UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE POLYDISCIPLINAIRE DE SAFI
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

جامعة القاضي عياض
الكلية المتعددة التخصصات
شعبة الفيزياء- آسفي-

Corrigé de l'Épreuve de mécanique du point
Session Rattrapage : 02 Février 2017

Exercice 1:

1.a) *Application du PFD dans le référentiel galiléen R :* $\vec{F}+\vec{R}+\vec{P}=m\vec{a}$

En projetant cette relation vectorielle du PFD selon la direction de (ox), *on obtient :* $\boxed{\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0}$ 0.5pt

il vient donc : $\vec{a}=-\omega_0^2\overrightarrow{OM}$ *caractéristique d'un oscillateur harmonique libre non amorti* 0.5pt

les solutions sont de la forme : $x(t)=X_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$

les conditions initiales conduisent à : $\begin{cases} x(t=0)=X_m \\ x(t=0)=X_m\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \cos\varphi=1 \Rightarrow \varphi=0$ *donc :* $\boxed{x(t)=X_m\cos\omega_0 t}$ 0.5pt

φ : la phase à l'origine des dates : « décalage entre le phénomène réel et la courbe enregistrée »

b) On a, en dérivant deux fois x(t) : $\begin{cases} x(t)=X_m\cos(\omega_0 t) \\ \dot{x}(t)=-X_m\omega_0\sin(\omega_0 t) \\ \ddot{x}(t)=-X_m\omega_0^2\cos(\omega_0 t) \end{cases}$

x(t) solution de l'équation différentielle si seulement si $-X_m\omega_0^2\cos(\omega_0 t)+\frac{k}{m}X_m\cos(\omega_0 t)=0$

$$\Longrightarrow \left[\frac{k}{m}-\omega_0^2\right]X_m\cos(\omega_0 t)=0 \Leftrightarrow \frac{k}{m}-\omega_0^2=0 \Leftrightarrow \omega_0^2=\frac{k}{m} \quad \Rightarrow \boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\ \textit{pulsation propre}}$$ 0.5pt

0.5pt
- La période propre $\boxed{T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$: durée d'une oscillation libre.

0.5pt
- La fréquence propre $\boxed{f_0=\frac{1}{T_0}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$: nombre d'oscillations par seconde.

2.a) En présence de **frottement**, il n'y a plus conservation de l'énergie mécanique, celle-ci se dissipe sous forme de chaleur.

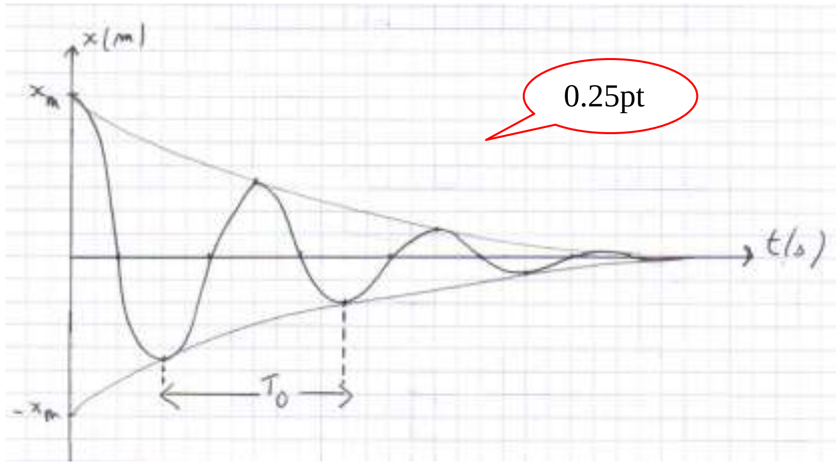
En appliquant le PFD ,on obtient : $\boxed{\vec{F}+\vec{R}_N+\vec{f}+\vec{P}=m\vec{a}}$ *où* $\vec{f}=-\lambda\vec{v}=-\lambda\dot{x}\,\vec{i}$ 1pt

En projetant cette relation vectorielle du PFD selon la direction de (ox), *on obtient :* $\boxed{\ddot{x}+\frac{\lambda}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0}$ *(Oscillateur amorti)* 1pt

b) les trois types de mouvement possible sont :

- Pour λ faible, $\frac{\lambda}{m}\prec 2\omega_0 \Rightarrow \lambda \prec 2\sqrt{mk}$: Régime **pseudo périodique** (oscillations avec une amplitude qui diminue exponentiellement)

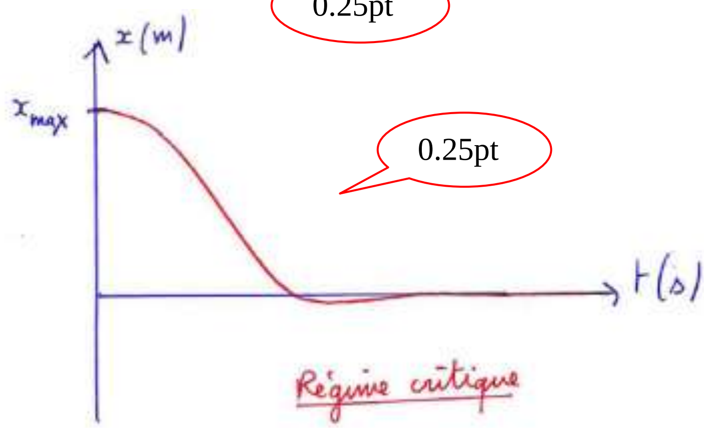
0.25pt



0.25pt

- Pour $\frac{\lambda}{m} = 2\omega_0 \Rightarrow \lambda = 2\sqrt{mk}$: Régime **critique**, retour à l'équilibre sans oscillation le plus rapidement.

0.25pt

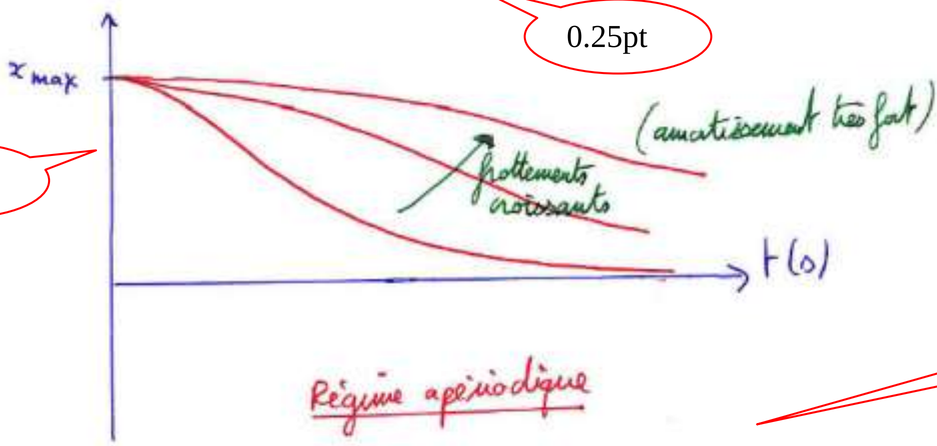


0.25pt

- Pour λ fort, $\frac{\lambda}{m} \succ 2\omega_0 \Rightarrow \lambda \succ 2\sqrt{mk}$: Régime **apériodique**, retour à l'équilibre sans oscillations.

0.25pt

0.25pt



0.5pt

Dans tous les cas : Retour à l'équilibre x = 0 au bout d'un certain temps (**régime transitoire**)

Exercice 2:

1.a) d'après le théorème du moment cinétique en O : $\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_0(M/R)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F})}$. 0.5pt

et puisque $\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ et $\overrightarrow{OM} // \vec{F}$ ($\vec{F}$ est une force centrale).

Donc $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0} \Longrightarrow \frac{d\vec{\sigma}_0(M/R)}{dt} = \vec{0} \Longrightarrow \boxed{\vec{\sigma}_0(M/R) = \overrightarrow{cte}}$ 0.5pt

b) On a $\vec{\sigma}_0(M/R)=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}=\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v} \Longrightarrow \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}=\overrightarrow{cte}$ 1pt

ce qui implique : $\overrightarrow{OM}$ *et* $\vec{v}$ sont toujours situés dans le même plan. Donc la trajectoire de m est plane dans le plan passant par O et perpendiculaire à $\vec{k}$. On choisit donc comme plan du mouvement le plan (O,x,y) et on désigne par $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ sa base polaire.

2.a) les composantes de la quantité de mouvement $\vec{p}$ dans la base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$:

On a $\boxed{\vec{p}=m\vec{v}}$ 0.5pt où $\vec{v}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R$ et $\overrightarrow{OM}=r\,\vec{e}_r \Rightarrow \vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \boxed{\vec{p}=m\left[\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right]}$ 0.5pt

b) l'expression de $\vec{\sigma}_0(M/R)$ est donnée par :

$$\boxed{\vec{\sigma}_0(M/R)=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}=r\,\vec{e}_r\wedge m\left[\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right]}$$ 0.5pt

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_0(M/R)=mr^2\dot{\theta}\,\vec{k}}$$ 1.5pt

le moment cinétique étant conservé, on en déduit que $r^2\dot{\theta}=cte$ 1pt

3. a) on a : $\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt}=m\left[\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right]\vec{e}_r+m\left[2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right]\vec{e}_\theta}$ 1pt

b) la composante de $\frac{d\vec{p}}{dt}$ suivant $\vec{e}_\theta$ est nulle car : d'après la question 2.b), on a :

$$r^2\dot{\theta}=cte \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=0 \Rightarrow 2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}=0 \Rightarrow r\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)=0$$

$\Rightarrow \boxed{r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0}$ 0.5pt 0.5pt

donc $\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt}=m\left[\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right]\vec{e}_r}$ avec $\left\|\vec{\sigma}_0(M/R)\right\|=mr^2\dot{\theta}=\sigma_0=cte$

Montrons que : $-\frac{\left(\vec{\sigma}_0(M/R)\right)^2}{m\,r^2}\times\left[\frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\vec{e}_r=m\left[\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right]\vec{e}_r$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right).\frac{dr}{dt}.\frac{dt}{d\theta}=\frac{-1}{r^2}.\dot{r}.\frac{1}{\dot{\theta}}=\frac{-\dot{r}}{r^2\dot{\theta}}=\frac{-m\dot{r}}{mr^2\dot{\theta}}=\frac{-m\dot{r}}{\sigma_0}$$

On a $\Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{-m\dot{r}}{\sigma_0}\right)=\frac{-m}{\sigma_0}\frac{d}{d\theta}(\dot{r})=\frac{-m}{\sigma_0}\frac{d}{dt}(\dot{r}).\frac{dt}{d\theta}=\frac{-m}{\dot{\theta}\sigma_0}\ddot{r}=\frac{-\ddot{r}}{r^2\dot{\theta}^2}$

$$et\ d'autre\ part: \quad \frac{\sigma_0^2}{mr^2}=\frac{m^2r^4\dot{\theta}^2}{mr^2}=mr^2\dot{\theta}^2$$

$$-\frac{\left(\vec{\sigma}_0(M/R)\right)^2}{m\,r^2}\times\left[\frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\vec{e}_r=-mr^2\dot{\theta}^2\left[\frac{1}{r}-\frac{\ddot{r}}{r^2\dot{\theta}^2}\right]\vec{e}_r=m\left[-r\dot{\theta}^2+\ddot{r}\right]\vec{e}_r$$

Alors

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\left(\vec{\sigma}_0(M/R)\right)^2}{m\,r^2}\times\left[\frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\vec{e}_r=m\left[\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right]\vec{e}_r=\frac{d\vec{p}}{dt}}$$ 1pt

4.a) Supposons que la force $\vec{F}$ est de la forme $\vec{F}=-\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r$; $\alpha\succ 0$.

En appliquant le PFD, on obtient : $\boxed{\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=-\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r \Rightarrow -\frac{\left(\vec{\sigma}_0(M/R)\right)^2}{m\,r^2}\times\left[\frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\vec{e}_r=-\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r}$ 0.5pt

En projetant cette relation vectorielle du PFD selon la direction de $(\vec{e}_r)$*, on obtient :*

$$\Rightarrow -\frac{\left(\vec{\sigma}_0(M/R)\right)^2}{m\,r^2}\times\left[\frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]=-\frac{\alpha}{r^2}$$ 1pt

$\Rightarrow \frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\alpha m}{\sigma_0^2} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{\alpha m}{\sigma_0^2} \quad (\text{équation différentielle de la trajectoire})}$

La solution de cette équation différentielle est donnée par: $\frac{1}{r} = y_p + y_g$ où y_p est la solution particulière et y_g représente la solution générale sans second membre.

On a $y_p = \frac{\alpha m}{\sigma_0{}^2}$ et $y_g = A\cos(\theta+\varphi)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{r} = \frac{\alpha m}{\sigma_0{}^2} + A\cos(\theta+\varphi)}$ où A et φ sont des constantes

0.5pt

b) l'expression de l'énergie totale E_{tot} en coordonnées polaires :

On a : $E_{tot} = E_c + E_p$ où $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p$

0.5pt

Donc $\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right]}$ et $\frac{dE_p}{dr} = \frac{\alpha}{r^2} \Rightarrow E_p = -\frac{\alpha}{r} + cte$ et si $E_p(r \to +\infty) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{E_p = -\frac{\alpha}{r}}$

0.5pt

$E_{tot} = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right] - \frac{\alpha}{r}$ or d'après la relation $\sigma_0 = mr^2\dot{\theta}$ donc E_{tot} s'écrit :

$$\boxed{E_{tot} = \frac{\sigma_0^2}{2m\,r^4} \times \left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] - \frac{\alpha}{r}}$$

1pt