Travaux dirigés de mécanique du point matériel / Filières SMPC-SMIA

Série N° 2 : Cinématique et changement de référentiel

Exercice N°1

On considère un point matériel M se déplaçant dans le plan (Oxy) et R(O, x, y, z) est un référentiel muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Les coordonnées du point M dans R sont données par :

x(t) = t + 1 ; y(t) = t^2 + 1 et z(t) = 0 , (t étant le temps)

1- Donner l'équation de la trajectoire de M dans R. En déduire sa nature ;

2- Calculer la vitesse $\vec{V}(M/R)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du point M.

3- Déterminer les vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire, La normale $\vec{n}$ et la binormale $\vec{b}$ de la base de Frenet,

4- En Déduire le rayon de courbure ρ.

Exercice N°2

On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne s(t). Le vecteur vitesse du point M dans un repère orthonormé direct $R(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est $\vec{V}(M/R)$ de module V. On définit la base locale (ou base de Frenet) $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ telle que $\vec{V}(M/R) = V\vec{\tau}$.

1- Que désignent les vecteurs $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$?

2- Quelle relation existe - t -il entre s(t) et V ?

3- Montrer que le vecteur accélération du point M dans le repère $\Re$ est donné par :

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R}\vec{n}$$

R_c étant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M.

4- Exprimer R_c en fonction de $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M)$.

Exercice N°3

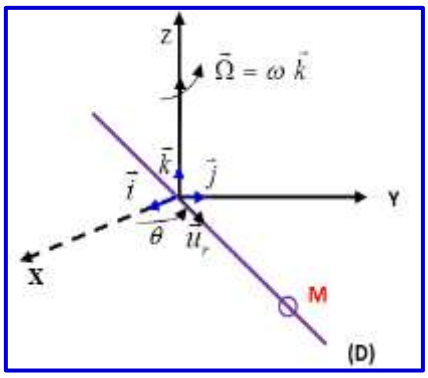
Dans le plan **xOy**, une droite **Ox′** tourne autour de **Oz** avec une vitesse angulaire constante. Un mobile **M** se déplace sur la droite **Ox′** suivant la loi : **r = a sin θ** avec **θ = ωt** et **a = cte**.

1- Déterminer à l'instant t en fonction de **a** et **ω**, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de **M** par leurs projections dans le repère mobile **x′Oy′**. En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

2- Déterminer à l'instant t en fonction de **a** et **ω**, l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire de **M** par leurs projections dans le repère mobile **x′Oy′**. En déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

Exercice N°4

Un anneau de faibles dimensions, assimilable à un point matériel M de masse m, glisse sans frottement sur une tige rigide (D) la tige (d) tourne autour de l'axe (Oz) avec la vitesse angulaire



$\omega = \frac{d\theta}{dt}$, ou θ représente un angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{u_r})$ et $\overrightarrow{u_r}$ est un vecteur unitaire de (D) (Voir figure).

Le mouvement du point M sur la droite (D) est décrit par l'équation horaire :

$r = r_0(1+\sin\omega t)$, ou r_0 est constante positive et $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$.

On appelle mouvement relatif de M son mouvement sur la droite (D), et mouvement absolu son mouvement par rapport au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.Déterminer pour M, dans la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$.

1- La vitesse et l'accélération relatives.

2- La vitesse et l'accélération d'entrainement.

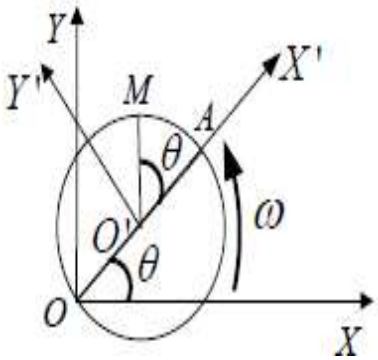
3- L'accélération de Coriolis.

Exercice N°5

Dans le plan **OXY**, un cercle de rayon **R**, de diamètre **OA**, tourne à la vitesse angulaire constante **ω** autour du point **O**. On lie à son centre mobile **O'** deux axes rectangulaires **O'X'Y'** (l'axe **O'X'** est dirigé suivant **OA**).

A l'instant **t = 0**, **A** est sur **OX**, **OX** et **OX'** étant colinéaires.

Un point **M**, initialement en **A**, parcourt la circonférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire **ω**.



1- Calculer directement les composantes des vecteurs vitesse et accélération de **M** dans le repère **OXY** (en dérivant les composantes de $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$).

2- Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération relatives de **M** dans le repère **O'X'Y'** puis dans **OXY**.

3-

3- 1- Calculer les composantes de la vitesse d'entraînement dans le repère **OXY** par la loi de composition des vitesses.

3- 2- Calculer de même les composantes de l'accélération d'entraînement dans le repère **OXY**; en déduire l'accélération complémentaire (Coriolis).

4- Vérifier les expressions des composantes de la vitesse d'entraînement et celle de l'accélération complémentaire en utilisant les expressions faisant intervenir le vecteur rotation $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.