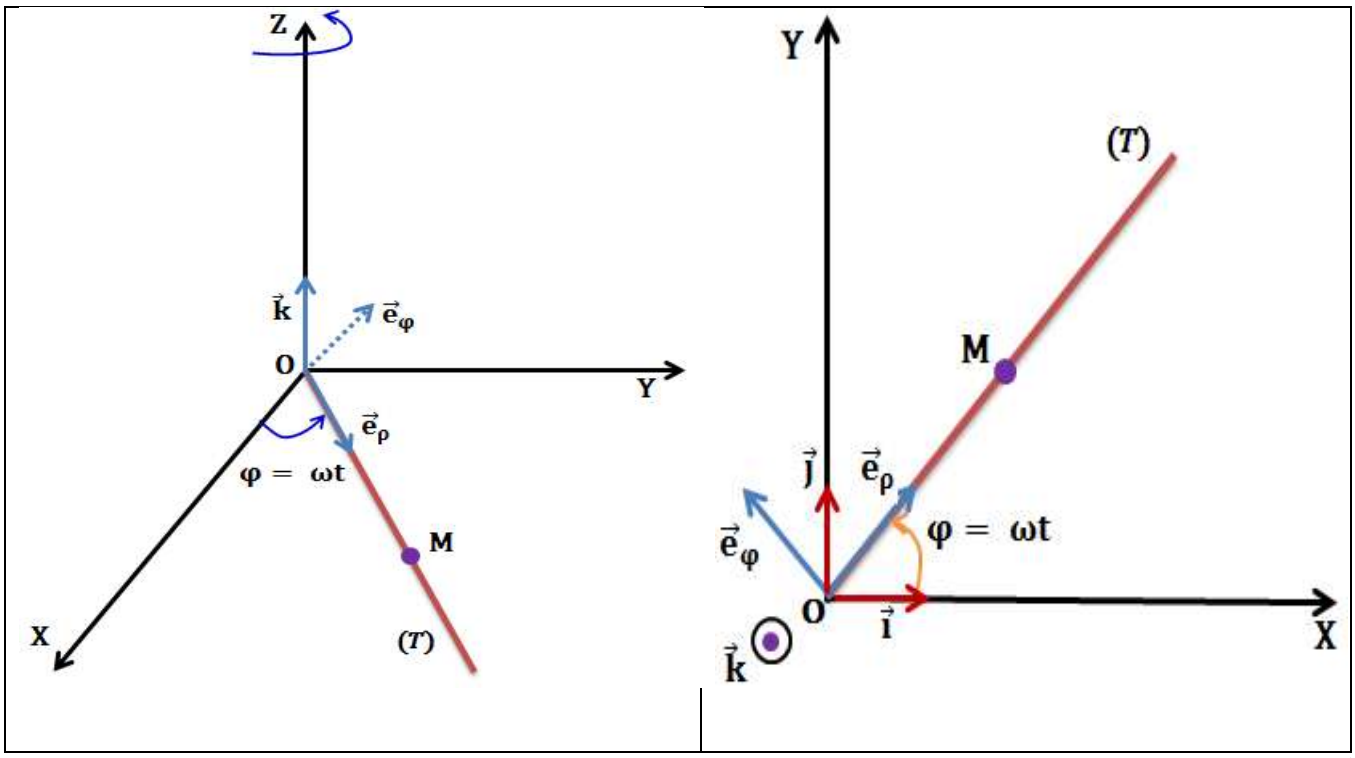
Université Cady Ayyad, Marrakech — Année universitaire 2017 - 2018
Faculté polydisciplinaire - Safi — Filières : SMPC
Session Normale d'Automne (S1) — Durée : 2 h

Examen de Mécanique du Point Matériel

Glissement d'un anneau sans frottement sur une tige (T)

Un anneau assimilé à un point matériel M de masse m coulisse sans frottement le long de la tige (T) qui tourne dans le plan horizontal (XOY) autour de l'axe (OZ) avec une vitesse angulaire constante ($\boldsymbol{\varphi = \omega t}$ avec $\boldsymbol{\omega > 0}$). Soit $\Re(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un référentiel orthonormé direct et Galiléen, et soit $\Re'(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ un référentiel lié à la tige. M est lancée depuis le point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e_\rho}$ $(v_0 > 0)$, elle soumit en plus des forces habituelles, à une force $\vec{F} = -2m\omega\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho$ (Figures ci-dessous). Le mouvement du point M décrit par les variables $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\varphi}$.



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

Partie I : Etude dans le référentiel $\Re$ (Galiléen)

I- Application du principe fondamentale de la dynamique

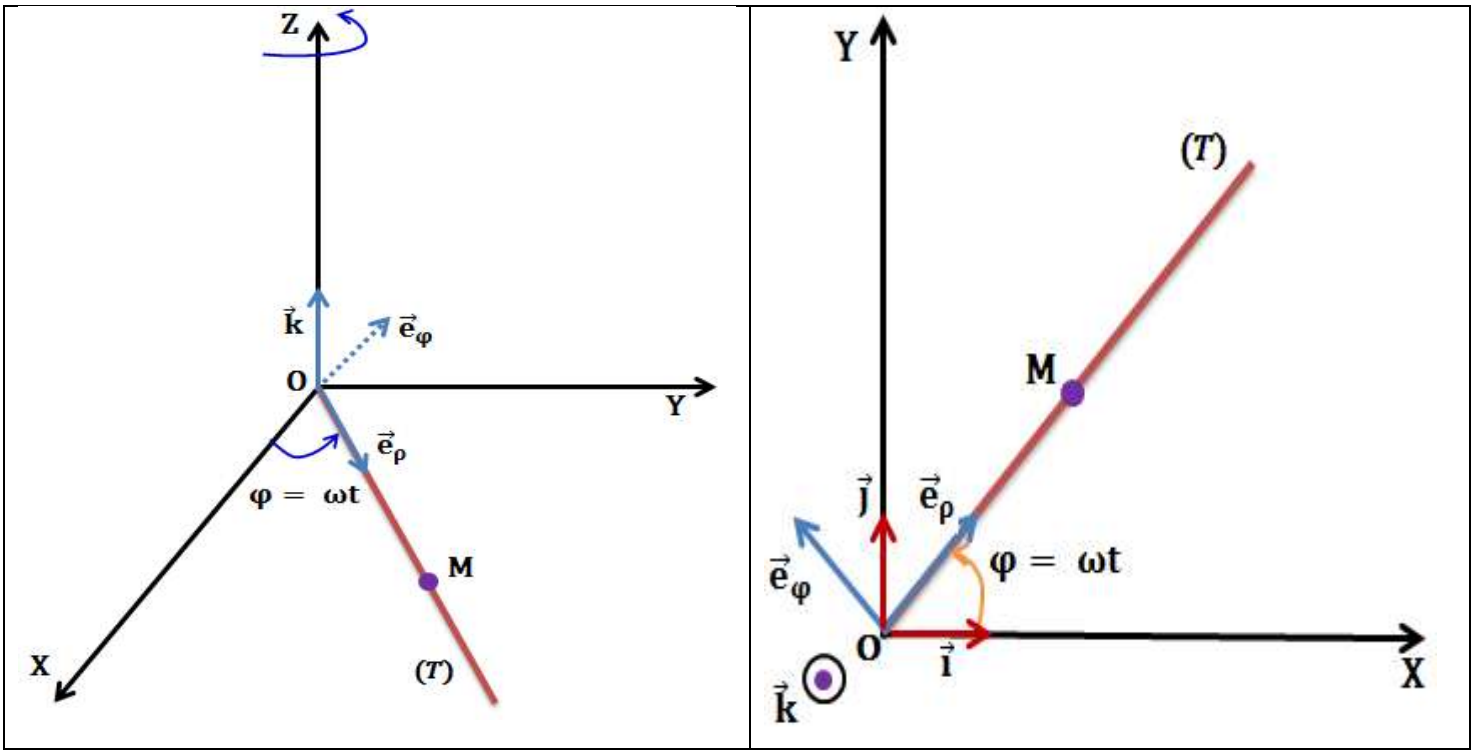
1- Calculer le vecteur position $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$, la vitesse $\vec{V}$ $(M/\Re)$ et l'accélération $\vec{\gamma}$ $(M/\Re)$ de M. — 1.5

2- Exprimer les forces appliquées à M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ par rapport au — 1.25

référentiel galiléen	
3- Ecrire le principe fondamentale de la dynamique (PFD)	1
4- Par projection du PFD suivant $\vec{e}_\rho$; déduire l'équation différentielle du mouvement.	1
II- Application du théorème du moment cinétique	
1- Déterminer $\vec{\sigma}_O(M/\mathfrak{R})$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathfrak{R}$.	1
2- Déterminer les moments de chacune des forces agissant sur le point M.	1.5
3- En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver les expressions de la composante de $\vec{R}$.	2
III- Application du théorème de l'énergie cinétique	
1- Déterminer $E_C(M/\mathfrak{R})$ l'énergie cinétique du point M dans $\mathfrak{R}$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathfrak{R}$.	1
2- Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M.	1.5
3- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'équation différentielle du mouvement.	1.5
Partie II : Etude dans le référentiel $\mathfrak{R}'$ (non Galiléen)	
1- Calculer la vitesse relative $\vec{V}(M/\mathfrak{R}')$ et la vitesse d'entrainement $\vec{V_e}(M)$	0.75
2- Calculer l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis du point M.	1.25
3- Donner l'expression des forces appliquées à M dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}$)	1.75
4- Ecrire le principe fondamentale de la dynamique (PFD) dans $\mathfrak{R}'$.	1
5- Retrouver l'équation différentielle du mouvement. Déduire l'équation horaire du mouvement.	1.5
6- Retrouver les expressions des composantes de la réaction.	0.5

Correction de l'examen de Mécanique du Point Matériel

Soit un anneau assimilé à un point matériel M de masse m coulisse sans frottement le long de la tige **(*T*)** qui tourne dans le plan horizontal (XOY) autour de l'axe (*OZ*) avec une vitesse angulaire constante ($\boldsymbol{\varphi = \omega t}$ avec $\boldsymbol{\omega > 0}$). $\Re(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un référentiel orthonormé direct et Galiléen, et soit $\Re'(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ un référentiel lié à la tige. *M* est lancée depuis le point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e_\rho}$ ($v_0 > 0$), elle soumit en plus des forces habituelles, à une force $\vec{F} = -2m\omega\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho$ (Figures ci-dessous). Le mouvement du point M décrit par les variables $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\varphi}$.



Partie I : Etude dans le référentiel $\Re$ (Galiléen)

I- Application du principe fondamentale de la dynamique

1- Calculons le vecteur position $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$, la vitesse $\vec{V}\ (M/\Re)$ et l'accélération $\vec{\gamma}\ (M/\Re)$ de *M* dans $\Re$.

- Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho$
- Vecteur vitesse : $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M/R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi$
- Vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}(\mathbf{M/R}) = \left.\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M/R})}{\mathbf{dt}}\right|_{\Re} = \frac{\mathbf{d}\left(\dot{\rho}\vec{\mathbf{e}}_{\rho} + \rho\omega\vec{\mathbf{e}}_{\varphi}\right)}{dt} = \ddot{\rho}\,\vec{\mathbf{e}}_{\rho} + \dot{\rho}\frac{d\vec{\mathbf{e}}_{\rho}}{dt} + \dot{\rho}\omega\vec{\mathbf{e}}_{\varphi} + \rho\omega\frac{d\vec{\mathbf{e}}_{\varphi}}{dt}$$

$$\vec{\gamma}(\mathbf{M/R}) = \ddot{\rho}\,\vec{\mathbf{e}}_{\rho} + \dot{\rho}\omega\vec{\mathbf{e}}_{\varphi} + \dot{\rho}\omega\vec{\mathbf{e}}_{\varphi} - \rho\omega^2\vec{\mathbf{e}}_{\rho}$$

$$\text{Avec : } \frac{d\vec{\mathbf{e}}_{\rho}}{dt} = \omega\vec{\mathbf{e}}_{\varphi} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\vec{\mathbf{e}}_{\varphi}}{dt} = -\omega\vec{\mathbf{e}}_{\rho}$$

$$\vec{\gamma}(\mathbf{M/R}) = (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\,\vec{\mathbf{e}}_{\rho} + 2\dot{\rho}\omega\vec{\mathbf{e}}_{\varphi}$$

2- On exprime les forces appliquées à M dans la base ($\vec{e}_{\rho}, \vec{e}_{\varphi}, \vec{k}$) par rapport au référentiel galiléen

- le poids : $\vec{P} = m\,\vec{g} = -mg\vec{k}$,
- la réaction de la tige qui est normale à celle-ci, puisque les frottements sont négligeables **(la composante de $\vec{R}$ suivant $\vec{e}_{\rho}$ est nul : $\mathbf{R}_{\rho} = 0$)** : $\vec{R} = \mathbf{R}_{\varphi}\vec{e}_{\varphi} + \mathbf{R}_z\vec{k}$
- La force : $\vec{F} = -2m\omega\dot{\rho}\,\vec{e}_{\rho}$

3- Ecrivons le principe fondamentale de la dynamique (PFD) par rapport au référentiel Galiléen :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{\gamma}(\mathbf{M/R})$$

$$-mg\vec{k} + \mathbf{R}_{\varphi}\vec{e}_{\varphi} + \mathbf{R}_z\vec{k} - 2m\omega\dot{\rho}\,\vec{e}_{\rho} = m[(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\,\vec{\mathbf{e}}_{\rho} + 2\dot{\rho}\omega\vec{\mathbf{e}}_{\varphi}]$$

$$-2m\omega\dot{\rho}\,\vec{e}_{\rho} + \mathbf{R}_{\varphi}\vec{e}_{\varphi} + (\mathbf{R}_z - mg)\vec{k} = m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\,\vec{\mathbf{e}}_{\rho} + 2m\dot{\rho}\omega\vec{\mathbf{e}}_{\varphi}$$

4- Par projection du PFD suivant $\vec{e}_{\rho}$

L'équation différentielle du mouvement.

Pour trouver cette équation, il faut faire une projection sur un vecteur de telle sorte éliminer les composantes de la réaction.

$$\Rightarrow \quad m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) = -2m\omega\dot{\rho} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\rho} + 2\omega\dot{\rho} - \omega^2\rho = 0$$

II- Application du théorème du moment cinétique

1- Déterminons $\vec{\sigma}_O\,(M/\Re)$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\Re$.

$$\vec{\sigma}_O\,(M/\Re) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\Re) = \rho\,\vec{\mathbf{e}}_{\rho} \wedge m\left(\dot{\rho}\vec{\mathbf{e}}_{\rho} + \rho\omega\vec{\mathbf{e}}_{\varphi}\right) = m\rho^2\omega\,\vec{\mathbf{k}}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_O\,(M/\Re)}{dt} = 2\,m\rho\dot{\rho}\omega\,\vec{\mathbf{k}}$$

2- On détermine les moments de chacune des forces agissant sur le point M.

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \rho\,\vec{e}_\rho \wedge -2m\omega\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho = 0$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \rho\,\vec{e}_\rho \wedge -mg\vec{k} = \rho mg\vec{e}_\varphi$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \rho\,\vec{e}_\rho \wedge \left(R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z\vec{k}\right) = -\rho\,R_z\vec{e}_\varphi + \rho\,R_\varphi\vec{k}$$

3- Les expressions des composantes de $\vec{R}$.

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re)}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) + \mathcal{M}_O(\vec{P}) + \mathcal{M}_O(\vec{R})$$

$$2\,m\rho\dot{\rho}\omega\,\vec{k} = \rho(mg - R_z)\vec{e}_\varphi + \rho\,R_\varphi\vec{k}$$

Par identification, on trouve :

$$R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega \quad \text{et} \quad R_z = mg$$

III- Application du théorème de l'énergie cinétique

1- On détermine $E_C(M/\Re)$ l'énergie cinétique du point M dans $\Re$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\Re$.

- L'énergie cinétique s'exprime comme suit :

$$E_C(M/\Re) = \frac{1}{2}mV(M/\Re) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2)$$

- La dérivée de l'énergie cinétique s'exprime alors :

$$\frac{dE_C(M/\Re)}{dt} = m(\dot{\rho}\ddot{\rho} + \rho\dot{\rho}\omega^2)$$

2- Déterminons les puissances de chacune des forces agissant sur le point M.

- $P(\vec{F}/\Re) = \vec{F}.\vec{V}(M/\Re) = -2m\omega\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho.(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi) = -2m\omega\dot{\rho}^2$
- $P(\vec{P}/\Re) = \vec{P}.\vec{V}(M/\Re) = -mg\,\vec{k}.(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi) = 0$
- $P(\vec{R}/\Re) = \vec{R}.\vec{V}(M/\Re) = \left(R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{k}\right).(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi) = \rho\omega R_\varphi$

3- Par applications du théorème de l'énergie cinétique.

$$\frac{dE_C(M/\Re)}{dt} = P(\vec{F}/\Re) + P(\vec{P}/\Re) + P(\vec{R}/\Re)$$

$$\Rightarrow m(\dot{\rho}\ddot{\rho} + \rho\dot{\rho}\omega^2) = -2m\omega\dot{\rho}^2 + \rho\omega R_\varphi$$

On 'a : $R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega$

$$\Rightarrow m(\dot{\rho}\ddot{\rho} + \rho\dot{\rho}\omega^2) = -2m\omega\dot{\rho}^2 + 2m\,\rho\dot{\rho}\omega^2$$

$$\Rightarrow m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\rho\dot{\rho}\omega^2 = -2m\omega\dot{\rho}^2 + 2m\,\rho\dot{\rho}\omega^2$$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} + \rho\omega^2 = -2\omega\dot{\rho} + 2\,\rho\omega^2$$

On retrouve donc :

$$\Longrightarrow \quad \ddot{\rho} + 2\omega\dot{\rho} - \omega^2\rho = 0$$

Partie II : Etude dans le référentiel $\Re'$ (non Galiléen)

1- On calcul la vitesse relative $\vec{V}(M/\Re')$ et la vitesse d'entrainement $\vec{V_e}(M)$

- la vitesse relative : $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M}/\mathfrak{R}') = \left.\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\mathbf{dt}}\right|_{\mathfrak{R}'} = \dot{\boldsymbol{\rho}}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$
- la vitesse d'entrainement : $\overrightarrow{\mathbf{V_e}}(\mathbf{M}) = \left.\frac{\mathbf{d}\,\overrightarrow{\mathbf{OO}}}{\mathbf{dt}}\right|_{\mathfrak{R}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{\rho}\,\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\rho\omega}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\varphi}}$

2- On calcul l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis du point **M**.

- L'accélération relative :

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{M}) = \left.\frac{\boldsymbol{d^2\overrightarrow{OM}}}{\boldsymbol{dt^2}}\right|_{\mathfrak{R}'} = \ddot{\boldsymbol{\rho}}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$$

- L'accélération d'entraînement :

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{M}) = \left.\frac{\boldsymbol{d^2}\,\overrightarrow{\boldsymbol{OO}}}{\boldsymbol{dt^2}}\right|_{\mathfrak{R}} + \left.\frac{\boldsymbol{d}\,\vec{\boldsymbol{\omega}}}{\boldsymbol{dt}}\right|_{\mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} + \boldsymbol{\omega}\vec{\boldsymbol{k}} \wedge \left(\boldsymbol{\omega}\vec{\boldsymbol{k}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\right) = \boldsymbol{\omega}\vec{\boldsymbol{k}} \wedge \left(\boldsymbol{\omega}\vec{\boldsymbol{k}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\right)$$

$$= \boldsymbol{\omega}\vec{\boldsymbol{k}} \wedge \boldsymbol{\rho\omega}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\varphi}} = -\boldsymbol{\rho\omega^2}\,\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$$

- L'accélération de Coriolis :

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{M}) = \mathbf{2}\left(\boldsymbol{\omega}\vec{\boldsymbol{k}} \wedge \vec{\mathbf{V}}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{M})\right) = \mathbf{2}\dot{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{\omega}\left(\vec{\boldsymbol{k}} \wedge \vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}}\right) = \mathbf{2}\dot{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{\omega}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\varphi}}$$

3- L'expression des forces appliquées à M dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}$)

- le poids : $\vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{g}} = -\boldsymbol{mg}\vec{\boldsymbol{k}}$,
- la réaction: $\vec{\boldsymbol{R}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}\vec{e}_{\varphi} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}$
- La force : $\vec{\boldsymbol{F}} = -\mathbf{2}\boldsymbol{m\omega\dot{\rho}}\,\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$
- Les forces d'inertie :
  - Force d'inertie d'entrainement : $\overrightarrow{\boldsymbol{F_{ie}}} = -\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{m\rho\omega^2}\,\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$
  - Force d'inertie de Coriolis : $\overrightarrow{\boldsymbol{F_{ic}}} = -\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{M}) = -\mathbf{2}\boldsymbol{m\dot{\rho}\omega}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\varphi}}$

4- Le principe fondamentale de la dynamique (PFD) dans le référentiel non galiléen :

$$\vec{\boldsymbol{P}} + \vec{\boldsymbol{R}} + \vec{\boldsymbol{F}} + \overrightarrow{\boldsymbol{F_{ie}}} + \overrightarrow{\boldsymbol{F_{ic}}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{M})$$

$$-\boldsymbol{mg}\vec{\boldsymbol{k}} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}\vec{e}_{\varphi} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}} - \mathbf{2}\boldsymbol{m\omega\dot{\rho}}\,\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{m\rho\omega^2}\,\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{2}\boldsymbol{m\dot{\rho}\omega}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{m\ddot{\rho}}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$$

$$(-\mathbf{2}\boldsymbol{m\omega\dot{\rho}} + \boldsymbol{m\rho\omega^2})\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}} + (\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}} - \mathbf{2}\boldsymbol{m\dot{\rho}\omega})\vec{e}_{\varphi} + (\mathbf{R}_{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{mg})\vec{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{m\ddot{\rho}}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$$

5- L'équation différentielle du mouvement.

La projection du PFD suivant $\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$ **:**

$$[(-2m\omega\dot{\rho} + m\rho\omega^2)\vec{e}_{\rho} + (R_{\varphi} - 2m\dot{\rho}\omega)\vec{e}_{\varphi} + (R_z - mg)\vec{k} = m\ddot{\rho}\vec{e}_{\rho}].\vec{e}_{\rho}$$

Ce qui donne :

$$-m\omega\dot{\rho} + 2m\rho\omega^2 = m\ddot{\rho} \iff \ddot{\rho} + 2\omega\dot{\rho} - \rho\omega^2 = 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique est : $r^2 + 2\omega r - \omega^2 = 0 \Rightarrow \Delta' = 2\omega^2$

$$\Longrightarrow r_{1,2} = -\omega \mp \sqrt{\Delta'} = -\omega \mp \omega\sqrt{2}$$

et la solution est $\rho(t) = (Ae^{(\sqrt{2}-1)\omega t} + Be^{-(\sqrt{2}+1)\omega t})$. A et B sont déterminées à partir des conditions initiales $\rho(0) = 0 \Rightarrow$ A+B = 0 et $\dot{\rho}(0) = v_0 = \omega\left(\sqrt{2}-1\right)A - (\sqrt{2}+1)B\big)$

$\Rightarrow A = \frac{v_0}{2\sqrt{2}\omega}$ et $B = -\frac{v_0}{2\sqrt{2}\omega}$.

La solution est $\boldsymbol{\rho(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{2}\omega} e^{-\omega t} \sinh\sqrt{2}\omega t)}$

6- Les expressions de composantes de la réaction.

- La projection du PFD suivant $\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\varphi}}$ **:** $\Longrightarrow R_{\varphi} = 2m\dot{\rho}\omega$
- La projection du PFD suivant $\vec{\mathbf{k}}$ **:** $\Longrightarrow R_z = mg$