

SMP 5 – Module 28

Travaux dirigés de mécanique analytique

Série N° 2 : Multiplicateurs de Lagrange

Exercice N° 1 : Multiplicateurs de Lagrange

Considérons un point matériel M de masse m qui se déplace sur la face intérieure d'un cône d'ouverture $2\theta_0$. La position de M est repérée par ces coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) ; voir figure ci-contre.

1- Dénombrer les forces appliquées à M et donner la contrainte de la liaison sous la forme $\mathbf{f}(\rho, \varphi, z) = \rho - z \tan\theta_0 = 0$.

2- Ecrire le lagrangien $\mathcal{L}_0(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t)$ de M sans tenir compte de la contrainte.

3- Considérer le nouveau lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \lambda \mathbf{f}(\rho, \varphi, z)$, où λ est un multiplicateur de Lagrange.

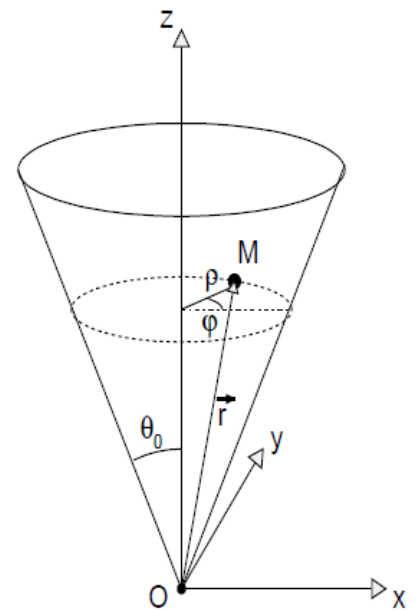
3- 1- Ecrire les équations de Lagrange.

3- 2- Trouver deux intégrales premières.

3- 3- A l'aide des équations du mouvement, trouver λ en fonction des coordonnées.

3- 4- Etablir l'expression des composantes généralisées de la force de liaison agissant sur M .

3- 5- Montrer que la force de liaison est normale à la surface intérieure du cône.



Exercice N° 2 : Sphère qui roule ...

Une sphère pleine de rayon a et de masse m est située initialement au sommet d'une autre sphère de rayon b . La première sphère est déplacée de sorte qu'elle roule sans glisser le long de la seconde sphère.

1- Cas où les deux sphères restent en contact

a- Exprimer la condition de non-glissement.

b- Calculer l'énergie cinétique de la sphère de rayon a . On rappelle que le moment d'inertie d'une sphère pleine de rayon R et de masse m par rapport à son centre est $I = \frac{2}{5} m R^2$.

c- En déduire le lagrangien.

d- Ecrire les équations du mouvement de la sphère.

2- Condition pour que la 1^{ère} sphère quitte la 2^{nde}

a- Ecrire la condition de liaison supplémentaire permettant la détermination de la tension du fil.

b- Exprimer le lagrangien du système.

c- Déterminer l'angle ϕ au-delà duquel le contact entre les deux sphères est rompu.

