vec{\Omega}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\wedge\overrightarrow{e_\rho}$

$\Longrightarrow\quad \dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi} = \dot{\varphi}(\vec{k}\wedge\overrightarrow{e_\rho}) = \vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\overrightarrow{e_\rho}$

Alors : $\boxed{\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\varphi}\vec{k}}$

L'expression de $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$

On a $\vec{\Omega}(R_2/R) = \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_2/R) = \dot{\varphi}\,\vec{k} + \vec{0}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\vec{\Omega}(R_2/R) = \dot{\varphi}\,\vec{k}}$

2) l'expression de la vitesse relative $\vec{V}(M/R_2)$ et de la vitesse d'entrainement $\vec{V}(M)$. En déduire la vitesse absolue $\vec{V}(M/R)$

- Vitesse relative $\vec{V}(M/R_2)$

$\vec{V}(M/R_2) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d(\rho\overrightarrow{e_\rho})}{dt}\right|_{R_2} = \vec{0}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\vec{V}(M/R_2) = \vec{0}}$

- Vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}(M)$

On a : $\overrightarrow{V_e}(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R_2/R_2)\wedge\overrightarrow{O_1M}$

$\overrightarrow{V_e}(M) = = at\vec{\jmath} + \dot{\varphi}\vec{k}\wedge\rho\overrightarrow{e_\rho} = at(\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\varphi}\rho\overrightarrow{e_\varphi}) \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{V_e}(M) = at\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + (at\cos\varphi + \dot{\varphi}\rho)\overrightarrow{e_\varphi}}$

- Vitesse absolue $\vec{V}(M/R)$

$\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M/R_2) + \overrightarrow{V_e}(M) = \vec{0} + \overrightarrow{V_e}(M)$

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = at\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + (at\cos\varphi + \dot{\varphi}\rho)\overrightarrow{e_\varphi}}$$

3) l'expression des vecteurs accélération relative $\vec{\gamma_a}(M/R_2)$, d'entrainement $\vec{\gamma_e}$(M) et de Coriolis $\vec{\gamma_c}$(M) . En déduire l'accélération absolue $\vec{\gamma_a}$(M)

- Accélération relative :$\vec{\gamma}(\boldsymbol{M/R_2})$

$$\vec{\gamma}(M/R_2) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R_2)}{dt}\right|_{R_2} = \vec{0}$$

- Accélération d'entrainement $\vec{\boldsymbol{\gamma_e}}$ (M)

$$\vec{\gamma_e}\,(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\Omega}(R_2/R)}{dt}\right|_R \wedge\overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}) \quad \text{Or:} \quad \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_R = a(\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi})$$

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}(R_2/R)}{dt}\right|_R \wedge\overrightarrow{O_1M} = \ddot{\varphi}\,\vec{k_1}\wedge\rho\,\vec{e_\rho} = \rho\,\ddot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}) = \dot{\varphi}\vec{k}(\dot{\varphi}\vec{k}\wedge\rho\vec{e_\rho}) = \dot{\varphi}\vec{k}(\dot{\varphi}\rho\,\vec{e_\varphi}) = -\dot{\varphi}^2\,\rho\,\vec{e_\rho}$$

$$\boxed{\vec{\gamma_e}\,(M) = (a\sin\varphi - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{e_\rho} + (a\cos\varphi + \rho\ddot{\varphi})\vec{e_\varphi}}$$

- L'accélération de Coriolis $\vec{\gamma_c}$(M)

$$\vec{\gamma_c}(M) = 2\,\vec{\Omega}(R_2/R)\wedge\vec{V}(M/R_2) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\gamma_c}(M) = \vec{0}}$$

- -L'accélération absolue $\vec{\gamma_a}$(M)

$$\vec{\gamma_a}(M) = \vec{\gamma}(M/R_2) + \vec{\gamma_e}(M) + \vec{\gamma_c}(M) = \vec{0} + \vec{\gamma_e}(M) + \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\gamma_a}(M) = \vec{\gamma_e}(M)}$$

4) Les expressions des vitesses absolues obtenues en A-3 et 8-2 sont identiques
5) Les expressions de l'accélération absolue obtenue en A-5 et B-3 sont identiques le calcul de l'accélération est indépendant de choix de référentiel

Contrôle N : 1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM

Toutes les bases considérées dans les exercices sont orthonormées directes

Exercice :1

Soient $R_0(O\,X_o\,Y_o\,Z_o)$ un référentiel absolus fixe et $R(O\,X\,Y\,Z_o)$ référentiel relatif en mouvement de rotation de vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ par rapport à $R_0(O\,X_o\,Y_o\,Z_o)$

Un point M décrit un mouvement circulaire dans $R(O\,X\,Y\,Z_o)$ auteur de l'axeOZ_o. M est repéré par ses coordonnées cylindriques (ρ, φ, Z) **(voir figure 1).**

On pose : $\rho = Om = a$ et $Z = \overrightarrow{OH} = b$ où a et b sont des constantes.

1) Rappeler les lois de composition des vitesses et des accélérations?
2) Déterminer dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$

a) Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$
b) Le vecteur rotation de $R(O\,X\,Y\,Z_o)$ par rapport à $R_0(O\,X_o\,Y_o\,Z_o)$.
c) Le vecteur vitesse relative $\overrightarrow{V_r}(M)$.
d) Le vecteur vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}(M)$.
e) Le vecteur vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}(M)$.
f) Le vecteur accélération relative $\overrightarrow{\gamma_r}(M)$.
g) vecteur accélération d'entrainement $\overrightarrow{\gamma_e}(M)$.
h) Le vecteur accélération Coriolis $\overrightarrow{\gamma_c}(M)$.
i) Le vecteur accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}(M)$.

Exercice :2

Un point matériel M de masse m est en mouvement sans frottement sur le plan horizontal XOY d'un référentiel galiléen R(OXYZ). Un opérateur exerce une force de module F dirigée constamment vers le point O.

M est repéré par ses coordonnées (ρ, φ) **(voir figure 2).**

1) Représenter sur un schéma les forces appliquées à M
2) Appliquer le PFD dans le référentiel R et en déduire les deux équations suivantes:

$$\begin{cases} F = m\left(\frac{d^2}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) & (1). \\ 0 = 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} & (2). \end{cases}$$

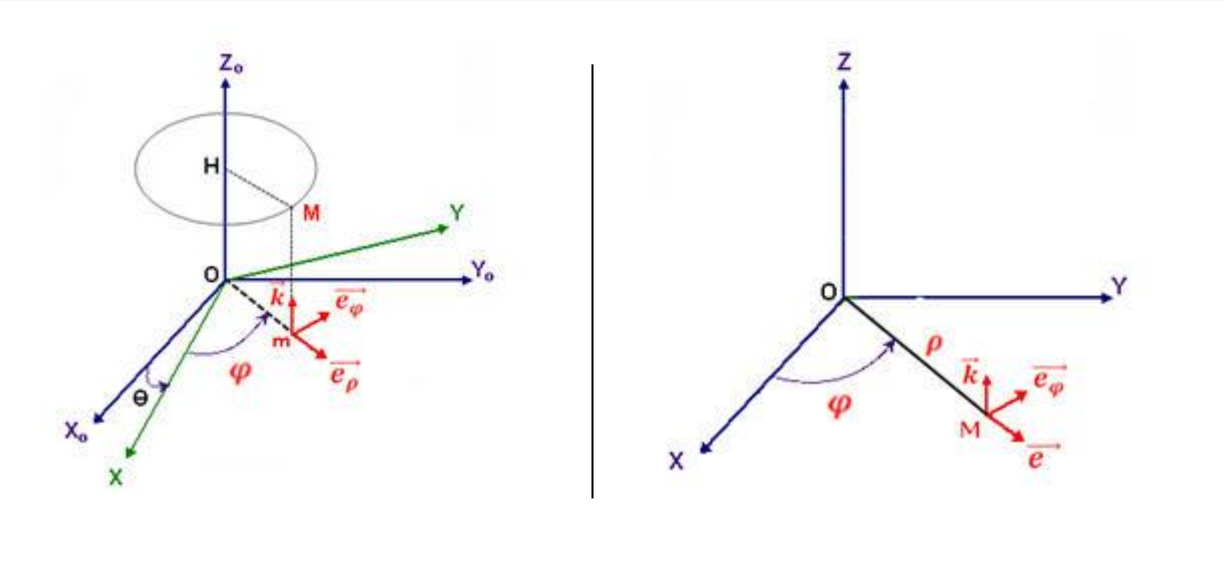
3)

a) En utilisant l'équation (2) montrer que $\rho^2\frac{d\varphi}{dt} = A$ où A est constante.
b) Sachant que les conditions initiales à l'instant $t = 0$ sont les suivantes :
$\rho(t=0) = \rho_o$, $\dot{\rho}(t=0) = \dot{\rho_o}$, $\varphi(t=0) = \varphi_o$ et $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi_o}$ (le point sur les grandeurs indique $\frac{d}{dt}$) en déduire que $A = \rho_o^2\dot{\varphi_o}$

4) On suppose $\dot{\varphi}_o$nulle, $\dot{\rho}_o$nulle et F constant.

a) Etablir l'équation horaire ρ(t) du mouvement du point M.
b) Calculer le temps t_1 qu'il faut à M pour arriver au point O.

5) On suppose $\dot{\varphi}_o$ nulle, $\dot{\rho}_o$ non nulle et la force F nulle. Etablir l'équation horaire ρ(t) du mouvement du point M.



Corrigés de contrôle N : 1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM :

Exercice : 1

Soit $R_0(O\,X_o\,Y_o\,Z_o)$ Un référentiel absolu Et $R(O\,X\,Y\,Z_o)$ Un référentiel relatif

$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{R_o} = \dot{\theta}$, $om = a = cst$ et $\overline{oh} = b = cst$

1) Les lois de compositions des vitesses:

$\vec{V}\left({}^{M}/_{R_o}\right) = \vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) + \vec{V_e}(M)$ Avec $\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$ où O origine de R

$\vec{V_e}(M) = \left.\frac{d(\overrightarrow{OO})}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R/R_o)\Lambda\overrightarrow{OM}$

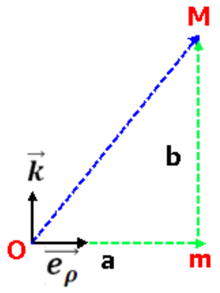
Les lois de coı Figure : 1 accélérations:

Figure : 2

$\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R_o}\right) = \vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) + \vec{\gamma_e}(M) + \vec{\gamma_c}(M)$ avec $\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R$

- $\vec{\gamma_e}(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO}}{dt^2}\right|_{R_o} + \left.\frac{d\vec{\Omega}(R/R_o)}{dt}\right|_R \Lambda\overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(R/R_o)\Lambda\vec{\Omega}(R/R_o)\Lambda\overrightarrow{OM}$
- $\vec{\gamma_c}(M) = 2\vec{\Omega}(R/R_o)\Lambda\vec{V}(M/R)$ où $\vec{V}(M/R)$ est la vitesse relative

2) Déterminons dans la base orthonormée directe $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k})$



c) Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

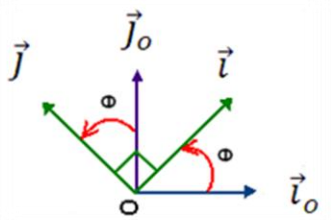
On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$ (relation de shale)

$\overrightarrow{OM} = a\vec{e_\rho} + b\vec{k}$

$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e_\rho} = a\vec{e_\rho}$

$\overrightarrow{mM} = \overrightarrow{OH} = b\vec{k}$

d) Le vecteur rotation $\vec{\Omega}(R/R_o)$



$On\ a : \left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_{R_o} = \vec{\Omega}(R/R_o)\Lambda\vec{\imath} + \left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_R$

$\vec{\imath}$: fixe dans R donc $\left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_R = \vec{0}$ avec $\vec{\imath} = \cos\theta\,\vec{\imath_o} + \sin\theta\,\vec{J_o}$

$\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\vec{\imath_o} + \sin\theta\,\vec{J_o}) = \vec{\Omega}(R/R_o)\Lambda\vec{\imath}$

$\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\vec{\imath_o}) + \frac{d}{dt}(\sin\theta\,\vec{J_o}) = \vec{\Omega}(R/R_o)\Lambda\vec{\imath}$

$\frac{d(\cos\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{\imath_o} + \frac{d(\sin\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{J_o} = \vec{\Omega}(R/R_o)\Lambda\vec{\imath}$

$(-\sin\theta)\dot{\theta}\vec{\imath_o} + (\cos\theta)\dot{\theta}\vec{J_o} = \vec{\Omega}(R/R_o)\Lambda\vec{\imath}$

$\dot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{\imath_o} + \cos\theta\,\vec{J_o}) = \vec{\Omega}(R/R_o)\Lambda\vec{\imath}$

$\dot{\theta}\vec{J} = \vec{\Omega}(R/R_o)\Lambda\vec{\imath} \Rightarrow \dot{\theta}(\vec{k}\Lambda\vec{\imath}) = \vec{\Omega}(R/R_o)\Lambda\vec{\imath} \Rightarrow (\dot{\theta}\vec{k})\Lambda\vec{\imath} = \vec{\Omega}(R/R_o)\Lambda\vec{\imath}$

$R_0(\vec{\imath_o}, \vec{J_o}, \vec{k_o})$: Référentiel absolu

$R(\vec{\imath}, \vec{J}, \vec{k})$: Référentiel relatif

$\dot{\theta}\vec{k} = \vec{\Omega}(R/R_o)$ Finalement on trouve $\vec{\Omega}(R/R_o) = \dot{\theta}\vec{k}$

3) Le vecteur vitesse relative $\vec{V_r}(M)$

$$\vec{V_r}(M) = \vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{d}{dt/R}(a\vec{e_\rho} + b\vec{k})$$

Puisque : $a = constante$ et $\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = \vec{0}$ $car\ \vec{k}\ est\ fixe\ dans\ R$

Alors $\vec{V_r}(M) = \frac{d}{dt/R}(a\vec{e_\rho}) + \vec{0} = a\dot{\varphi}\vec{e_\rho}$ finalement $\boxed{\vec{V_r}(M) = a\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}}$

a) Le vecteur vitesse d'entrainement $\vec{V_e}(M)$

$\vec{V_e}(M) = \left.\frac{d(\overrightarrow{OO})}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\overrightarrow{OM}$ Puisque le piont O fixe dans le Repére R_o et de plus $\overrightarrow{OO} = \vec{0}$

Alors $\left.\frac{d(\overrightarrow{OO})}{dt}\right|_R = \vec{0}$

$\vec{V_e}(M) = \vec{0} + \dot{\theta}\vec{k}\wedge(a\vec{e_\rho} + b\vec{k}) = \dot{\theta}\vec{k}\wedge a\vec{e_\rho} + \dot{\theta}b\vec{k}\wedge\vec{k} = \dot{\theta}a\vec{e_\varphi} + \vec{0}$ Alors $\boxed{\vec{V_e}(M) = a\dot{\theta}\vec{e_\varphi}}$

b) Le vecteur vitesse absolue $\vec{V_a}(M)$

On a $\vec{V_a}(M) = \vec{V_r}(M) + \vec{V_e}(M) = a\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + a\dot{\theta}\vec{e_\varphi} = (a\dot{\varphi} + a\dot{\theta})\vec{e_\varphi} = a(\dot{\varphi} + \dot{\theta})\vec{e_\varphi}$

c) Le vecteur accélération relative $\vec{\gamma_r}(M)$

$$\vec{\gamma_r}(M) = \vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{\vec{V_r}(M)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d}{dt}(a\dot{\varphi}\vec{e_\varphi})\right|_R = a\frac{d}{dt}(\dot{\varphi})\vec{e_\varphi} + a\dot{\varphi}\frac{d\,\vec{e_\varphi}}{dt} = a\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi} - a\dot{\varphi}^2\vec{e_\rho}$$

Finalement $\vec{\gamma_r}(M) = a(\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi} - \dot{\varphi}^2\vec{e_\rho})$

d) Vecteur d'accélération d'entrainement $\vec{\gamma_e}(M)$

$$On\ a\ \vec{\gamma_e}(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO}}{dt^2}\right|_{R_o} + \left.\frac{d\,\vec{\Omega}(R/R_o)}{dt}\right|_R \wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\overrightarrow{OM}$$

$\vec{\gamma_e}(M) = \vec{0} + \ddot{\theta}\vec{k}\wedge(a\vec{e_\rho} + b\vec{k}) + \dot{\theta}\vec{k}\wedge\left(\dot{\theta}\vec{k}\wedge(a\vec{e_\rho} + b\vec{k})\right) = \ddot{\theta}a\vec{e_\varphi} + \dot{\theta}\vec{k}\wedge a\dot{\theta}\vec{e_\varphi}$

$\vec{\gamma_e}(M) = -a\dot{\theta}^2\vec{e_\rho} + \ddot{\theta}a\vec{e_\varphi}$

e) Le vecteur accélération Coriolis $\vec{\gamma_c}(M)$

On a $\vec{\gamma_c}(M) = 2\vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{V}(M/R) = 2\vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{V_r}(M) = 2\dot{\theta}\vec{k}\wedge a\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

$$\boxed{\vec{\gamma_c}(M) = -2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\vec{e_\rho}}$$

- Vecteur d'accélération absolue $\vec{\gamma_a}(M)$

$\vec{\gamma_a}(M) = \vec{\gamma_r}(M) + \vec{\gamma_e}(M) + \vec{\gamma_c}(M) = a(\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi} - \dot{\varphi}^2\vec{e_\rho}) - a\dot{\theta}^2\vec{e_\rho} + \ddot{\theta}a\vec{e_\varphi} - 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\vec{e_\rho}$

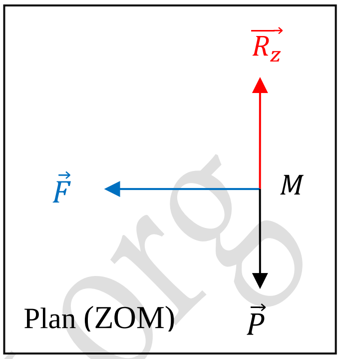
$\vec{\gamma_a}(M) = -a(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2a\dot{\theta}\dot{\varphi})\vec{e_\rho} + a(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta})\vec{e_\varphi}$

$$\boxed{\vec{\gamma_a}(M) = -a(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2\vec{e_\rho} + a(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta})\vec{e_\varphi}}$$

Exercice : 2

$R(O\ X\ Y\ Z)$ est un référentiel galiléen et M en mouvement sans frottement sur le plan (XOY) alors les deux composantes $R_\rho$et R_φ sont nuls ($R_\rho = R_\varphi = 0$)

1) Représentation graphique : sur le plan (ZOM)



- la réaction : $\vec{R} = R_z\vec{k}$
- la force : $\vec{F} = -F\vec{e_\rho}$
- le poids : $\vec{P} = -mg\vec{k}$

2) On applique le PFD dans le référentiel R

$$On\ a: \quad m\vec{\gamma}(M) = \sum \vec{F}_{ext}(M) \implies m\vec{\gamma}(M) = -mg\vec{k} - F\vec{e_\rho} + R_z\vec{k}$$

$$\implies m\vec{\gamma}(M) = -F\vec{e_\rho} + (R_z - mg)\vec{k}$$

Avec $\vec{\gamma}(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d^2(\rho\vec{e_\rho})}{dt^2}\right|_R$

$$\left.\frac{d(\rho\vec{e_\rho})}{dt}\right|_R = \frac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{d^2(\rho\vec{e_\rho})}{dt^2}\right|_R = \frac{d\rho^2}{dt^2}\vec{e_\rho} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{e_\varphi} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\vec{e_\rho}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(M) = \left[\frac{d\rho^2}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e_\rho} + \left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\vec{e_\varphi}}$$

$$Par\ la\ suite: \quad m\left[\frac{d\rho^2}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e_\rho} + m\left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\vec{e_\varphi} = -F\vec{e_\rho} + (R_z - mg)\vec{k}$$

$$m\begin{pmatrix} \frac{d\rho^2}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k}} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ R_z - mg \end{pmatrix} \begin{matrix} \boldsymbol{\vec{e_\rho}} \\ \boldsymbol{\vec{e_\varphi}} \\ \boldsymbol{\vec{k}} \end{matrix}$$

- la projection sur $\boldsymbol{\vec{e_\rho}}$

$$\vec{e_\rho}\left\{m\left[\frac{d\rho^2}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e_\rho} + m\left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\vec{e_\varphi}\right\} = \vec{e_\rho}.\{-F\vec{e_\rho} + (R_z - mg)\vec{k}\}$$

$$F = -m\left[\frac{d\rho^2}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]$$

- la projection sur $\boldsymbol{\vec{e_\varphi}}$

$$\vec{e_\varphi}\left\{m\left[\frac{d\rho^2}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e_\rho} + m\left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\vec{e_\varphi}\right\} = \vec{e_\varphi}.\{-F\vec{e_\rho} + (R_z - mg)\vec{k}\}$$

$$m\left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right] = 0 \implies 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

3)

a) Montrons que $\boldsymbol{\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = A}$

Première méthode :

On a $2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$ équation(3)

Équation (3) $\times \boldsymbol{\rho} \Rightarrow$ $\boldsymbol{2\rho\frac{d\rho}{dt}}\frac{d\varphi}{dt} + \rho^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\frac{d}{dt}}(\rho^2).\frac{d\varphi}{dt} + \rho^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$

$$Si\ on\ pose:\ \rho^2 = f\ \ et\ \ \frac{d\varphi}{dt} = g\ on\ constate\ que\ \dot{f}.g = f.\dot{g} = (f.g)^{\cdot}$$

Donc $\frac{d}{dt}\left(\rho^2.\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0 \Rightarrow \int\left(\frac{d}{dt}\left(\rho^2.\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0\right) \Rightarrow \rho^2.\frac{d\varphi}{dt} = A$ ou A est une constante

Deuxième méthode

On a $\rho^2\frac{d\varphi}{dt} = A \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\rho^2.\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{A} \Rightarrow 2\rho\boldsymbol{\frac{d\rho}{dt}}\frac{d\varphi}{dt} + \rho^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \Rightarrow 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$

b) en déduire que $A = \rho_o^2\dot{\varphi}_o$

$On\ a:\ A = \rho^2\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \rho^2\dot{\varphi} = A$

$Pour\ t = 0\ on\ a:\ \rho(t=0) = \rho_o \Rightarrow \rho^2(t=0) = {\rho_o}^2\ et\ \dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_o$ Donc $A = {\rho_o}^2\,\dot{\varphi}_o$

4) On suppose $\dot{\varphi}_o$ nulle, $\dot{\rho}_o$ nulle et F constant.

$$\dot{\varphi}_o = \dot{\rho}_o = 0\ \ et\ \ F = Cst$$

$L'équation\ horaire\ \rho(t)\ du\ mouvement\ du\ point\ M$

$On\ a\ \rho^2\frac{d\varphi}{dt} = A = \rho_0^2\,\dot{\varphi}_0 = 0 \Rightarrow \rho^2 = 0\ ou\ \frac{d\varphi}{dt} = 0\ \ avec\ \rho(t) \neq 0$

On remplace $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ dans (1) on trouve $F = -m\frac{d^2\rho(t)}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\rho(t)}{dt^2} = -\frac{F}{m}$ $avec\ F = Cst$

$$Alors\ \frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{F}{m}t + C_1 \qquad \left|Si\ t = 0\ \dot{\rho_o}(0) = 0 \Rightarrow C_1\ \right|$$

$$\Rightarrow \rho(t) = -\frac{F}{m}t^2 + C_2$$

Contrôle N : 1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2009-2010 FSSM :

Toutes les bases considérées sont orthonormées directes

Exercices 1 :

Soit $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ (ou $R(O,x,y,z)$) un référentiel

Soit M un point matériel se déplacant dans le référentiel R le long d'une courbe d'équations p aramétriques :

$$x(t) = 0{,}3\cos(\omega t) \quad ; \quad y(t) = 0{,}3 sin(\omega t) \quad ; \quad z(t) = 0{,}1\omega t\,.$$

Où $\omega = 2\pi\, rad.s^{-1}$ L'unité de longueur est le centimètre.

1) Exprimer dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$: le vecteurposition $\overrightarrow{OM}$,le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ et le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$.
2) Calculer les normes $\|\vec{V}(M/R)\|$ et $\|\vec{\gamma}(M/R)\|$.
3) Exprimer, dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, les vecteus $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ de la base de Frenet.
4) Calculer le rayon de courbure R_C .

Exercice 2 :

Un anneau assimilé à un point matériel M de masse m coulisse sans frottement sur un axe $O\Delta$ L'axe $O\Delta$ est horizontal et en rotation à vitesse angulaire constant ω autour d'un axe vertical OZ .Soit $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ le référentiel du labaratoire supposé galiléen et soit $R_1(O,\overrightarrow{e\rho},\overrightarrow{e\varphi},\vec{k})$ le référentiel lié à l'axe $O\Delta$ M est repéré par ses coordonnées polaire ρ et φ .(Voir figures)

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la se $(\overrightarrow{e\rho},\overrightarrow{e\varphi},\vec{k})$

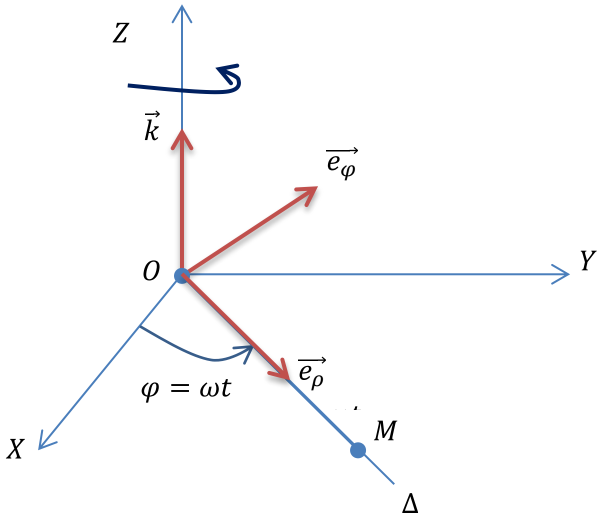
C. Etude dans le référentiel R_1

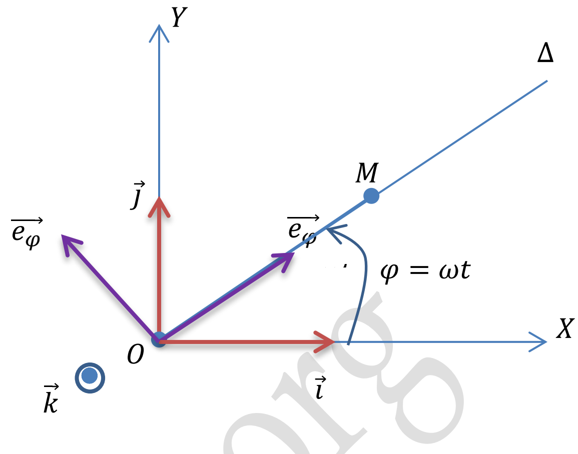
1) Quelles sont les forces appliquées à M dans le référentiel R_1 ?
2) Ecrire chacune de ces forces dans la base $(\overrightarrow{e\rho},\overrightarrow{e\varphi},\vec{k})$.
3) Calculer $\vec{\gamma}(M/R_1)$; vecteur accélération de M par rapport au référentiel R_1
4) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (PFD) dans le référentiel R_1.
5) Par projection du (PFD) suivant $\vec{\rho}$ déduire l'équation différentielle du mouvement.

D. Etude dans le référentiel R :

1) Calculer $\vec{\gamma}(M/R_1)$; vecteur accélération de M par rapport au référentiel R
2) Ecrire, sous forme vectorielle, le principe fondamental de la dynamique (PFD) dans le référentiel R.

3) En déduire l'équation différentielle du mouvement.





Corrigés de contrôle N : 1 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2009-2010 FSSM

Exercices 1 :

Soit $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un référentiel

1) Vecteur position $\overrightarrow{OM} = 0{,}3cos(\omega t)\vec{\imath} + 0{,}3\sin(\omega t)\,\vec{\jmath} + 0{,}1\omega t\vec{k}$

- Vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$: $\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(0{,}3cos(\omega t)\vec{\imath}+0{,}3\sin(\omega t)\vec{\jmath}+0{,}1\omega t\vec{k})}{dt}\right|_R$

$$= 0{,}3\,\omega\sin(\omega t)\,\vec{\imath} + 0{,}3\omega cos(\omega t)\vec{\jmath} + 0{,}1\omega\vec{k}$$

On a $\left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{\jmath}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = 0\ car\ \vec{\imath},\vec{\jmath} et\ \vec{k}\ \ sont\ fixe\ dan\ R$

- Vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$

: $\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(0{,}3\,\omega\sin(\omega t)\vec{\imath}+0{,}3\omega cos(\omega t)\vec{\jmath}+0{,}1\omega\vec{k})}{dt}\right|_R$

Alors : $\vec{\gamma}(M/R)\ = -0{,}3\,\omega^2cos(\omega t)\,\vec{\imath} + 0{,}3\omega^2 sin(\omega t)\vec{\jmath}$

2) Les normes $\|\vec{V}(M/R)\|\ et\ \|\vec{\gamma}(M/R)\|$:

$$\|\vec{V}(M/R)\| = \sqrt{(0{,}3\,\omega\sin(\omega t))^2 + \left(0{,}3\omega cos(\omega t)\right)^2 + (0{,}1\omega)^2}$$

$= \sqrt{(0{,}3\omega)^2(\sin^2\ (\omega t) + \cos^2(\omega t))\ + (0{,}1\omega)^2} =$
$\sqrt{(0{,}3\omega)^2 + (0{,}1\omega)^2} = \omega\sqrt{0{,}09 + 0{,}01}$

$$\|\vec{V}(M/R)\| = \omega\sqrt{0{,}1}$$

A.N : $\boldsymbol{\omega = 2\pi rad/s\ \ et\ \ \|\vec{V}(M/R)\| m/s}$

$$\|\vec{\gamma}(M/R)\| = \sqrt{(0{,}3\,\omega^2\ cos(\omega t))\ ^2 + (0{,}3\omega^2 sin(\omega t))^2}$$
$$= \sqrt{(0{,}3\omega^2)^2\cos^2(\omega t) + (0{,}3\omega^2)^2\sin^2(\omega t)}$$
$$\|\vec{\gamma}(M/R)\| = \sqrt{(0{,}3\omega^2)^2} = (0{,}3\omega^2)$$

A.N : $\boldsymbol{\omega = 2\pi}$rad/s

3) les vecteus $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ de la base de Frenet

- Vecteur tangentiel $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}\left(\frac{M}{R}\right)}{\|\vec{V}(M/R)\|} = \frac{0{,}3\,\omega\sin(\omega t)\,\vec{\imath} + 0{,}3\omega cos(\omega t)\vec{\jmath} + 0{,}1\omega\vec{k}}{\omega\sqrt{0{,}1}}$$
$$\vec{\tau} = \frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}1}}sin(\omega t)\vec{\imath} + \frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}1}}cos(\omega t)\vec{\jmath} + \frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}1}}\vec{k}$$

- Vecteur normal $\vec{n}$

On a : $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$ trièdre direct $\Longrightarrow \vec{b}=\vec{\tau}\wedge\vec{n}=\vec{k}\ \Longrightarrow \vec{n}=\vec{k}\wedge\vec{\tau}\ \vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-\frac{0,3}{\sqrt{0,1}}sin(\omega t)\\ \frac{0,3}{\sqrt{0,1}}cos(\omega t)\\ \frac{0,3}{\sqrt{0,1}}\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}\frac{0,3}{\sqrt{0,1}}cos(\omega t)\\ \frac{0,3}{\sqrt{0,1}}sin(\omega t)\\ 0\end{pmatrix}$ Alors : $\vec{n}=\frac{0,3}{\sqrt{0,1}}(sin(\omega t)\vec{\imath}+cos(\omega t)\vec{\jmath})$

4) Le rayon de courbure R_C

✘ Méthode 1

On a le rayon de courbure définie par : $R_C=\frac{\|\vec{V}\|^3}{\|\vec{\gamma}(M/R)\wedge\vec{V}(M/R)\|}$

$$\vec{\gamma}(M\ /R)\wedge\vec{V}(M\ /R)=\begin{pmatrix}-0,3\omega^2\cos\omega t\\ -0,3\omega^2\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-0,3\omega\sin\omega t\\ 0,3\omega\cos\omega t\\ 0,1\omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,1\times 0,3\omega^3\\ 0,1\times 0,3\omega^3\cos\omega t\\ -(0,3)^2\omega^3\cos^2\omega t+(0,3)^2\omega^3\sin^2\omega t\end{pmatrix}$$

✘ Méthode 2 :

On a $\left\|\vec{\gamma_n}(M)\right\|=\frac{\left\|\vec{V}(M\ /R)\right\|^2}{R_c}$

On a : $\vec{\gamma}(M\ /R)=-0,3\omega^2\cos\omega t\,\vec{i}-0,3\omega^2\sin\omega t\,\vec{j}$

$\vec{\gamma}(M\ /R)=\vec{\gamma_\tau}(M)+\vec{\gamma_n}(M)=\gamma_\tau\vec{\tau}+\gamma_n\vec{n}$

Donc : $\gamma_n=\vec{n}\cdot\vec{\gamma}(M\ /R)$ Avec $\vec{n}=\frac{0,3}{\sqrt{0,1}}(\cos\omega t\,\vec{i}+\sin\omega t\,\vec{j})$

$$\gamma_n=\vec{n}\cdot\vec{\gamma}(M\ /R)=\begin{pmatrix}\frac{0,3}{\sqrt{0,1}}\cos\omega t\\ \frac{0,3}{\sqrt{0,1}}\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0,3\omega^2\cos\omega t\\ -0,3\omega^2\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\gamma_n=\frac{(0,3)^2\omega^2}{\sqrt{0,1}}\cos^2\omega t+\frac{(0,3)^2\omega^2}{\sqrt{0,1}}\sin^2\omega t=\frac{(0,3)^2\omega^2}{\sqrt{0,1}}(\underbrace{\cos^2\omega t+\sin^2\omega t}_{1})=\frac{(0,3)^2\omega^2}{\sqrt{0,1}}$$

$$\gamma_n=\frac{(0,3)^2\omega^2}{\sqrt{0,1}}$$

Et $\left\|\vec{V}(M/R)\right\| = \omega\sqrt{0,1} \Rightarrow \left\|\vec{V}(M/R)\right\|^2 = \omega^2 \times 0,1 \Rightarrow R_c = \dfrac{\left\|\vec{V}(M/R)\right\|^2}{\gamma_n} = \dfrac{\omega^2 \times 0,1 \times \sqrt{0,1}}{0,3\omega^2}$

$$R_C = \frac{0,1 \times \sqrt{0,1}}{0,3}$$

Exercice 2 :

- Un point matériel de masse **m**
- **Coulisse** sans frottement sur $O\Delta \Rightarrow R_\rho = 0$
- $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le référentiel du laboratoire supposé Galiléen
- $R_1(O,\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$ le référentiel lié à l'axe $(O\Delta)$
- $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e_\rho}$

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$

E. Etude dans le référentiel R_1 :

1) Les forces appliquées à M dans R_1 sont :

- Le poids $\vec{P}$
- Frottement $\vec{R}$
- Les forces d'inertie $\vec{F}_{ic}, \vec{F}_{ie}$

2) Les expressions des forces dans la base $(\vec{e\rho},\vec{e\varphi},\vec{k})$.

- On a : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$
- Frottement : $\vec{R} = R_\rho\vec{e_\rho} + R_\varphi\vec{e_\varphi} + R_z\vec{k}$

Comme le point matériel M coulisse sans frottement sur $O\Delta$ et le vecteur directeur de $O\Delta$ est $\vec{e_\rho}$ donc la composante de $\vec{R}$ suivant $\vec{e_\rho}$ est nul ($R_\rho = 0$)

$$\Rightarrow \vec{R} = R_\varphi\vec{e_\varphi} + R_z\vec{k}$$

- forces d'inertie

  - Force de Coriolis $\vec{F}_{ic}$

On a $\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c(M)$ avec $\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}(M/R_1)$

On a $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k} = \omega\vec{k}$ (car $\varphi = \omega t \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega$) et $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e_\rho}$

$$\vec{V}(M/R_1)=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R_1}=\left.\frac{d\,\rho\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{R_1}=\dot{\rho}\vec{e}_\rho+\rho\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{R_1} \rightarrow 0 \text{ (car } \vec{e}_\rho \text{ est fixe dans } R_1)$$

$$\Rightarrow \vec{V}(M/R_1)=\dot{\rho}\vec{e}_\rho$$

Donc $\vec{F}_{ic}=-m(\omega\vec{k})\wedge(\dot{\rho}\vec{e}_\rho)=-m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\varphi$ (Car $\vec{k}\wedge\vec{e}_\rho=\vec{e}_\varphi$)

$$\vec{F}_{ic}=-m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\varphi$$

✖ Force d'entrainement $\vec{F}_{ie}$:

Origine de R_1

On a : $\vec{F}_{ie}=-m\vec{\gamma}_e(M)$ Avec $\vec{\gamma}_e(M)=\left.\frac{d\overrightarrow{OO}}{dt}\right|_R+\left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R\wedge\overrightarrow{OM}+\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM})$

R

$\vec{\Omega}(R/R_1)=\omega\vec{k} \Rightarrow \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}(R/R_1)\right|_R$ et $\left.\frac{d\overrightarrow{OO}}{dt}\right|_R=\vec{0}$

Alors : $\vec{F}_{ie}=-m\omega\vec{k}\wedge(\omega\vec{k}\wedge\rho\vec{e}_\rho)=-m\omega\vec{k}\wedge(\omega\rho\vec{e}_\varphi)$ (car $(\vec{k}\wedge\vec{e}_\varphi)=-\vec{e}_\rho$)

$$\vec{F}_{ie}=+m\omega^2\rho\vec{e}_\rho$$

3) Le principe fondamentale de la dynamique dans R_1 :

$$m\vec{\gamma}(M/R_1)=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_{ic}+\vec{F}_{ie}$$

Avec $\vec{\gamma}(M/R_1)=\left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{R_1}=\left.\frac{d^2(\rho\vec{e}_\rho)}{dt^2}\right|_{R_1}=\left.\frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{e}_\rho)\right|_{R_1}$

$\vec{\gamma}(M/R_1)=\ddot{\rho}\vec{e}_\rho$ ($\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{R_1}=\vec{0}$ Car $\vec{e}_\rho$ est fixe dans R_1)

$$\Rightarrow m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho=-mg\vec{k}+R_\varphi\vec{e}_\varphi+R_z\vec{k}-m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\varphi+m\omega^2\rho\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho=m\omega^2\rho\vec{e}_\rho+(R_\varphi-m\omega\dot{\rho})\vec{e}_\varphi+(R_z-mg)\vec{k} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})}=\begin{pmatrix} m\omega^2\rho \\ (R_\varphi-m\omega\dot{\rho}) \\ (R_z-mg) \end{pmatrix}_{(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})} \Rightarrow \begin{pmatrix} m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})}=\begin{pmatrix} m\omega^2\rho \\ (R_\varphi-m\omega\dot{\rho}) \\ (R_z-mg) \end{pmatrix}_{(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})}$$

4) La projection du PFD suivant $\vec{e}_\rho$:

$$m\vec{\gamma}(M/R_1)=\vec{e}_\rho\cdot(\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_{ic}+\vec{F}_{ie})$$

$$=\vec{e}_\rho\cdot\left[m\omega^2\rho\vec{e}_\rho+(R_\varphi-m\omega\dot{\rho})\vec{e}_\varphi+(R_z-mg)\vec{k}\right]$$

$$=m\omega^2\rho\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_\rho+(R_\varphi-m\omega\dot{\rho})\vec{e}_\rho\cdot\underbrace{\vec{e}_\varphi}_{0}+(R_z-mg)\vec{e}_\rho\cdot\underbrace{\vec{k}}_{0}$$

Avec $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = 1$ et $\begin{cases} \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \\ \vec{e}_\rho \cdot \vec{k} = 0 \end{cases}$ car $\begin{cases} \vec{e}_\rho \perp \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_\rho \perp \vec{k} \end{cases}$

$$\Rightarrow m\ddot{\rho} = m\omega^2\rho \Rightarrow \ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0$$

F. Etude dans le référentiel R (Galiléen)

1) L'accélération de M par rapport à référentiel R

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R \quad \text{Avec } \overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\rho\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d}{dt}\left(\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R\right)\right|_R = \left.\frac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi)}{dt}\right|_R \qquad Or: \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad et \quad \left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_R = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi)}{dt}\right|_R = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R + \dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi + \rho\omega\left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_R$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi - \rho\omega\dot{\varphi}\vec{e}_\rho = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi - \rho\omega^2\vec{e}_\rho = (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$$

2) PFD dans R

$$m\vec{\gamma}(M/R) = \sum \vec{F}_{réelles} \qquad \text{R : Galiléen}$$

$$m\left[(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi\right] = -mg\vec{k} + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{k} = R_\varphi\vec{e}_\varphi + (R_z - mg)\vec{k}$$

$$Alors: m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2m\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi = R_\varphi\vec{e}_\varphi + (R_z - mg)\vec{k}$$

3) L'équation différentielle du mouvement

Pour trouver cette équation, il faut faire une projection sur un vecteur de telle sorte éliminer les composantes de réaction.

$$\Rightarrow \vec{e}_\rho \cdot m\vec{\gamma}(M/R) = \vec{e}_\rho \cdot \sum \vec{F}_{réelles} \Rightarrow m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) + 0 = 0 + 0 \quad \Rightarrow \ddot{\rho} - \rho\omega^2 = 0$$