القطب الجامعي - أيت ملول
Campus Universitaire - Ait Melloul
El Mokhtar El Ouardi

Année Universitaire: **2017 /2018**

**Filière SMPC**

***TD d'électrostatique***

# Série N°1

## Exercice N°1

**Champ électrostatique créé par une spire**

***E-1 Champ sur l'axe***

**E-1-1 Montrer que le champ est axial**

Pour un point M sur l'axe, tout plan contenant l'axe OM est un plan de symétrie de la distribution de charge et le champ en M appartient à tous ces plans, c'est-à-dire qu'il est porté par l'axe O$z$ et prend donc la forme $\vec{E} = E\,\vec{k}$, en notant $E$ la composante (algébrique) du champ sur l'axe O$z$.

**E-1-2 Comparer *E(-z)* et *E(z)***

Le plan de la spire est un plan de symétrie de la distribution de charge, ce qui implique qu'en deux points symétriques M de cote $z$ et M'de cote $-z$ , les champs sont symétriques, ce qui revient à dire que la composante $E$ du champ est une fonction impaire de $z$ : $E(-z) = -E(z)$

**E-1-3 Expression de *E (z)***

Le plus simple est d'exprimer tout d'abord le potentiel $V$ en un point M de l'axe de cote $z$. En effet chaque point de la spire est à la même distance $\ell = \sqrt{R^2+z^2}$ du point M. L'origine des potentiels étant prise à l'infini, le potentiel en M est donc équivalent au potentiel créé par une charge ponctuelle $Q$ située à cette distance $\ell$ , soit : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}$

Le champ $\vec{E}$ dérive de ce potentiel, ce qui s'écrit ici :

$$E(z) = -\frac{dV}{dz} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2z}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

**E-1-4 Graphe de *E(z)***

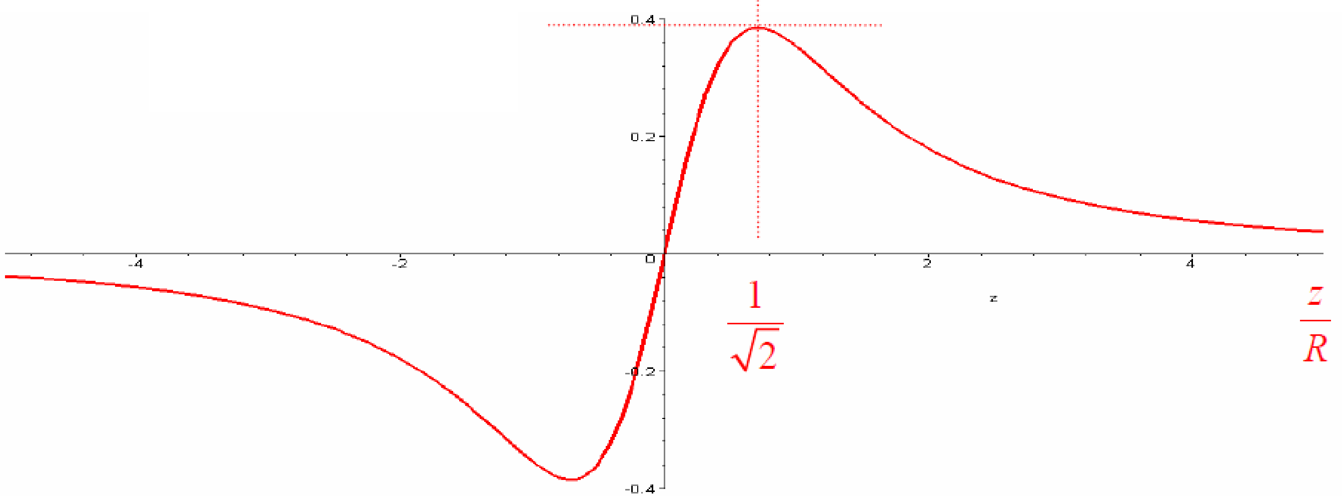
Il était utile d'étudier les variations de $E\,(z)$ et de calculer les valeurs de $z$ pour lesquelles le champ est extrémal.

$$\frac{dE(z)}{dz} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dz}\left(z\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{Q\left(R^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}}{4\pi\varepsilon_0}\left(R^2-2\,z^2\right)$$

Le champ $E$, nul en $z = 0$ , est croissant jusqu'à la valeur $z = \frac{R}{\sqrt{2}}$, puis décroissant pour $z > \frac{R}{\sqrt{2}}$,

La valeur maximale du champ est $E\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{2}{3\sqrt{3}}$

$$E_{max} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{2}{3\sqrt{3}}$$



**E-2 Champ au voisinage de l'axe**

**E-2-1 Montrer que le champ n'a pas de composante orthoradiale E**

Le plan passant par le point M et contenant l'axe Oz est un plan de symétrie de la distribution de charge. Il s'ensuit que le champ en M est contenu dans ce plan et que ce champ n'a donc pas de composante orthoradiale.

**E-2-2 Montrer que la norme de E ne dépend que de r et z.**

La distribution de charge, qui est à l'origine de l'existence du champ, est invariante par rotation autour de l'axe z. Il s'ensuit qu'aucune grandeur scalaire ne peut dépendre de l'angle θ: en particulier, la norme du champ ne dépend pas de θ et ne dépend donc que de r et z.

**E-2-3 Montrer qu'au voisinage de l'axe le flux de $\vec{E}$ est conservatif. Que peut-on dire de sa circulation sur un parcours fermé ?**

Au voisinage de l'axe il n'y a pas de charge. Le flux du champ $\vec{E}$ dans un tel voisinage doit donc, conformément au théorème de Gauss, être nul à travers une surface fermée : c'est la signification de l'expression « flux conservatif ». Cette affirmation est équivalente à dire que l'équation locale $div\,\vec{E} = 0$ est vérifiée dans un tel voisinage.

S'agissant d'un champ électrostatique, $\vec{E}$ est aussi à circulation conservative : sa circulation sur un contour fermé est nulle. Cette affirmation est équivalente à dire que $\vec{E}$ dérive d'un potentiel, soit $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$, elle-même équivalente à dire qu'en tout point de l'espace $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$.

**E-2-4 Calculer l'expression de $E_r(z,r)$ au voisinage de l'axe**

Nous pouvons décomposer le flux sortant d'une telle surface en trois contributions.
Les deux premières correspondent au flux de la composante $E_z$ à travers les deux disques de rayon r, ce qui s'écrit, dans l'approximation où r est « petit » :

$$d\phi_1 + d\phi_2 = E_z(z+dz,0)\times\pi r^2 - E_z(z,0)\times\pi r^2 = \frac{dE_z(z,0)}{dz}\times\pi r^2 dz$$

La troisième contribution correspond au flux de la composante r E à travers la paroi latérale :

$$d\phi_3 = E_r(z,r)\times 2\pi r\,dz$$

Le flux total étant nul $\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_3 = 0$, nous en déduisons :

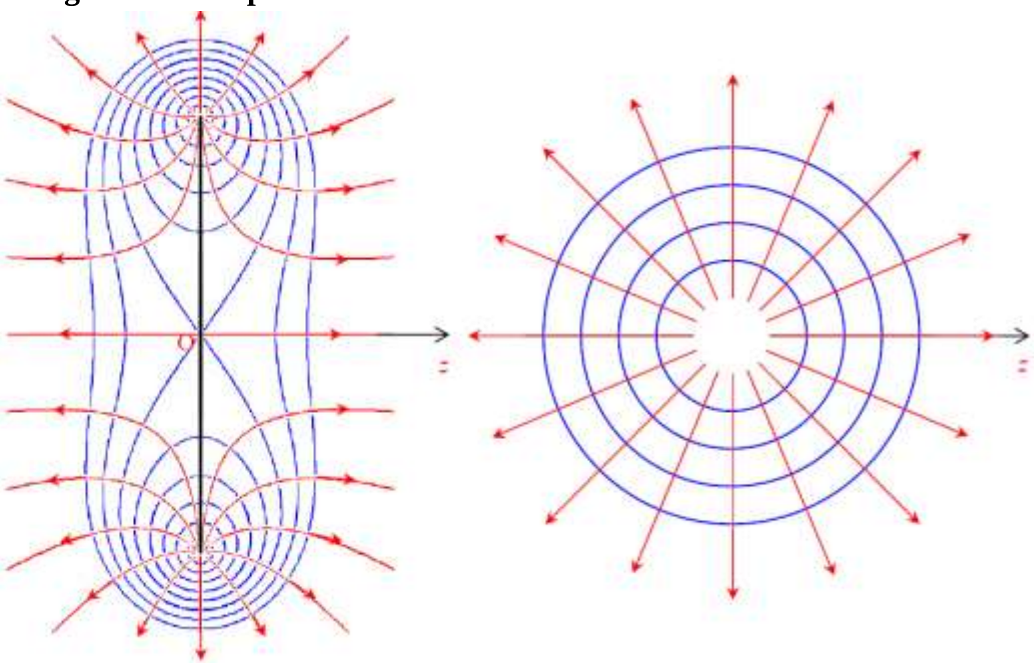
$$E_r(z,r) = -\frac{r}{2}\frac{dE_z(z,0)}{dz}$$

Soit, au voisinage de l'axe :

$$E_r(z,r) = -\frac{r}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^2-2z^2}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

**E-2-5 À l'aide d'un logiciel de simulation on trace les lignes de champ et les équipotentielles**

**E-2-5-1 Préciser les lignes de champ avec des flèches**



**E-2-5-2 Qu'obtiendrait-on comme allure des lignes de champ à grande distance ?**

La spire étant porteuse d'une charge $Q$ positive, nous obtenons à grande distance un champ monopolaire divergent à symétrie sphérique (représentées en rouge ci-dessus).

**E-2-5-3 Qu'obtiendrait-on comme allure d'équipotentielles à grande distance ?**

De la même façon, nous obtenons à grande distance des surfaces équipotentielles sphériques (représentées en bleu ci-dessus).

**E-2-5-4 Montrer que les lignes de champs sont perpendiculaires aux équipotentielles. Que se passe-t-il au centre ?**

Par définition du potentiel, nous avons $dV = -\vec{E}.d\vec{r}$. Pour un déplacement $d\vec{r}$ sur une surface équipotentielle, $dV$ est nul. Cela signifie le plus souvent que le déplacement $d\vec{r}$ est orthogonal au champ $\vec{E}$, ce qui implique une nullité du produit scalaire.

$dV$ peut également être nul dans le cas où le champ est nul : c'est ce qui se passe au centre.

**E-2-5-5 Justifier le fait que les lignes de champ se rapprochent puis s'éloignent de l'axe.**

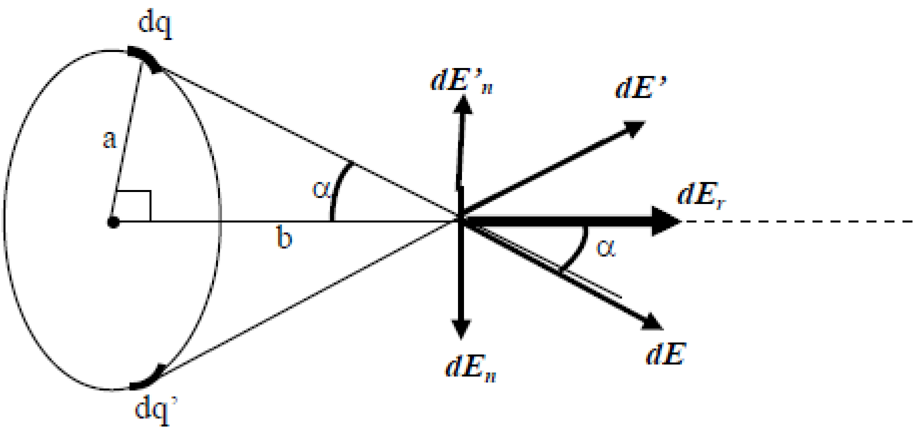
Au voisinage de l'axe, la composante radiale du champ a pour expression :

$$E_r(z,r) = -\frac{r}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(R^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left(R^2-2z^2\right)$$

Pour $Q > 0$, cette composante est négative pour $|z| < \frac{R}{\sqrt{2}}$ et dans ce cas, le champ se rapproche de l'axe Oz. Cette composante devient positive pour $|z| > \frac{R}{\sqrt{2}}$ et alors le champ s'éloigne de l'axe Oz.

**Exercice :**

Calculer le champ crée par un anneau mince charge uniformément, sur un point se trouvant sur l'axe.




CORRECTION

L'élément différentiel est dans ce cas un petit arc d'angle dθ, de longueur a dθ.

Sa charge vaut alors dq = λ adθ .

L'élément dq produit un champ

$$dE=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\lambda a d\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+b^2\right)}$$

A chaque charge *dq* lui correspond une charge *dq′* qui produit un champ *dE′*. Les composantes verticales de *dE* et *dE′* qui sont égales et opposées, s'annulent.

Le champ résultant produit par le cercle est donne par : $dE_r = dE.\cos\alpha$

$$\text{Soit, donc : } E=\int dE=\int\frac{\lambda a d\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+b^2\right)}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{r}=\frac{b}{\left(a^2+b^2\right)^{1/2}}$$

$$E=\int\frac{\lambda a b d\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}=\frac{\lambda a b}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{\lambda a b}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}2\pi a$$

Comme $Q = \lambda\, 2\pi\, a$ représenté la charge totale de l'anneau :

$$E=\frac{Qb}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}$$