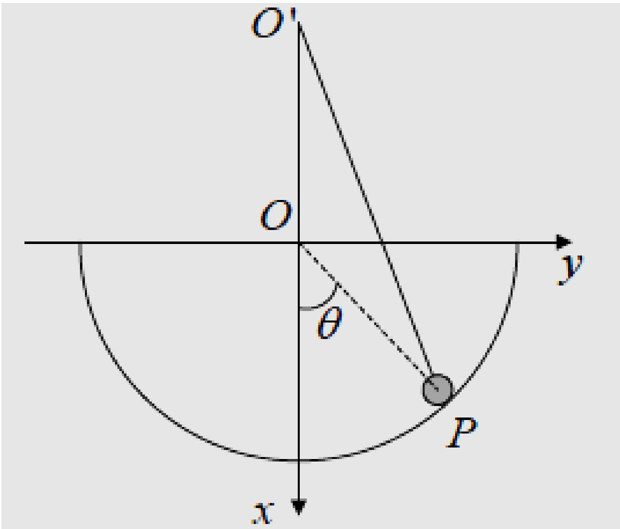
UNIVERSITE IBN ZOHR, AGADIR — **ANNEE UNIVERSITAIRE 2017-2018**
CAMPUS UNIVERSITAIRE AIT - MELLOUL — **FILIERE : SMC / SEMESTRE 1**
FACULTE DES SCIENCES — **MODULE : MPM**

EXAMEN DE MECANIQUE DU POINT MATERIEL
SESSION NORMALE DE PRINTEMPS
DUREE : 1H 30 MIN

Soit un référentiel $\mathbb{R}$ de repère $\left(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$. Une bille assimilée à un point **P**, de masse **m**, est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle de rayon **a** (Figure ci-dessous).

Le point **P** est attaché à un fil élastique dont l'autre extrémité est fixée en **O'(OO' = a)**. Le fil possède une raideur k et une longueur à vide $\mathbf{l_0}$. Le point **P** est repéré par l'angle **(Ox,OP) = θ**.



0.5
1.5
1.5
1.5
0.5
1
1.5

1. a/ Exprimer le vecteur $\overrightarrow{O'P}$ en fonction de **a**, **θ** dans la base polaire $\left(\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OP}}{a}\ ,\ \overrightarrow{u_\theta}\right)$, En déduire l'expression du module **O'P**.
b/ Exprimer la tension $\vec{T}$ du fil en fonction de **a, k,** $\mathbf{l_0}$ et **θ** dans cette même base.
2. a/ Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ dans la base polaire.
b/ On note $\vec{F}$ la résultante des forces exercées sur la bille **P**. Donner l'expression de la puissance $\vec{F}.\vec{v}$ en fonction de **a** et **θ**. 1
(c) En déduire l'énergie potentielle $\mathbf{E_p}$ dont dérive la force $\vec{F}$.
3. (a) On suppose vérifiées les relations suivantes entre les paramètres : 1

$$a = \frac{2mg}{k} \quad , \quad l_0 = \sqrt{3}\left(a - \frac{mg}{k}\right)$$

Quelles sont les positions d'équilibre θ_1 et θ_2 pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$? 1.5
(b) Étudier la stabilité des équilibres obtenus. 1.5

1

1

1

4

CORRECTION DE L'EXAMEN DE MECANIQUE DU POINT MATERIEL

1. a/ On remarque sur a figure de l'énoncé que :

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{OP}\\ \overrightarrow{OO'}=a\,\overrightarrow{u_x}\\ \overrightarrow{OP}=a\,\overrightarrow{u_r}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \overrightarrow{O'P}\ =\ a\,(\overrightarrow{u_x}\ +\ \overrightarrow{u_r})$$

Exprimons le vecteur unitaire $\vec{u}_x$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{u}_\theta$ pour obtenir l'expression demandée :

$$\overrightarrow{u_x}=cos\theta\,\overrightarrow{u_r}-\ sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{O'P}\ =\ a\,(1\ +cos\theta)\,\overrightarrow{u_r}\ -\ a\,sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$$

Le module de ce vecteur est :

$$\left.\begin{array}{r}\left\|\overrightarrow{O'P}\right\|=\sqrt{[a\,(1\ +cos\theta)]^2\ -\ [a\,sin\theta]^2}\\ \left\|\overrightarrow{O'P}\right\|=\sqrt{2a^2\,(1\ +cos\theta)}\\ 1\ +cos\theta=2\,cos^2\dfrac{\theta}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left\|\overrightarrow{O'P}\right\|=\ 2\,a\,cos\frac{\theta}{2}$$

b/ la bille est soumise à une force de rappel d'expression $\vec{T}=\ -k(l-l_0)\,\vec{u}$, où $l=\left\|\overrightarrow{O'P}\right\|$ et $\vec{u}$ le vecteur unitaire suivant la direction $\overrightarrow{O'P}$. On peut décomposer le vecteur $\vec{u}$ en deux composantes : $\vec{u}=cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_r-sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_\theta$.

Donc la tension du fil élastique est :

$$\vec{T}=\ -k[\left(2\,a\,cos\frac{\theta}{2}-l_0\right)(cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_r-\ sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_\theta)]$$

2.a/ Le vecteur vitesse est défini par l'expression :

$$\vec{V}=\underbrace{\dot{a}\,\vec{u}_r}_{\vec{0}}+a\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\quad\Longrightarrow\quad\vec{V}=a\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

b/ La force $\vec{F}$ est la résultante de trois forces : le poids $\vec{P}$, la tension $\vec{R}$ et la réaction:

$$\vec{F}\ =\ \vec{P}\ +\ \vec{T}+\ \vec{R}$$

$$P=\vec{F}\,.\vec{v}=\left(\vec{P}\ +\ \vec{T}+\ \vec{R}\right).\vec{v}$$

$$\vec{P}.\vec{v}=(mg\cos\theta\ \overrightarrow{u_r}-mg\sin\theta\ \overrightarrow{u_\theta}).a\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\ \Rightarrow\ \vec{P}.\vec{v}=-a\dot{\theta}mg\sin\theta$$

$$\vec{T}.\vec{v}=\ -k\left[(2acos\frac{\theta}{2}-l_0)\ (cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u_r}-\ sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u_\theta})\right].a\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\vec{T}.\vec{v}=\ \left[-k2acos\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u_r}+\ k2acos\frac{\theta}{2}sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u_\theta}+kl_0cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u_r}-\ kl_0sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u_\theta}\right].a\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\vec{T}.\vec{v}=a\dot{\theta}2kacos\frac{\theta}{2}sin\frac{\theta}{2}-a\dot{\theta}\,kl_0sin\frac{\theta}{2}\ \ \Rightarrow\ \ \vec{T}.\vec{v}=a^2\dot{\theta}2k\frac{1}{2}sin\theta\ -a\dot{\theta}\,kl_0sin\frac{\theta}{2}$$

$$\vec{R}\ \perp\vec{v}\Rightarrow\ \ \vec{R}\,.\vec{v}\ =0$$

$$P=\vec{F}\,.\vec{v}=\left(\vec{P}\ +\ \vec{T}+\ \vec{R}\right).\vec{v}\ \ \Rightarrow P=-a\dot{\theta}mg\sin\theta+\ a^2\dot{\theta}2k\frac{1}{2}sin\theta\ -a\dot{\theta}\,kl_0sin\frac{\theta}{2}$$

$$P=a\dot{\theta}\ \left[(ka-mg)\sin\theta-kl_0sin\frac{\theta}{2}\right]$$

c/ A partir de la puissance on en déduit le travail élémentaire qu'on intègre pour obtenir l'expression de l'énergie potentielle :

$$\left.\begin{array}{c}dW\ =P\ \ dt\\ dE_p\ =\ -dW\\ P\ =\ a\dot{\theta}\left[(ka-mg)sin\theta-kl_0\sin\dfrac{\theta}{2}\right]d\theta\end{array}\right]\ \Rightarrow\ dE_p\ =\ -\left[(ka-mg)sin\theta-kl_0\sin\frac{\theta}{2}\right]a\dot{\theta}dt$$

$$E_p\ =\ -a\int\left[(ka-mg)sin\theta-kl_0\sin\frac{\theta}{2}\right]d\theta$$

$$E_p\ =\ a\left[(ka-mg)cos\theta-2kl_0\cos\frac{\theta}{2}\right]+C^{te}$$

3. a / Pour trouver les positions d'équilibre on cherche les valeurs de θ pour lesquelles la dérivée première de l'énergie potentielle s'annule. On remplace d'abord *a* et l_0 qui se trouvent dans la parenthèse par leurs valeurs respectives qui sont données dans l'expression de E_p :

$$E_p = mga\left[cos\theta - 2\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

On dérive cette dernière expression par rapport à θ, puis on procède à une transformation trigonométrique adéquate pour obtenir à la fin le résultat suivant :

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{dE_p}{d\theta} = mga\left[-sin\theta + \sqrt{3}\sin\dfrac{\theta}{2}\right] \\ \sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\end{array}\right| \Longrightarrow \quad \frac{dE_p}{d\theta} = mga\sin\frac{\theta}{2}\left[\sqrt{3} - 2\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

On en déduit les deux valeurs de θ pour lesquelles la dérivée première s'annule :

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{dE_p}{d\theta} = 0 \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\end{array}\right| \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}\theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \dfrac{\pi}{3}\end{array}\right.$$

b/ D'après l'énoncé on doit déterminer les positions d'équilibre stable et d'équilibre instable. Pour cela on doit chercher le signe de la seconde dérivée de l'énergie potentielle pour les deux valeurs θ_1 et θ_2:

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mga\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 1\right]$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_1 = 0) = mga\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right] < 0$$ Equilibre instable

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\left(\theta_2 = \frac{\pi}{3}\right) = \frac{mga}{2} > 0$$ Equilibre stable