Chapitre I: Rappels & compléments mathématiques

I- L'analyse dimensionnelle

Cette partie du cours a pour rôle de souligner l'importance des unités et des dimensions en Sciences Physiques qui donnent une structure précise à toutes les formules littérales.

I- L'analyse dimensionnelle

1- Unités et dimensions

Les Sciences Physiques font appel à des grandeurs qui peuvent être mesurées ou repérées.

La mesure ou repérage d'une grandeur, c'est **la comparer** à une quantité de référence de **même nature** prise comme unité qui en précise la nature.

1- 1- Le système international d'unités

Le **Système international d'unités** (abrégé en **SI**) est le système d'unités le plus largement employé au monde. C'est la conférence générale des poids et mesures qui décide de son évolution, tous les quatre ans.

1- 2- les unités de base

Le système international a pour objet une meilleure uniformité, donc une meilleure compréhension générale mutuelle. Le SI est fondé sur un choix de **sept unités de base** bien définies et considérées par convention comme indépendantes du point de vue dimensionnel : le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le kelvin, la mole et la candela.

Unités	Symboles	Définitions
Mètre (1983)	**m**	Le mètre est une unité de **longueur** qui est calibrée par « la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299792458 secondes ».
Kilogramme (1901)	**kg**	Le kilogramme est une unité de **masse** qui est calibré par « la masse du prototype international en platine iridié, sanctionné par la conférence générale des poids et mesures en 1889 et déposé au bureau international des poids et mesures ».
Seconde (1967)	**s**	La seconde est une unité de **temps** qui est calibrée par « la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 ».
Ampère (1946)	**A**	L'ampère est une unité d'**intensité de courant** qui est calibrée par « un courant constant qui produit une force de 2.10^{-7} newton par mètre de longueur ». Ce courant doit être « maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide ».
Kelvin (1967)	**K**	Le kelvin est une unité de **température thermodynamique** qui est calibré par « la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau ».
Mole (1971)	**mol**	La mole est une unité de **quantité de matière d'une entité élémentaire donnée** (atome, ion, molécule, électron, …, ou des groupements spécifiés de telles particules.) qui est calibrée par « la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12 ».

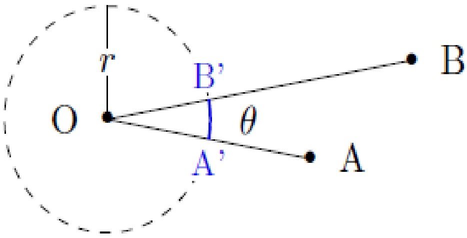
Candela (1971)	**cd**	La candela est une **unité d'intensité lumineuse** qui est calibrée par « l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540.10^{12} hertz et dont l'intensité énergique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian ».

Tableau 1 : les unités de base

Remarque

Il existe également des grandeurs physiques sans dimension (on dit aussi adimensionnées). Dans ce cas la dimension est noté **[G] = 1**. Par exemple, l'angle **θ** d'un secteur **AOB** est une grandeur que l'on peut mesurer comme suit : traçons un cercle de centre **O** et de rayon **r**. Les droites **(OA)** et (OB) coupent le cercle en deux points A′ et B′. L'angle se mesure en faisant le rapport de la longueur d'arc A′B′ et du rayon du cercle.

$$\theta \equiv \frac{\widehat{A'B'}}{r}$$



On constate donc que si l'on double le rayon du cercle, la longueur d'arc double également de sorte que l'angle ne dépend pas de la taille du cercle. Il est alors assez évident que si l'on décide de mesurer les distances en centimètre, en pouce, ou dans n'importe quel système d'unités, le résultat de l'angle θ ne changera pas. L'angle est donc sans dimension. De la même manière, une grandeur définie comme le rapport de deux grandeurs de même dimension, ne présente pas de dimension.

On note que cette classe contient deux unités sans dimension :

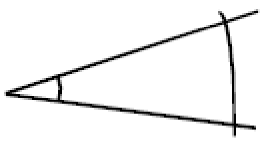
Unités	Symboles		Définitions
le radian (1965)	rad	Angle plan : α, β, …, θ, …  $\text{Angle} = \dfrac{\textit{longueur arc découpé sur un cercle}}{\textit{longueur du rayon de ce cercle}}$	**Radian : [rad]** le radian est l'angle compris entre 2 rayons qui interceptent, sur un cercle donné, un arc de longueur égale à celle du rayon. **1 tour correspond à 2π rad**
le stéradian (1965)	sr	Angle solide : ω ou Ω  $\text{Angle} = \dfrac{\textit{aire découpé sur une sphère}}{\textit{aire du carré de côté égal au rayon}}$	**Stéradian : [sr]** le stéradian est l'angle solide qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpe sur la surface de cette sphère, une aire égale à celle d'un carré de côté égal au rayon de cette sphère. **1 tour correspond à 4π sr**

Tableau 2 : les unités supplémentaires

1- 3- les unités dérivées

Les **unités dérivées** sont formées en combinant les unités de base d'après les relations algébriques qui lient les grandeurs correspondantes.

Exemple: l'unité de vitesse du système international, le mètre par seconde.

Parfois, on utilise des noms et des symboles spéciaux pour exprimer les dérivées.

Exemple: mille, angström (échelle atomique) ou le mile marin au lieu de mètre

La valeur de l'unité n'est pas toujours adaptée à l'ordre de grandeur du résultat numérique d'une mesure ou d'un calcul. On peut alors, pour exprimer ce résultat, utiliser un **multiple ou sous-multiple** de l'unité (voir tableau des préfixes).

Les multiples			Les sous-multiples		
Facteur	Préfixe		Facteur	Préfixe	
	Nom	Symbole		Nom	Symbole
10	déca	da	10^{-1}	déci	d
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^{6}	méga	M	10^{-6}	micro	µ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	Téra	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	péta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepta	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Tableau 3 : les préfixes du système international d'unités

Conventions d'écriture

i- Écriture des unités

Les noms d'unités sont des noms communs : donc pas de majuscule et variation au pluriel. Si les noms d'unités composées sont séparés par un trait d'union, les deux noms s'accordent. Exemple : des newtons-mètres mais des voltampères.

Noms d'unités avec des préfixes: Le préfixe est accolé au nom de l'unité. Si le nom de l'unité commence par une voyelle, il peut y avoir élision (mégohm et pas mégaohm).

ii- Écriture des symboles des unités

Ils s'écrivent en principe en minuscule sauf s'ils dérivent d'un nom propre (Ampère, Newton) Ils sont toujours invariables.

Quand les symboles sont préfixés, le préfixe doit être collé au symbole. Il faut écrire hPa et non pas HPa.

Pour les quotients, on peut écrire m/s^2 ($m.s^{-2}$) mais pas m/s/s.

iii- Écriture des valeurs numériques

Il préférable de séparer un nombre décimal par la virgule.

Le nom ou le symbole de l'unité est écrit à la fin de la valeur numérique :

Il faut écrire 12,54 W et pas 12 W 54.

iv- Écrire un nombre de décimales compatible avec la précision de la mesure

Pour une mesure réalisée avec une précision de 10^{-2} écrire 5,23 et pas 5,2289.

Les multiples sont généralement choisis de telle sorte que la valeur numérique soit comprise entre 0,1 et 1000.

Dans les calculs, pour éviter des erreurs, remplacer les préfixes par des puissances de 10 (Ex : I = 45 mA = 45.10^{-3} A).

Lors du processus de mesure (mesurage) on effectue donc une comparaison entre un étalon (l'unité) et la grandeur à mesurer puis l'on traduit le résultat par un chiffre (la mesure) assortie d'un intervalle définissant un certain niveau de confiance (l'incertitude) ainsi que l'unité (L'unité est indispensable! Exprimer le résultat d'un calcul ou d'une mesure sans préciser l'unité n'a aucun sens.).

$$\mathbf{X = x_m \pm \Delta x} \qquad \textbf{unité}$$

2- Grandeurs physiques et dimensions

2- 1- Grandeurs physiques

On appelle **grandeur physique ;** toute propriété de la nature qui peut être repérée ou quantifiée par la mesure ou le calcul. Cette propriété peut être de nature scalaire ou vectorielle :

i- Grandeurs scalaires : sont toujours exprimées par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante.

Exemple : le volume, la masse, la température, la charge électrique, l'énergie….

ii- Grandeurs vectorielles : toute grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application en plus de sa valeur numérique appelée intensité ou module. Géométriquement, elle est représentée par un vecteur.

Exemple : le déplacement, la vitesse, la force, le champ électrique….

Les grandeurs physiques qui décrivent un phénomène sont caractérisées par leurs **dimensions**.

2- 2- Notion de dimension d'une grandeur physique

Comme on vient de le voir, la notion de dimension est bien plus générale, plus fondamentale -en un mot, plus physique ! - que la notion d'unité. La dimension d'une grandeur renseigne sur sa nature physique, son unité est nécessaire pour en effectuer une mesure quantitative.

Bien que les deux (unité et dimension) soient liées, il importe de faire la distinction entre la dimension d'une grandeur physique et son unité. En effet, deux grandeurs de même espèce ont même dimension mais peuvent avoir des unités différentes.

Par exemple une distance a pour dimension une longueur mais peut s'exprimer dans différentes unités : mètre, mille, parsec (échelle astronomique), angström (échelle atomique) ou le mile marin.

La dimension de la grandeur G se note [G].

Le système international d'unités définit sept unités fondamentales, associées justement aux sept grandeurs de base. Chaque grandeur de base est associée à une dimension qui possède un **symbole** *(voir tableau 4)*.

Grandeur	Symbole de la dimension associée	Unité SI
Longueur : L Largeur : l Hauteur : h Epaisseur : e Rayon : r Diamètre : D Longueur curviligne : s	**L**	mètre (m)
Masse : m	**M**	kilogramme (kg)
Temps : t Intervalle de temps : Δt Période : T Constante de temps : τ	**T**	seconde (s)
Intensité du courant électrique : I, i	**I**	ampère (A)
Température absolue : T Température Celsius : θ, t θ = T-To avec To = 273,15 K	**θ**	kelvin (K)
Quantité de matière : N	**N**	mole (mol)
Intensité lumineuse : I	**J**	candela (Cd)

Tableau 4 : Les sept grandeurs fondamentales du système international d'unités

De même que les unités deux grandeurs supplémentaires ont été introduites pour assurer la cohérence du système : L'angle plan et l'angle solide.

Toutes les autres grandeurs mesurables (grandeurs **dérivées)** sont liées à ces grandeurs fondamentales. Alors, les dimensions de ces grandeurs dérivées sont déterminées à partir du sept dimensions de base dont on connaît.

Exemples :

Si G est une masse, alors [G] = M, elle a la dimension d'une masse; on dit aussi qu'elle est homogène à la masse.

Si G est la vitesse : d'après la définition $V = \frac{d}{t}$, on déduit $[v] = LT^{-1}$

Si G est l'accélération : la définition $\gamma = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ $\Longrightarrow$ $[\gamma] = \frac{[\Delta V]}{[\Delta t]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$

Si G est la force : en vertu de la deuxième loi de Newton F = mγ

$\Longrightarrow$ [F] = [m][a] = M LT^{-2} = LMT^{-2}

Si G est la pression : d'après la définition $p = \frac{F}{S}$ $\Longrightarrow$ $[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{LMT^{-2}}{L^2} = L^{-1}MT^{-2}$

Si G est la constante des gaz parfaits : on peut obtenir sa dimension à partir de la loi des gaz parfait : $pV = nRT$

$$[R] = \frac{[p][V]}{[n][T]} = \frac{[F]}{L^2}\frac{L^3}{N\theta} = \frac{\mathrm{LMT}^{-2}}{L^2}\frac{L^3}{N\theta} = ML^2T^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$$

Ces relations correspondent à ce qu'on appelle **l'équation aux dimensions** de la grandeur G.

3- L'analyse dimensionnelle

L'**analyse dimensionnelle** est un outil théorique servant à interpréter les problèmes à partir des dimensions des grandeurs physiques mises en jeu, elle est utilisée particulièrement en physique, en chimie et en ingénierie.

3- 1- utilités de l'analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet de :

i- Vérifier a priori la viabilité d'une équation ou le résultat d'un calcul.

ii- Formuler des hypothèses simples sur les grandeurs qui gouvernent l'état d'un système physique avant qu'une théorie plus complète ne vienne valider ces hypothèses ;

iii- Vérifier l'homogénéité d'une formule ;

L'analyse dimensionnelle est un outil très puissant pour vérifier l'homogénéité d'une expression littérale en physique. Elle nous permet de détecter efficacement une erreur de calcul.

Par souci de clarté, on doit conduire tous les calculs sous forme littérale en conservant les symboles des différentes grandeurs physiques. On ne réalise d'application numérique que lorsque le calcul littéral est terminé. Ceci permet de juger l'homogénéité d'une formule.

Une équation est homogène lorsque ses deux membres ont la même dimension.

Ecrire une formule non homogène est une erreur grave.

Toute formule inhomogène est nécessairement fausse, la réciproque étant fausse.

iv- Rechercher la nature des relations entre des grandeurs physiques liées.

3- 2- Equation aux dimensions

Une loi physique affirme l'égalité de deux grandeurs qui sont nécessairement de même nature. Une loi physique est donc aussi une relation entre différentes dimensions :

on parle d'équation aux dimensions. On cite ici quelques règles de l'équation aux dimensions.

i- Pour écrire l'équation aux dimensions de la grandeur G, aucun choix de système d'unités n'est imposé.

Exemple: une distance d a la dimension d'une longueur: [d] = L; mais elle peut s'exprimer en mètres, en pouces,… etc.

ii- Si [G] =1, la grandeur est dite sans dimension ou de dimension 1 *(ou adimensionnée).*

iii- Pour comparer, ajouter, soustraire deux grandeurs physiques, il faut qu'elles aient la même dimension.

iv- Un vecteur ne peut être ajouté qu'à un vecteur et non à un scalaire.

v- La dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune des grandeurs: $[AB] = [A][B]$;

vi- La dimension de A^n est égale à $[A]^n$ où n est un nombre sans dimension ;

vii- Pour les fonctions suivantes: sin(u), cos(u), tan(u), ln(u), log(u) et e^u, la grandeur u est sans dimension (elle est dite ***adimensionnée***) ;

viii- On doit éviter de remplacer le symbole d'une grandeur par sa valeur numérique.

ix- L'équation aux dimensions de toute grandeur G peut se mettre sous la forme: $[G] = L^a M^b T^c I^d J^e \theta^f N^g$

Le principe fondamental en physique, on ne compare que des grandeurs homogènes (Les dimensions des termes d'une expression sont égales).

II- Calcul des incertitudes

II- Calcul des incertitudes

1- Notion de mesure

La mesure de toute grandeur physique ne peut résulter qu'une valeur approchée et ce pour les raisons suivantes :

- Les erreurs systématiques : Ce sont celles qu'entraîne l'emploi de méthodes ou d'instruments imparfaits.

Dans toutes les mesures précises, les erreurs systématiques sont autant que possible éliminées par un contrôle soigneux des instruments de mesure et, souvent aussi, par l'emploi successif de différentes méthodes.

- Les erreurs accidentelles qui sont imputables à l'imperfection des sens de l'opérateur.

Ces erreurs peuvent être minimisées par le bon choix des méthodes de mesure appropriées, des instruments perfectionnés et en s'exerçant à la pratique des mesures.

En résumé le résultat de toute mesure comporte une erreur !!

Quelque soit la précision de la mesure d'une grandeur X, nous n'obtenons qu'une valeur approchée $\boldsymbol{x}$. La différence entre la valeur exacte et la valeur approchée s'appelle **erreur absolue** qu'on désigne par δx.

$$\boldsymbol{\delta x = x - x_0}$$

Cette erreur est en général inconnue. Partant des caractéristiques de l'appareil utilisé et de la méthode utilisée, nous pouvons toujours nous assurer que l'erreur commise ne dépasse pas une valeur limite absolue connue sous le nom de l'**incertitude absolue** de la grandeur **X**.

$$\boldsymbol{|\delta x| \leq \Delta x}$$

Nous déduisons que la valeur exacte est comprise entre deux valeurs limites connues : $x - \Delta x$ et $x + \Delta x$.

Pour plus de précision, nous pouvons donner une définition mathématique à l'incertitude absolue en suivant le raisonnement suivant :

Soit une grandeur $X = f\,(x, y, z)$ où x, y et z représentent des grandeurs mesurables comportant des incertitudes.

L'incertitude absolue de X, c'est-à-dire ΔX, est matérialisée par la différentielle **dX** telle que $\mathbf{\Delta X \leq |\Delta X|}$.

Puisque le signe de l'erreur est inconnu il est tout à fait logique de prendre la valeur absolue pour les différentielles.

Sachant que $\mathbf{dX = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz}$

L'incertitude absolue ΔX de X s'écrit donc :

$$\mathbf{\Delta X \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z}$$

Définition : On appelle **incertitude relative** d'une grandeur X le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur approchée, soit $\frac{\Delta X}{X}$, et elle est égale au module de la différentielle logarithmique :

$$\frac{\Delta X}{X} \leq \left|\frac{dX}{X}\right|$$

2- Théorème des incertitudes

2- 1- Incertitude absolue d'une somme algébrique

L'incertitude absolue d'une somme algébrique de nombres incertains est égale à la somme arithmétique des incertitudes absolues de ces nombres.

Soit la somme algébrique : $y = nu + pv - qw + k$ où n, p et q sont des coefficients constants et positifs, k une constante sans incertitude et Δu, Δv et Δw les incertitudes absolues respectives de u, v et w. L'incertitude absolue de y est $\Delta y = n\Delta u + p\Delta v + q\Delta w$.

$$y = nu + pv - qw + k \quad \Rightarrow \quad \Delta y = |n|\Delta u + |p|\Delta v + |q|\Delta w$$

Important : Nous écrivons toujours le résultat d'une mesure sous la forme :

$$y_0 = (y \pm \Delta y)u$$

y_0 : valeur exacte — y : valeur approchée

Δy : incertitude absolue — u : unité de la grandeur

Exemple 1 : En déterminant la masse M par la méthode de la double pesée, on obtient m_1 =12.762 g et m_2 = 57.327 g. Sachant que l'incertitude absolue sur m_1 et m_2 est de $\Delta m = \pm 2\ mg$, calculer M et ΔM.

Réponse :

$$M = m_2 - m_1 \quad \Rightarrow \quad M = 44{,}565\ g$$

$$\Delta M = \Delta m_2 + \Delta m_1 = 4\ mg = 0.004\ g$$

Ainsi, le résultat s'écrit toujours sous la forme ci-dessous de telle façon que, le nombre de chiffres significatifs après la virgule dans la valeur approchée, soit le même que dans l'incertitude absolue.

$M = (44{,}565 \pm 0{,}004)\ g$

Tandis que l'incertitude relative sur M est :

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta m_2 + \Delta m_1}{m_2 - m_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta M}{M} = 9\,.\,10^{-5}$$

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{0{,}004}{44{,}565} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta M}{M} = 9\,.\,10^{-5}$$

2- 2- L'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient

Nous devons distinguer deux cas :

Premier cas : grandeurs indépendantes.

Enoncé du théorème : L'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient dont les grandeurs sont indépendantes les unes des autres est égale à la somme arithmétique des incertitudes relatives sur chaque terme.

Preuve mathématique :

Soit le produit $y = ku^n v^p w^{-q}$ où n, p et q sont des nombres réels et k une constante connue avec exactitude; les incertitudes absolues sur u, v et w sont respectivement Δu, Δv et Δw.

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation : $log y = log[ku^n v^p w^{-q}]$

D'après les propriétés du logarithme nous pouvons écrire :

$$\mathbf{logy = logk + n\, logu + p\, logv - q\, logw}$$

Ecrivons à présent la différentielle logarithmique et développons ensuite :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dk}{k} + n\frac{du}{u} + p\frac{dv}{v} - q\frac{dw}{w}$$

Nous arrivons à l'expression de l'incertitude relative (après avoir changé le signe - en signe +) et en prenant l'incertitude absolue des nombres :

$$\frac{dy}{y} = |n|\frac{du}{u} + |p|\frac{dv}{v} + |q|\frac{dw}{w}$$

Nous retiendrons la règle générale qui gère ce type de calcul :

- Remplacer tous les symboles *di* par *Δi*
- Changer le signe - par le signe +
- Prendre les grandeurs qui ne contiennent pas de Δ en valeurs absolues

Deuxième cas : grandeurs dépendantes les unes des autres.

Soit $\mathbf{y = k\frac{u^\alpha v^\beta}{(u+v)^\gamma\, t^\delta}}$

En suivant la même démarche que précédemment nous obtenons :

$$\mathbf{logy = logk + \alpha\, logu + \beta\, logv - \gamma\, log(u+v) - \delta\, log\, t}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dk}{k} + \alpha\frac{du}{u} + \beta\frac{dv}{v} - \gamma\frac{du}{u+v} - \gamma\frac{dv}{u+v} - \delta\frac{d\,t}{t}$$

Factorisons tous les termes ayant le même *di* et changeons le signe - par le signe + :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dk}{k} + du\left(\frac{\alpha}{u} - \frac{\gamma}{u+v}\right) + dv\left(\frac{\beta}{v} - \frac{\gamma}{u+v}\right) - \delta\frac{d\,t}{t}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{dk}{k} + \left(\frac{\alpha}{u} - \frac{\gamma}{u+v}\right)\Delta u + \left(\frac{\beta}{v} - \frac{\gamma}{u+v}\right)\Delta v + \left|\frac{\delta}{t}\right|\Delta t$$

Exemple 2 : Calculer l'incertitude relative puis l'incertitude absolue de l'énergie électrique exprimée par la formule $Q = RI^2\, t$.

Réponse : selon le théorème de l'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient, nous pouvons écrire :

$$Q = RI^2\, t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta t}{t}$$

Nous en déduisons l'expression de l'incertitude absolue sur Q :

$$\Delta Q = Q\left(\frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta t}{t}\right)$$

III- Calcul vectoriel

III- Calcul vectoriel

1- Notion de vecteurs : définitions et rappels

1- 1 - Définition : Le mot vecteur signifie en Latin « VECTOR » qui veut dire facteur. Le facteur a besoin d'une adresse indiquant son origine et contenant la direction, le sens et le module pour transmettre une lettre à sa destination. Donc, on peut appeler vecteur tout être physique se caractérisant par une origine, une direction, un sens et un module.

- A : Son point d'application, c'est l'origine du vecteur ;
- $\|\vec{V}\|$=AB : Le module du vecteur ;
- (D) : La direction du vecteur (droite (AB) ;
- Le sens du vecteur est indiqué par la flèche pointant de l'origine (point A) vers l'extrémité (point B).

Exemple la vitesse ($\vec{V}$), elle se caractérise par (voir figure 1) :

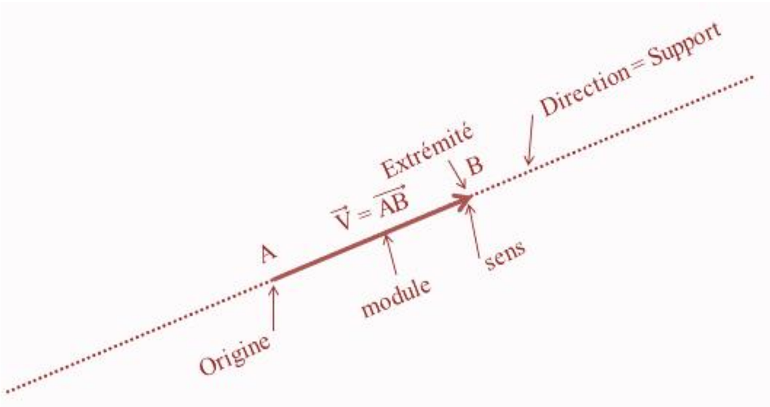


Figure. 1 : représentation d'un vecteur noté $\vec{AB}$ ou $(A, \vec{AB}) = (A, \vec{V})$

1- 2 - Différentes catégories de vecteurs

L'égalité $\vec{V} = \vec{V}'$ n'a pas la même signification suivant la catégorie de vecteur utilisée. On fait, il existe différents types de vecteurs :

1. 2. 1- Vecteur lié

C'est un vecteur noté $(A, \vec{V})$ dont l'origine A (point d'application du vecteur) est définie sur le support (Δ).

Exemple : le poids d'un corps $(A, \vec{P})$ est lié à son centre de gravité G.

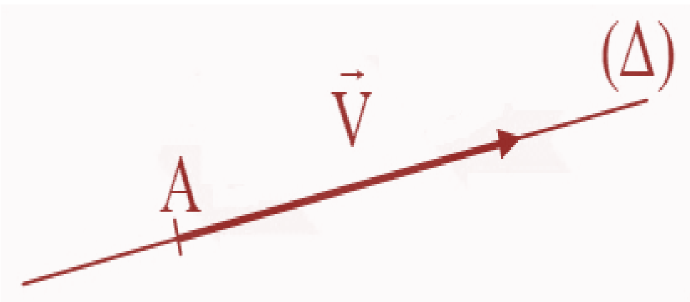


Figure. 2 : vecteur lié

1. 2. 2- vecteur glissant

C'est un vecteur V dont on définit le support (Δ), le sens et le module, son point d'application n'étant pas défini. Donc, tous les vecteurs situés sur le support (Δ) qui ont même module et même sens que $\vec{V}$ sont équivalents.

Exemple : la tension $\vec{T}$ d'un fil inextensible de masse négligeable, se transmet de proche en proche le long du fil et est représentée par un glisseur.

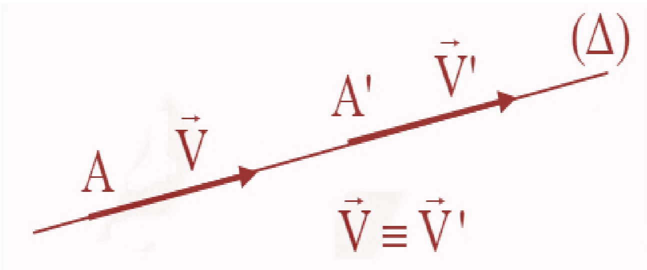


Figure. 3 : Vecteur glissant

1. 2. 3- Vecteurs libres (équipollents)

Ce sont des vecteurs libres qui possèdent le même module, le même sens et dont les supports sont parallèles. Dans ce cas, on parle de vecteurs égaux.

Exemple : le champ de pesanteur $\vec{g}$, localement et au voisinage de la surface de la Terre (champ uniforme).

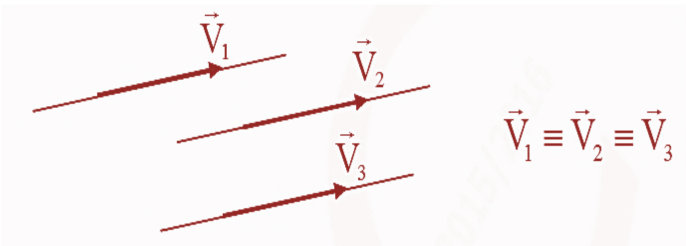


Figure. 4 : vecteur libre

1. 3- Le vecteur unitaire associe à un vecteur et projection orthogonale sur un axe

1. 3. 1- Définition d'un vecteur unitaire

On appelle vecteur unitaire $\vec{u}$ associe au vecteur $\vec{V}$, le vecteur : $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$

Son module est $\|\vec{u}\| = 1$, son support est la droite (Δ) et son sens celui de $\vec{V}$.

Figure. 5: Représentation du vecteur unitaire ($\vec{u}$)

1. 3. 2- Projection orthogonale

Soit un vecteur $\vec{V}$ dans l'espace et une droite (D) faisant un angle α avec $\vec{V}$. La projection algébrique de $\vec{V}$ sur la droite (D) est le scalaire :

$$\mathrm{Proj}_{(D)}\,\vec{V} = AH = \|\vec{V}\| cos\alpha$$

En définissant un vecteur unitaire $\vec{w}$ sur (D), nous pouvons alors écrire la projection vectorielle de $\vec{V}$ sur (D) par l'expression suivante : $\overrightarrow{\mathrm{Proj}_{(D)}}\,\vec{V} = \overrightarrow{AH} = (\|\vec{V}\| cos\alpha)\vec{w} = \|\vec{V}\| cos\alpha\, \vec{w}$ qui est le vecteur projeté du vecteur $\vec{V}$ sur la droite (D).

Remarque : On peut également parler de projection orthogonale du point B sur (D) qui est le point H. Dans ce cas, d = BH représente la plus petite distance de B à (D), soit : $d = \|\vec{V}\| \sin\alpha$.

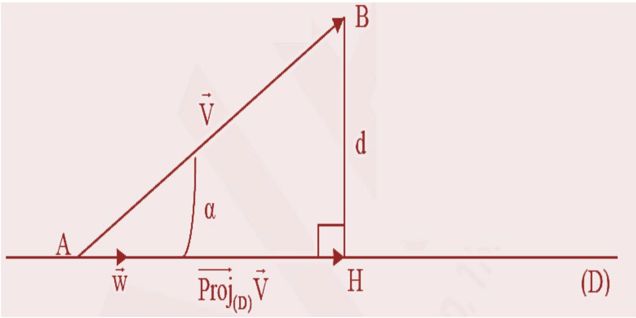


Figure. 6 : représentation de la projection orthogonale du vecteur

1. 4- Composante d'un vecteur dans un repère orthonormé

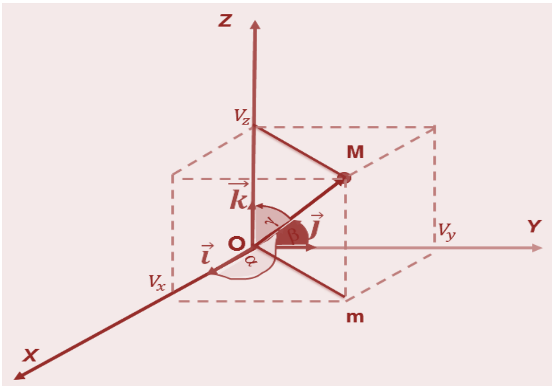


Figure. 7 : repère orthonormé

Le repère orthonormé est représenté par trois axes (Ox, Oy, Oz) perpendiculaires deux à deux, munis de trois vecteurs unitaires respectivement $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$. Le triplet $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ constitue la base du repère. Les composantes du vecteur $\vec{V}$ sont les projections orthogonales V_x, V_y et V_z sur les trois axes respectivement. On écrit alors :

$$\vec{V} = V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath} + V_z\,\vec{k}$$

Où le module de $\vec{V}$ est : $\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}}$

D'autre part : $V_x = \|\vec{V}\| cos\alpha$, $V_y = \|\vec{V}\| cos\beta$ $V_z = \|\vec{V}\| cos\gamma$.

Où : $\alpha = (\vec{\imath}, \vec{V})$, $\beta = (\vec{\jmath}, \vec{V})$ *et* $\gamma = (\vec{k}, \vec{V})$.

On appelle cos α , cos β et cos γ les **cosinus directeurs** du support de $\vec{V}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Les composantes du vecteur unitaire de $\vec{V}$, noté $\vec{u}$, sont :

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath} + V_z\,\vec{k}}{\|\vec{V}\|} = \frac{V_x}{\|\vec{V}\|}\vec{\imath} + \frac{V_y}{\|\vec{V}\|}\vec{\jmath} + \frac{V_z}{\|\vec{V}\|}\vec{k} == cos\alpha\,\vec{\imath} + cos\beta\vec{\jmath} + cos\gamma\vec{k}$$

On remarque que les cosinus directeurs de $\vec{V}$ sont les composantes de son vecteur unitaire.

On en déduit la relation entre les cosinus directeurs, puisque $\|\vec{u}\| = 1$:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Remarque : Le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est appelé repère cartésien.

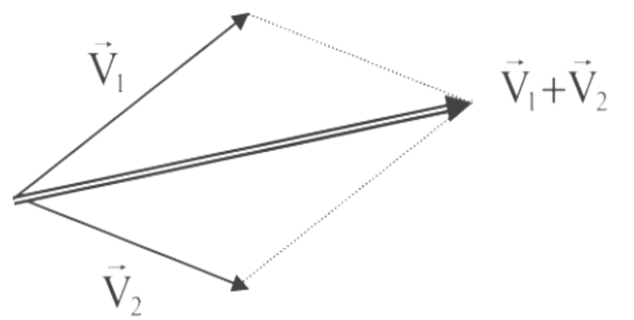
2- Les opérations sur les vecteurs

Dans tout ce qui suit, on ne traitera que le cas des vecteurs libres.

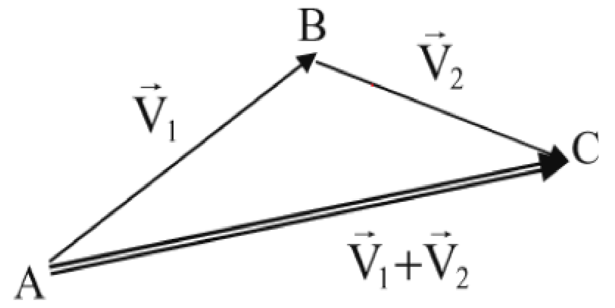
2. 1- Somme vectorielle

2- 1- 1- Somme géométrique de deux vecteurs

Géométriquement (voir figure 8), l'addition de deux vecteurs est effectuée en confondant l'origine du deuxième sur l'extrémité du premier. Le vecteur ayant pour origine l'origine du premier vecteur et comme extrémité, l'extrémité du deuxième défini la somme des deux vecteurs.



Règle du parallélogramme



Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Figure. 8 : Somme de deux vecteurs

On calcule le module du vecteur résultant à partir de la **loi des cosinus** que nous démontrerons plus tard:

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{V_1}^2 + \mathbf{V_2}^2 + 2\mathbf{V_1}\mathbf{V_2}\cos\theta}$$

2- 1- 2- La somme géométrique de plusieurs vecteurs

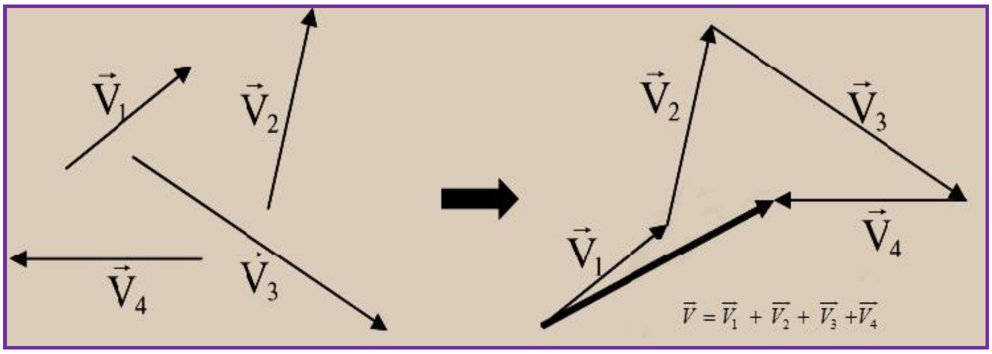


Figure. 9 : Somme de plusieurs vecteurs

2- 1- 3- Expression analytique de la somme vectorielle

Soit deux vecteurs : $\vec{V_1} = x_1\,\vec{\imath} + y_1\,\vec{\jmath} + z_1\,\vec{k}$ et $\vec{V_2} = x_2\,\vec{\imath} + y_2\,\vec{\jmath} + z_2\,\vec{k}$

Alors : $\vec{V_1} + \vec{V_2} = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\vec{\jmath} + (z_1 + z_2)\,\vec{k}$

Soit, pour plusieurs vecteurs :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{V_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\vec{\imath} + \sum_{i=1}^{n} y_i\,\vec{\jmath} + \sum_{i=1}^{n} z_i\,\vec{k}$$

2- 1- 4- Propriétés de la somme vectorielle

Si $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ sont des vecteurs et λ et η sont des scalaires, on a alors :

- $\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_2} + \vec{V_1}$ Loi de commutativité
- $\vec{V_1} + (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = (\vec{V_1} + \vec{V_2}) + \vec{V_3}$ Loi d'associativité pour la **+**
- $\lambda(\eta\vec{V_1}) = (\lambda\eta)\vec{V_1} = \eta(\lambda\vec{V_1})$ Loi d'associativité pour la **×**
- $(\lambda + \eta)\vec{V_1} = \lambda\vec{V_1} + \lambda\,\vec{V_1}$ Loi de distributivité par rapport à un vecteur
- $\lambda(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \lambda\,\vec{V_1} + \lambda\vec{V_2}$ Loi de distributivité par rapport à la somme vectorielle
- $\vec{V_1} + \vec{0} = \vec{V_1}$ Existence d'un élément neutre

Remarque : D'une manière générale : $\|\vec{V_1} + \vec{V_2}\| \neq \|\vec{V_1}\| + \|\vec{V_2}\|$

2. 2- Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{V} \in E^3$. Alors $\vec{V'} = \lambda\vec{V}$ représente un vecteur appartenant à E^3 tel que :

- Son module est $\|\vec{V'}\| = |\lambda|\|\vec{V}\|$;
- Son sens est celui de $\vec{V}$;
- Son sens est celui de $\vec{V}$ si $\lambda > 0$ et opposé à celui de $\vec{V}$ si $\lambda < 0$.

On peut alors définir :

- deux vecteurs égaux : $\vec{V'} = \vec{V}$ si $\lambda = 1$;
- et deux vecteurs opposés : $\vec{V'} = -\vec{V}$ si $\lambda = -1$;
- Si $\vec{V'} = \vec{0}$ alors $\lambda = 0$ ou $\vec{V} = \vec{0}$.

3- Produit scalaire

3-1- Définition : Le produit scalaire de deux vecteurs est le produit des modules par le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs.

Autrement, soit deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, le nombre $\vec{V}_1.\vec{V}_2$ est appelé produit scalaire définit comme suit:

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \times \|\vec{V}_2\| \cos(\widehat{\vec{V}_1,\vec{V}_2})$$

On peut constater facilement que : $\boldsymbol{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \frac{1}{2}\left[\|\vec{V_1}+\vec{V_2}\|^2 - \|\vec{V_1}\|^2 - \|\vec{V_2}\|^2\right]}$

Cas particulier

Si $\vec{V}_1 = \vec{0}$ ou $\vec{V}_2 = \vec{0}$, alors $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$

Si $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$, alors :

- $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1,\vec{V}_2) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$
- $\vec{V}_1 // \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1,\vec{V}_2) = 0 \Rightarrow cos 0 = 1 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V}_2 = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$

Si $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V}_2 = \vec{V}_1.\vec{V}_1 = \vec{V}_1^{\,2} = \|\vec{V}_1\| \times \|\vec{V}_1\| = \|\vec{V}_1\|^2 \Rightarrow \vec{V}_1^{\,2} = \|\vec{V}_1\|^2$

3- 2- Propriétés du produit scalaire

- Commutatif : $\vec{V_1}.\vec{V_2} = \vec{V_2}\,.\,\vec{V_1}$;
- Distributivité par rapport à la somme vectorielle : $\vec{U}.(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \vec{U}.\vec{V_1} + \vec{U}.\vec{V_2}$;
- Associativité par rapport à la multiplication par un nombre réel λ : $\lambda(\vec{V_1}.\vec{V_2}) = (\lambda\,\vec{V_1}).\vec{V_2} = \vec{V_1}.(\lambda\,\vec{V_2})$;
- Le produit scalaire n'est pas associatif : $\vec{V_1}(\vec{V_2}.\vec{V_3}) \neq (\vec{V_1}.\vec{V_2})\,\vec{V_3}$ car : $\vec{V_1}\lambda \neq \lambda'\,\vec{V_3}$;
- Multiplicité par un réel : $\lambda\vec{V_1}.\eta\,\vec{V_2} = \lambda\eta\,\vec{V_1}.\vec{V_2} = \lambda\eta\,\vec{V_2}.\vec{V_1}$;

Autres propriétés : Identités remarquables

Quels que soient les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ on'a :

$$\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\|^2 = \|\vec{V}_1\|^2 + 2\,\vec{V}_1.\vec{V}_2 + \|\vec{V}_2\|^2$$

$$\|\vec{V}_1 - \vec{V}_2\|^2 = \|\vec{V}_1\|^2 - 2\,\vec{V}_1.\vec{V}_2 + \|\vec{V}_2\|^2$$

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2).(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) = \|\vec{V}_1\|^2 - \|\vec{V}_2\|^2$$

3-3- Expression analytique du produit scalaire

Soit les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ contenus dans l'espace, tel que : $\vec{V}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$

$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = (x_1\,\vec{\imath} + y_1\,\vec{\jmath} + z_1\,\vec{k}).(x_2\,\vec{\imath} + y_2\,\vec{\jmath} + z_2\,\vec{k})$$

$$= x_1\,x_2\,\vec{\imath}.\vec{\imath} + x_1y_2\vec{\imath}.\vec{\jmath} + x_1z_2\,\vec{\imath}.\vec{k} + y_1\,x_2\,\vec{\imath}.\vec{\jmath} + y_1\,y_2\vec{\jmath}.\vec{\jmath} + y_1z_2\vec{\jmath}.\vec{k} + x_2z_1\,\vec{k}.\vec{\imath} + y_2z_1\,\vec{k}.\vec{\jmath} + z_2z_1\,\vec{k}.\vec{k}$$

Dans le repère orthonormé $R(O\,,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,,\vec{k})$

$$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$

Donc : $\vec{V_1}.\vec{V_2} = x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1z_2$

Remarques :

i- Comme $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \times \|\vec{V}_2\|\cos\varphi$, on peut calculer l'angle compris entre les deux vecteurs, soit :

$$\cos\varphi = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\| \times \|\vec{V}_2\|} = \frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \times \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

ii- Condition d'orthogonalité : $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \implies x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1 z_2 = 0$;

iii- Composantes d'un vecteur :

Si $\vec{V} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$, alors $x = \vec{V}.\vec{\imath}$, $y = \vec{V}.\vec{\jmath}$ et $z = \vec{V}.\vec{k}$ Donc $\vec{V} = (\vec{V}.\vec{\imath})\,\vec{\imath} + (\vec{V}.\vec{\jmath})\,\vec{\jmath} + (\vec{V}.\vec{k})\,\vec{k}$

iv- Expression des cosinus directeurs :

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{\|\vec{V}\|} = \frac{\vec{V}.\vec{\imath}}{\|\vec{V}\|} \quad ; \qquad \cos\beta = \frac{y}{\|\vec{V}\|} = \frac{\vec{V}.\vec{\jmath}}{\|\vec{V}\|} \quad ; \qquad \cos\gamma = \frac{V_z}{\|\vec{V}\|} = \frac{\vec{V}.\vec{k}}{\|\vec{V}\|}$$

3- 4- Applications

i- Si $\vec{u}$ est vecteur non nul, et $\vec{V}$ un vecteur quelconque, on a : $\vec{u}.\vec{V} = \vec{u}.\vec{V'}$ où $\vec{V'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{V}$ sur $\vec{u}$.

ii- Projection orthogonale d'un vecteur $\vec{V}$ sur un axe (Δ) :

Soit u un vecteur unitaire de l'axe (Δ) : $\|\vec{u}\| = 1$. La projection de $\vec{V}$ sur l'axe (Δ) est :

$$Proj_{(\Delta)}\vec{V} = MN = \vec{V}.\vec{u} = \|\vec{V}\|cos\varphi$$

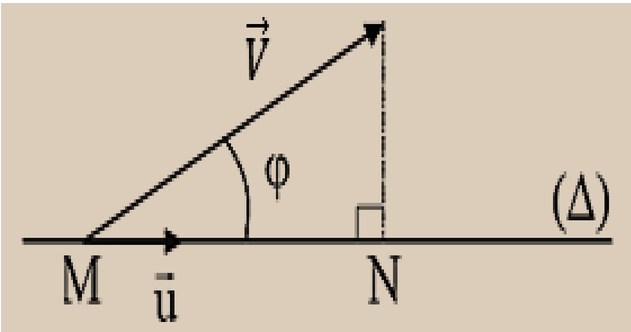


Figure. 10

La projection orthogonale vectorielle est alors :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{Proj_{(\Delta)}}(\vec{V}) = \|\vec{V}\|cos\varphi\vec{u}$$

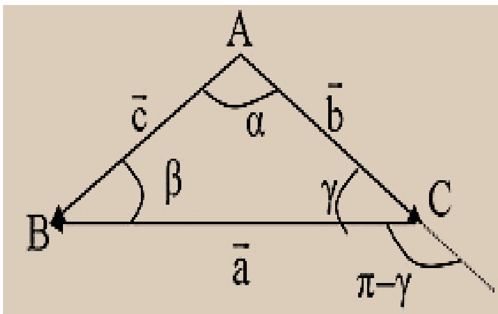
iii- Relation générale entre les côtés d'un triangle:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$c^2 + a^2 + b^2 + 2abcos(\pi - \gamma)$$

$$c^2 + a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$$



Cas particulier γ = 90° (Théorème de Pythagore) : $c^2 + a^2 + b^2$

4 - Produit vectoriel

4. 1 - Définition : On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ le vecteur $\vec{W}$ perpendiculaire au plan qu'ils constituent.

On écrit par convention : $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

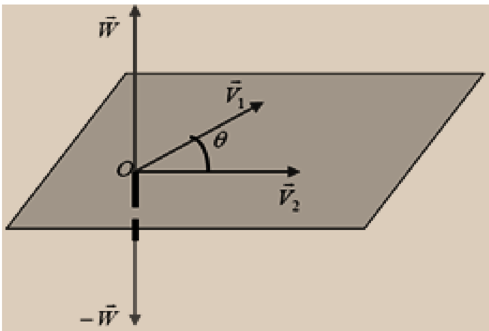


Figure. 11 : Produit vectoriel

Caractéristiques du vecteur $\vec{W}$:

- **Module :** $\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1\| \times \|\vec{V}_2\| \sin(\widehat{\vec{V}_1, \vec{V}_2})$
- **Direction :** la direction du vecteur $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.
- **Sens :** Le sens du vecteur $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est tel que le trièdre $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{W})$ est direct.

Interprétation géométrique : La grandeur $\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1\| \times \|\vec{V}_2\| \sin(\widehat{\vec{V}_1, \vec{V}_2})$ représente l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs, ce qui laisse sous entendre la possibilité de lier un vecteur à une certaine surface.

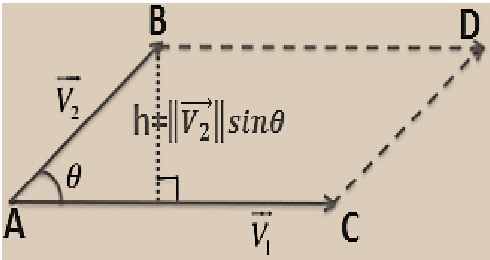


Figure. 12

On écrit : $\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1\| \times \|\vec{V}_2\| \sin\theta = \|\vec{V}_1\| h = S_{ABCD}$

4. 2- Propriétés du produit vectoriel

- Anticommutatif : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$;
- Distributif par rapport à la somme vectorielle : $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3)$;
- Associatif par rapport à la multiplication par un nombre réel :

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \lambda(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = (\lambda \vec{V}_1) \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge (\lambda \vec{V}_2)$$

- Non associatif : $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \neq (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$;
- Condition de parallélisme : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$ avec $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$ alors $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont parallèles ou colinéaires.

4. 3- Expression analytique pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs

Soit les deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ contenus dans l'espace, tel que : $\vec{V_1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ et $\vec{V_2}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$

$$\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = (x_1\,\vec{\imath} + y_1\,\vec{\jmath} + z_1\,\vec{k}) \wedge (x_2\,\vec{\imath} + y_2\,\vec{\jmath} + z_2\,\vec{k})$$

$$= x_1\,x_2\,\vec{\imath}\wedge\vec{\imath} + x_1y_2\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath} + x_1z_2\,\vec{\imath}\wedge\vec{k} + y_1\,x_2\,\vec{\jmath}\wedge\vec{\imath} + y_1\,y_2\vec{\jmath}\wedge\vec{\jmath} + y_1z_2\vec{\jmath}\wedge\vec{k} + x_2z_1\,\vec{k}\wedge\vec{\imath} + y_2z_1\,\vec{k}\wedge\vec{\jmath} + z_2z_1\,\vec{k}\wedge\vec{k}$$

Dans le repère orthonormé $R(O\,,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,,\vec{k})$

$$\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath} = \vec{k}\,;\,\vec{\imath}\wedge\vec{k} = -\vec{\jmath}\,;\,\vec{\jmath}\wedge\vec{k} = \vec{\imath} \qquad \text{et} \qquad \vec{\imath}\wedge\vec{\imath} = \vec{\jmath}\wedge\vec{\jmath} = \vec{k}\wedge\vec{k} = \vec{0}$$

Donc $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = (x_1\,\vec{\imath} + y_1\,\vec{\jmath} + z_1\,\vec{k}) \wedge (x_2\,\vec{\imath} + y_2\,\vec{\jmath} + z_2\,\vec{k}) = \vec{0} + x_1y_2\vec{k} + x_1z_2\,(-\vec{\jmath}) + y_1\,x_2\,(-\vec{k}) + \vec{0} + y_1z_2\vec{\imath} + x_2z_1\,\vec{\jmath} + y_2z_1\,(-\vec{\imath}) + \vec{0}$

On trouve

$$\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{\imath} - (x_1z_2 - x_2z_1)\,\vec{\jmath} + (x_1y_2 - y_1\,x_2)\vec{k}$$

Cette expression peut être obtenue rapidement en utilisant un déterminant d'ordre 3, de la manière suivante :

$$\vec{W} = \begin{vmatrix} +\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & +\vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = +\vec{\imath}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{\imath} - (x_1z_2 - x_2z_1)\,\vec{\jmath} + (x_1y_2 - y_1\,x_2)\vec{k}$$

$$\vec{W} = \begin{vmatrix} +\vec{\imath} & x_1 & x_2 \\ -\vec{\jmath} & y_1 & y_2 \\ +\vec{k} & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = +\vec{\imath}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{\imath} - (x_1z_2 - x_2z_1)\,\vec{\jmath} + (x_1y_2 - y_1\,x_2)\vec{k}$$

Le module du vecteur est donné par l'expression :

$$\|\vec{W}\| = \sqrt{(y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1y_2 - y_1\,x_2)^2}$$

4. 4- Applications

i- Calcul de la surface d'un triangle ABC.

On'a vu que $\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|$ est l'aire du parallélogramme construit à partit des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. Donc, l'aire du triangle ABC est : $S = \frac{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|}{2}$

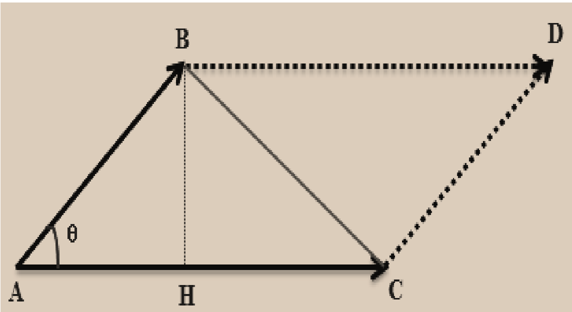


Figure. 13

ii- Dans un plan $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, calcul de la distance d'un point M(x, y) à une droite (Δ) qui passe par un point P(x_0, y_0) et portant le vecteur $\vec{u}(a,b)$: $\vec{OP} = x_0\,\vec{\imath} + y_0\,\vec{\jmath}$ et : $\vec{u} = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath}$.

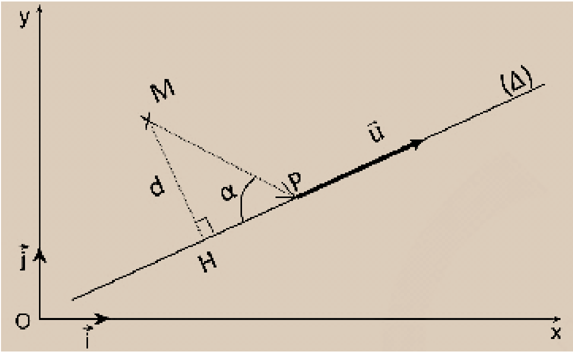


Figure. 14

$$\|\overrightarrow{MP} \wedge \vec{u}\| = MP\sqrt{a^2 + b^2}\, sin\alpha = d\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\overrightarrow{MP} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 - x & y_0 - y & 0 \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = [(x_0 - x)b - (y_0 - y)a]\vec{k}$$

$$\|\overrightarrow{MP} \wedge \vec{u}\| = |(x_0 - x)b - (y_0 - y)a| = d\sqrt{a^2 + b^2}$$

Finalement : $d = \frac{|b(x_0 - x) - a(y_0 - y)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

4. 5- Produit mixte de trois vecteurs

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ est la quantité scalaire définie par :

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = \vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} +$$

$$z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (y_2 z_3 - y_3 z_2)x_1 - (x_2 z_3 - x_3 z_2)\, x_1 + (x_2 y_3 - y_2\, x_3)z_1$$

Remarque : Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ est égal au volume du parallélépipède formé par les vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.

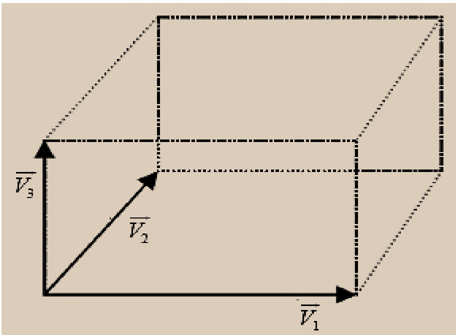


Figure. 15

Propriété : Permutation circulaire

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = \vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_2.(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) = \vec{V}_3.(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$$

Attention : $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = -(\vec{V}_2, \vec{V}_1, \vec{V}_3)$

4. 6- Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ est égale à :

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1.\vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2)\vec{V}_3$$

Soit $\vec{D} = \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$

$$\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = (y_2z_3 - y_3z_2)\vec{\imath} - (x_2z_3 - x_3z_2)\vec{\jmath} + (x_2y_3 - y_2x_3)\vec{k}$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$$
$$= (y_1x_2y_3 - y_1y_2x_3 - z_1x_3z_2 - z_1x_2z_3)\vec{\imath} + (z_1y_2z_3 - z_1y_3z_2 - x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3)\vec{\jmath} + (x_1x_3z_2 - x_1x_2z_3 - y_1y_2z_3 + y_1y_3z_2)\vec{k}$$

On ajoute et on retranche $z_1 z_2z_3$ sur $\vec{k}$, $y_1 y_2y_3$ sur $\vec{\jmath}$ et $x_1 x_2x_3$ sur $\vec{\imath}$

Il vient

$$\vec{D} = (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3)(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)(x_3\vec{\imath} + y_3\vec{\jmath} + z_3\vec{k})$$

Donc

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1.\vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2)\vec{V}_3$$

4. 7- Le moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace

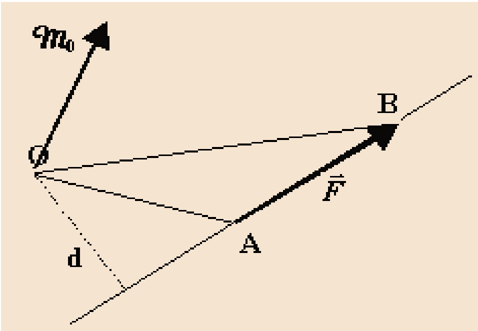


Figure. 16 : Moment d'un vecteur par rapport à un point

Le moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace est le vecteur libre défini par:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}_O(\overrightarrow{AB})} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \boldsymbol{\mathcal{M}_O(A,\vec{F})} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

Le module du moment $\|\boldsymbol{\mathcal{M}_O}\| = 2\, aire\ du\ triangle\ OAB.$

4. 8- Le moment d'un vecteur par rapport à un axe Δ

Définition 1 : Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est égal à la projection du moment de ce vecteur par rapport à un point quelconque de l'axe.

Définition 2 : Le moment d'un vecteur $(A, \overrightarrow{\mathrm{AB}})$ par rapport à un axe Δ, d'origine **O** et pour vecteur unitaire $\vec{u}$ est égal au produit mixte $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}})$, il s'écrit aussi :

$$\boldsymbol{\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{AB})} = \boldsymbol{\mathcal{M}_O(\overrightarrow{AB})}.\vec{u} = \vec{u}.(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB})$$

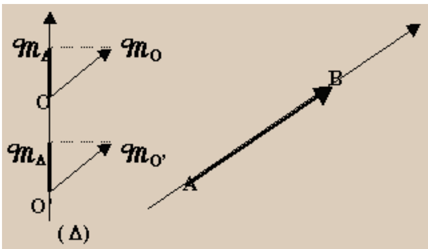


Figure. 17: Moment d'un vecteur par rapport à un axe

Remarques:

Le point O peut être un point quelconque appartenant à l'axe Δ.

Le moment est nul si O se trouve sur $\overrightarrow{AB}$, ou bien si Δ sont concourantes ou parallèles.

Le moment d'un vecteur par rapport à un point est un vecteur alors que son moment par rapport à un axe est scalaire.

5- Dérivation vectorielle

Soit un vecteur $\vec{V}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$. La dérivée du vecteur $\vec{V}(t)$ dans la base fixe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dont les composantes sont les dérivées des composantes du vecteur $\vec{V}(t)$:

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

Il est important de noter que dans ce cas les vecteurs de la base sont considérés fixe ;

c.à.d. $\frac{d\vec{\mathrm{i}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathrm{j}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathrm{k}}}{dt} = \vec{0}$

Propriétés :

- Linéarité : $\frac{d(\alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2)}{dt} = \alpha\frac{d\vec{V}_1}{dt} + \beta\frac{d\vec{V}_2}{dt}$;
- Dérivée d'un produit scalaire : $\frac{d(\vec{V}_1.\vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt}.\vec{V}_2 + \vec{V}_1.\frac{d\vec{V}_2}{dt}$;
- Dérivée d'un produit vectoriel : $\frac{d(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \frac{d\vec{V}_2}{dt}$;
- Dérivée du produit d'un vecteur par une fonction scalaire : $\frac{d(f\vec{V})}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{V} + f\frac{d\vec{V}}{dt}$;
- On peut aussi montrer qu'un vecteur de module fixe: $\|\vec{V}\| = V = cste$, est orthogonal à sa dérivée $\vec{V} \perp \frac{d\vec{V}}{dt}$;

Preuve :

$$\frac{d(\vec{V}^2)}{dt} = \frac{d(\vec{V}.\vec{V})}{dt} = 2\,\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt} \text{ D'autre part on a : } \frac{d(\vec{V}^2)}{dt} = \frac{d(V^2)}{dt} = 2\,V \times \frac{dV}{dt}$$

La dernière égalité vient du faut que le module est constant donc sa dérivée est nul. En comparant les deux lignes, on trouve que $\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$, ce qui implique que les deux vecteurs $\vec{V}$ et $\frac{d\vec{V}}{dt}$ sont orthogonaux.

6- Intégration d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{V}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$. L'intégrale du vecteur $\vec{V}(t)$ dans la base fixe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dont les composantes sont les intégrales des composantes du vecteur $\vec{V}(t)$:

$$\int \vec{V}(t)\,dt = \vec{\imath}\int x(t)\,dt + \vec{\jmath}\int y(t)\,dt + \vec{k}\int z(t)\,dt$$