

Travaux dirigés de mécanique du point matériel / Filières SMPC/session I

Série N° 1 : Calcul vectoriel et système de coordonnées

Exercice N°1

Les formules suivantes sont-elles valides dimensionnellement!? Faire une analyse dimensionnelle pour confirmer ou rectifier.

1- $F = \frac{Gm}{r}$, tels que : F est une force, G une constante exprimé en $\frac{m^3}{kg.s^2}$, m est une masse et r une unité de longueur.

2- $p = gh_1 + h_2 F$ tels que : P : une pression, g : l'accélération de la pesanteur, h_1 et h_2 : hauteurs, F : une force.

3- $\theta = \frac{b.\sin(a)}{t.\cos(c)}$, tels que : b, t des dimensions de longueur.

Exercice 2

Donner les valeurs de λ pour lesquelles les deux vecteurs $\vec{X} = \lambda\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{Y} = 2\lambda\vec{i} + \lambda\vec{j} - 4\vec{k}$ sont orthogonaux.

Exercice 3

Déterminer un vecteur unitaire parallèle et de même sens à chacun des vecteurs suivants puis un autre vecteur unitaire qui lui est perpendiculaire :

$$* \vec{a} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$$

$$* \vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

Quels sont les vecteurs perpendiculaire aux deux vecteurs : $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Exercice 4

Soient trois vecteurs $\vec{a} = (5t^2, t, -t^3)$, $\vec{b} = (\sin t, -\cos t, 0)$ et $\vec{x} = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$.

- Ecrire ces vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;

- Calculer : $\frac{d\vec{a}}{dt}$, $\frac{d\vec{b}}{dt}$ et $\frac{d\vec{x}}{dt}$;

- Calculer : $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\frac{d}{dt}(\vec{a} \wedge \vec{b})$, $\left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\|$ et $\frac{d}{dt} \|\vec{x}\|$

Exercice 5

Les coordonnées d'un point M dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont :

$$x = 3 \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \right) \quad ; \quad y = t^2 + 3t + 2 \quad ; \quad z = \frac{1-t}{1+t}$$

Calculer les dérivées première et seconde du vecteur $\overrightarrow{OM}$

Exercice 6

Convertir le vecteur suivant des coordonnées sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ en coordonnées Cartésiennes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_\varphi \vec{e}_\varphi$.

Exercice 7

Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en coordonnées cylindriques $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

Exercice 8

Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en coordonnées sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$: $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$.

Exercice N°9: Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien et considérons la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

1- Exprimer les vecteurs de la base sphérique dans la base cartésienne.

2- Calculer : $\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}$

3- En déduire $d\vec{e}_r$, $d\vec{e}_\theta$ et $d\vec{e}_\varphi$ dans la base sphérique.

4- Montrer que les différentielles des vecteurs de la base sphérique peuvent se mettre sous la forme

$$d\vec{e}_r = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r dt \quad , \quad d\vec{e}_\theta = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta dt \quad , \quad d\vec{e}_\varphi = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi dt$$

en précisant l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ des vecteurs de la base sphérique par rapport à $\mathcal{R}$.

Déduire les dérivées par rapport au temps des vecteurs de la base sphérique par rapport à $\mathcal{R}$.

5- On considère la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. Quel est son vecteur rotation par rapport à $\mathcal{R}$? En utilisant les résultats précédents, calculer la dérivée par rapport au temps des vecteurs de la base cylindrique par rapport à $\mathcal{R}$.

6- Considérons un vecteur $\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_\varphi \vec{e}_\varphi$. En utilisant les résultats précédents, calculer la dérivée par rapport au temps de $\vec{V}$ par rapport à $\mathcal{R}$

Exercice N°10: Déplacement élémentaire

On se propose de traiter dans cet exercice le déplacement élémentaire dans les trois systèmes de coordonnées, cartésiennes, cylindriques et sphériques et ce en utilisant les résultats de l'exercice 9.

Considérons un repère cartésien $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ respectivement les bases cylindrique et sphérique. Soit M un point repéré par $\vec{OM}$ par rapport à $\mathcal{R}$. On considère un déplacement infinitésimal de M en M' tel que M' est très proche de M. On note alors le déplacement élémentaire par $\vec{OM}' - \vec{OM} = d\vec{MM}' = d\vec{OM}$.

1- Dans le repère cartésien, $\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$. Calculer le déplacement $d\vec{OM}$ par rapport à $\mathcal{R}$ dans la base cartésienne.

2- Rappeler le vecteur rotation de la base cylindrique par rapport à $\mathcal{R}$. Partant de $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k}$, calculer le déplacement $d\vec{OM}$ par rapport $\mathcal{R}$ dans la base cylindrique.

3- Rappeler le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à $\mathcal{R}$. Dans la base sphérique $\vec{OM} = r \vec{e}_r$, calculer le déplacement $d\vec{OM}$ par rapport à $\mathcal{R}$ et ce dans cette base.

Exercice 11: Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Considérons la position d'un point M dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Considérons un repère cartésien $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ respectivement les bases cylindrique et sphérique associées à ce repère.

1- Calculer : $\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \vec{k}}{\partial \varphi}$

2- En déduire $d\vec{e}_\rho$ et $d\vec{e}_\varphi$ dans la base cartésienne.

3- Montrer que les différentielles des vecteurs de la base cylindrique peuvent se mettre sous la forme :

$$d\vec{e}_\rho = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho dt \quad , \quad d\vec{e}_\varphi = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi dt$$

en précisant l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ des vecteurs de la base cylindrique par rapport à $\mathcal{R}$.

Déduire les dérivées par rapport au temps des vecteurs de la base cylindrique dans $\mathcal{R}$.

4- Quel est le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à $\mathcal{R}$? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire les expressions de : $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$, $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$