Travaux dirigés de mécanique du point matériel / Filières SMPC/session I

Série N° 1 : Calcul vectoriel et système de coordonnées

Exercice N°1

Les formules suivantes sont-elles valides dimensionnellement!? Faire une analyse dimensionnelle pour confirmer ou rectifier.

1- $F = \frac{G\,m}{r}$, tels que : F est une force, G une constante exprimé en $\frac{m^3}{kg.s^2}$, m est une masse et r une unité de longueur.

2- $p = gh_1 + h_2\,F$ tels que : P : une pression, g : l'accélération de la pesanteur, h_1 et h_2 : hauteurs, F : une force.

3- $\theta = \frac{b.\sin(a)}{t.\cos(c)}$, tels que : b, t des dimensions de longueur.

Correction de l'exercice N°1

1- $F = \frac{G\,m}{r}$ L'équation peut-être écrite sous la forme dimensionnelle suivante :

$$[F]^{\alpha}.[G]^{\beta}.[m]^{\gamma}.[r]^{\delta} = 1 \qquad (1)$$

Tels que : $[F] = M.L.T^{-2}$; $[G] = L^3.M^{-1}T^{-2}$; $[m] = M$; $[r] = L$

Remplaçons les dimensions des paramètres de l'équation (1) par ses expressions dimensionnelle de bas, on obtient : $(M.L.T^{-2})^{\alpha}.(L^3.M^{-1}T^{-2})^{\beta}.M^{\gamma}.L^{\delta} = 1$ **Soit :** $L^{\alpha+3\beta+\delta}.M^{\alpha-\beta+\gamma}.T^{-2\alpha-2\beta} = 1$

Cette équation est impossible physiquement, car on ne peut pas trouver une relation entre les dimensions de base. Mais mathématiquement, cette équation est valide si est seulement si les exposants des paramètres de base sont nuls. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha + 3\beta + \delta = 0} \\ \boldsymbol{\alpha - \beta + \gamma = 0} \\ \boldsymbol{-2\alpha - 2\beta = 0} \end{cases}$$

Qui a pour solution :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha + 3\beta + \delta = 0} & \Rightarrow \boldsymbol{\delta = 2\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha - \beta + \gamma = 0} & \Rightarrow \boldsymbol{\gamma = -2\alpha} \\ \boldsymbol{-2\alpha - 2\beta = 0} & \Rightarrow \boldsymbol{\beta = -\alpha} \end{cases}$$

Remplaçons ces valeurs en fonction de β en (1) , on obtient :

$$[F]^{\alpha}.[G]^{-\alpha}.[m]^{-2\alpha}.[r]^{2\alpha} = 1$$

Et si on pose $\alpha = 1$: $[F]^1.[G]^{-1}.[m]^{-2}.[r]^2 = 1$

Qui est équivalente à $[F] = [G]\,\frac{[m]^2}{[r]^2}$

En comparaison avec l'équation (1), cette dernière peut être représentée physiquement sous la forme : $F = k.G.\frac{m^2}{r^2}$, tel que k : une constante sans dimension.

Alors, dans (1) il manque un paramètre $\frac{m}{r}$ pour que l'équation soit correcte dimensionnellement.

2- $p = gh_1 + h_2\,F$

Cette équation peut-être présenté sous cette forme : $p = \alpha\,gh_1 + \beta\,h_2\,F$.

Pour vérifier validité de l'équation, on analyse ses dimensions terme par terme, c'est-à-dire, représenter l'équation sous la forme :

$$\begin{cases}[p] = [\alpha][g][h_1] \\ [p] = [\beta][h_2][F]\end{cases}$$

Puisque $[p] = ML^{-1}T^{-2}$; $[g] = L.T^{-2}$ et $[h_1] = L$ donc$[\alpha] = M.L^{-3}$ qui est la dimension de la masse volumique.

Puisque $[p] = ML^{-1}T^{-2}$; $[h_2] = L$ et $[F] = M.L.T^{-2}$ donc $[\beta] = L^{-3}$.

L'équation du premier terme doit être multipliée par la masse volumique (ρ), par contre le deuxième terme doit être multiplié par un paramètre qui a la dimension 1/L³

3- $\theta = \frac{b.\sin(a)}{t.\cos(c)}$ Les termes sin(a) et cos(b) sont des termes sont dimensions, car : $[\sin(a)] = [\cos(c)] = L/L$, alors : $[\theta] = \frac{[b].[\sin(a)]}{[t].[\cos(c)]} = \frac{L}{L}$ et l'équation est correcte

Exercice 2

Donner les valeurs de λ pour lesquelles les deux vecteurs $\vec{X} = \lambda\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{Y} = 2\lambda\vec{\imath} + \lambda\vec{\jmath} - 4\vec{k}$ sont orthogonaux.

Correction de l'exercice 2

Il faut que le produit scalaire soit nul : $\vec{X}.\vec{Y} = 2\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$ c.à.d. $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

Donne $\lambda = 2$ ou $\lambda = -1$

Exercice 3

Déterminer un vecteur unitaire parallèle et de même sens à chacun des vecteurs suivants puis un autre vecteur unitaire qui lui est perpendiculaire :

$$* \ \vec{a} = 2\vec{\imath} - 6\,\vec{\jmath}$$
$$* \ \vec{b} = 4\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath}$$

Quels sont les vecteurs perpendiculaire aux deux vecteurs : $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Correction de l'exercice 3

Les vecteurs unitaires parallèles et de même sens sont :

$$\overrightarrow{u_a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{2\,\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}}{\sqrt{40}} = \frac{\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}}{\sqrt{10}} \qquad ; \qquad \overrightarrow{u_b} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{4\,\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}}{5}$$

Les vecteurs unitaires perpendiculaires sont :

$$\overrightarrow{u_a}' = \frac{-3\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}}{\sqrt{10}} \ ou \ \frac{3\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}}{\sqrt{10}} \qquad ; \qquad \overrightarrow{u_b}' = \frac{-3\,\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}}{5} \ ou \ \frac{3\,\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}}{5}$$

(Le premier est directement perpendiculaire alors que le deuxième l'est indirectement).

Les vecteurs unitaires perpendiculaires à : $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{array}{c} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\vec{\imath} - 0\,\vec{\jmath} + 30\,\vec{k}$$

$$\vec{u} = \pm \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|} = \pm\frac{1}{30}\left(0\,\vec{\imath} - 0\vec{\jmath} + 30\,\vec{k}\right) = \pm\,\vec{k}$$

Exercice 4

Soient trois vecteurs $\vec{a} = (5t^2, t, -t^3)$, $\vec{b} = (sint, -cost, 0)$ et $\vec{x} = (cos2t, sin2t, 0)$.

- Ecrire ces vecteurs dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$;
- Calculer : $\frac{d\vec{a}}{dt}$, $\frac{d\vec{b}}{dt}$ et $\frac{d\vec{x}}{dt}$;
- Calculer : $\frac{d}{dt}(\vec{a}.\vec{b})$, $\frac{d}{dt}(\vec{a} \wedge \vec{b})$, $\left\|\frac{d\vec{x}}{dt}\right\|$ et $\frac{d}{dt}\|\vec{x}\|$

Correction de l'exercice 4

$\vec{a} = 5t^2\,\vec{\imath} + t\,\vec{\jmath} - t^3\,\vec{k}$, $\vec{b} = sint\,\vec{\imath} - cost\,\vec{\jmath}$ et $\vec{x} = cos2t\,\vec{\imath} + sin2t\,\vec{\jmath}$

$\frac{d\vec{a}}{dt} = 10t\,\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\,t^2$; $\frac{d\vec{b}}{dt} = cost\,\vec{\imath} + sin\,\vec{\jmath}$; $\frac{d\vec{x}}{dt} = -2\,sin2t\,\vec{\imath} + 2cos2t\,\vec{\jmath}$

$$\frac{d(\vec{a}.\vec{b})}{dt} = 11sint + (15t - 1)cost$$

$$\frac{d(\vec{a} \wedge \vec{b})}{dt} = (-3t^2\,cost + t^2\,sint)\vec{\imath} - (3t^2\,sint + t^3cost)\vec{\jmath} - [11tcost + (1 - 5t^2)sint]\vec{k}$$

$\frac{d\vec{x}}{dt} = -2\,sin2t\,\vec{\imath} + 2cos2t\,\vec{\jmath}$ et $\|\vec{x}\| = 1$ d'où la dérivée de cette norme est nul, alors que $\left\|\frac{d\vec{x}}{dt}\right\| = 2$

Exercice 5

Les coordonnées d'un point M dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont :

$$x = 3\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) \quad ; \quad y = t^2 + 3t + 2 \quad ; \quad z = \frac{1-t}{1+t}$$

Calculer les dérivées première et seconde du vecteur $\overrightarrow{OM}$

Correction de l'exercice 5

$$\overrightarrow{OM} = 3\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)\vec{\imath} + (t^2 + 3t + 2)\vec{\jmath} + \left(\frac{1-t}{1+t}\right)\vec{k}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}}\,\vec{\imath} + (2t + 3)\vec{\jmath} - \frac{2}{(1+t)^2}\,\vec{k}$$

et

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{3}{4}e^{-\frac{t}{2}}\,\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \frac{4}{(1+t)^3}\,\vec{k}$$

Exercice 6

Convertir le vecteur suivant des coordonnées sphériques $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ en coordonnées Cartésiennes $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$: $\vec{V} = V_r\vec{e_r} + V_\theta\vec{e_\theta} + V_\varphi\vec{e_\varphi}$.

Correction de l'exercice 6

Le vecteur s'écrit : $\vec{V} = V_r\vec{e_r} + V_\theta\vec{e_\theta} + V_\varphi\vec{e_\varphi}$

Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, il s'écrit $\vec{V} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}$

Rappelons-nous des expressions des vecteurs unitaires $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ en fonction de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$:

$$\vec{e_r} = sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\,\vec{\jmath} + cos\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{e_\theta} = cos\theta cos\varphi\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\,\vec{\jmath} - sin\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{e_\varphi} = -sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

D'où en remplaçant :

$$\vec{V} = V_r(sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\,\vec{\jmath} + cos\theta\,\vec{k}) + V_\theta(cos\theta cos\varphi\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\,\vec{\jmath} - sin\theta\,\vec{k}) + V_\varphi(-sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath})$$

Développons et organisons la dernière équation pour trouver l'expression du vecteur $\vec{V}$ en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V} = (V_r sin\theta cos\varphi + V_\theta cos\theta cos\varphi - V_\varphi\, sin\varphi)\,\vec{\imath} + (V_r\, sin\theta sin\varphi + V_\theta\, cos\theta sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi)\,\vec{\jmath} + (V_r cos\theta - V_\theta\, sin\theta)\,\vec{k}$$

Les coordonnées cartésiennes sont :

$$X = V_r sin\theta cos\varphi + V_\theta cos\theta cos\varphi - V_\varphi\, sin\varphi$$
$$Y = V_r\, sin\theta sin\varphi + V_\theta\, cos\theta sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi$$
$$Z = V_r cos\theta - V_\theta\, sin\theta$$

Le vecteur . $\vec{V} = V_r\vec{e_r} + V_\theta\vec{e_\theta} + V_\varphi\vec{e_\varphi}$ s'écrit donc dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

$$\vec{V} = (V_r sin\theta cos\varphi + V_\theta cos\theta cos\varphi - V_\varphi\, sin\varphi)\,\vec{\imath} + (V_r\, sin\theta sin\varphi + V_\theta\, cos\theta sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi)\,\vec{\jmath} + (V_r cos\theta - V_\theta\, sin\theta)\,\vec{k}$$

Exercice 7

Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ en coordonnées cylindriques $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$: $\vec{V} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}$

Correction de l'exercice 7

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$ s'écrit sous la forme : $\vec{V} = V_\rho\vec{e_\rho} + V_\varphi\vec{e_\varphi} + V_z\vec{e_z}$
Connaissant les expressions des vecteurs unitaires $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$ en fonction de $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On peut écrire :

$$\left.\begin{array}{r} \vec{e_\rho} = cos\varphi\vec{\imath} + sin\varphi\,\vec{\jmath} \\ \vec{e_\varphi} = -sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\,\vec{\jmath} \\ \vec{e_z} = \vec{k} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{V} = V_\rho(cos\varphi\vec{\imath} + sin\varphi\,\vec{\jmath}) + V_\varphi(-sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\,\vec{\jmath}) + V_z\vec{k}$$

En organisant l'expression obtenue elle devient :

$$\vec{V} = \left(V_\rho cos\varphi - V_\varphi sin\varphi\right)\vec{\imath} + \left(V_\rho\, sin\varphi + V_\varphi\, cos\varphi\right)\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$$

On obtient un système d'équations de trois équations à trois inconnues $V_\rho,\ V_\varphi\ et\ V_z$

$$X = V_\rho cos\varphi - V_\varphi sin\varphi$$
$$Y = V_\rho\, sin\varphi + V_\varphi\, cos\varphi$$
$$Z = V_z$$

On a le droit de choisir la méthode que nous maîtrisons le mieux pour arriver au résultat attendu. Si on choisit la méthode des matrices le raisonnement est le suivant :
On crée une matrice de déplacement à partir du système d'équations obtenu :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_\rho \\ V_\varphi \\ V_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_\rho \\ V_\varphi \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Le résultat se déduit directement :

$$V_\rho = Xcos\varphi + Ysin\varphi \quad ; \quad V_\varphi = -X\,sin\varphi + Y\,cos\varphi \quad ; \quad V_z = Z$$
$$\vec{V} = (Xcos\varphi + Ysin\varphi)\,\vec{e_\rho} + (-X\,sin\varphi + Y\,cos\varphi)\vec{e_\varphi} + Z\vec{e_z}$$

Exercice 8

Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ en coordonnées sphériques $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$: $\vec{V} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}$.

Correction de l'exercice 8

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ s'écrit sous la forme : $\vec{V} = V_r\vec{e_r} + V_\theta\vec{e_\theta} + V_\varphi\vec{e_\varphi}$
Connaissant les expressions des vecteurs unitaires $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$en fonction de $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On peut écrire :

$$\vec{e_r} = sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\,\vec{\jmath} + cos\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{e_\theta} = cos\theta cos\varphi\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\,\vec{\jmath} - sin\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{e_\varphi} = -\,sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{V} = V_r(sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\,\vec{\jmath} + cos\theta\,\vec{k}) + V_\theta(cos\theta cos\varphi\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\,\vec{\jmath} - sin\theta\,\vec{k}) + V_\varphi(-\,sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath})$$

Développons puis organisons l'équation précédente pour obtenir :

$$\vec{V} = (V_r sin\theta cos\varphi + V_\theta cos\theta cos\varphi - V_\varphi\, sin\varphi)\,\vec{\imath} + (V_r\, sin\theta sin\varphi + V_\theta\, cos\theta sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi)\,\vec{\jmath} + (V_r cos\theta - V_\theta\, sin\theta)\,\vec{k}$$

On constitue un système de trois équations à trois inconnues V_r, V_θ *et* V_φ:

$$\begin{cases} X = V_r sin\theta cos\varphi + V_\theta cos\theta cos\varphi - V_\varphi\, sin\varphi \\ Y = V_r\, sin\theta sin\varphi + V_\theta\, cos\theta sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi \\ Z = V_r cos\theta - V_\theta\, sin\theta \end{cases}$$

Si on choisit la méthode des matrices, qui a fait preuve d'à aboutir au résultat escompté très facilement et très rapidement, on doit d'abord construire la matrice de déplacement à partir du système d'équations précédent :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin\theta cos\varphi & cos\theta cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\theta sin\varphi & cos\theta sin\varphi & \cos\varphi \\ cos\theta & -sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin\theta cos\varphi & sin\theta sin\varphi & cos\theta \\ cos\theta cos\varphi & cos\theta sin\varphi & -sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

On trouve :

$$V_r = Xsin\theta cos\varphi + Ysin\theta sin\varphi + Z\,cos\theta$$
$$V_\theta = Xcos\theta cos\varphi + Ycos\theta sin\varphi - Zsin\theta$$
$$V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi$$

En fin de compte l'expression du vecteur $\vec{V} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}$ en coordonnées sphériques est :

$$\vec{V} = (Xsin\theta cos\varphi + Ysin\theta sin\varphi + Z\,cos\theta\,)\vec{e_r} + (Xcos\theta cos\varphi + Ycos\theta sin\varphi - Zsin\theta)\vec{e_\theta} + (-X\sin\varphi + Y\cos\varphi)\vec{e_\varphi}$$

Exercice N°9: Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Soit $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère cartésien et considérons la base sphérique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$.

1- Exprimer les vecteurs de la base sphérique dans la base cartésienne.

2- Calculer : $\frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\varphi}$

3- En déduire $d\vec{e_r}$, $d\vec{e_\theta}$ et $d\vec{e_\varphi}$ dans la base sphérique.

4- Montrer que les différentielles des vecteurs de la base sphérique peuvent se mettre sous la forme

$$d\overrightarrow{e_r} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_r}\,dt \quad , \quad d\overrightarrow{e_\theta} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_\theta}\,dt \quad , \quad d\overrightarrow{e_\varphi} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_\varphi}\,dt$$

en précisant l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ des vecteurs de la base sphérique par rapport à $\Re$. Déduire les dérivées par rapport au temps des vecteurs de la base sphérique par rapport à $\Re$.

5- On considère la base cylindrique $(\overrightarrow{e_\rho},\ \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$. Quel est son vecteur rotation par rapport à $\Re$? En utilisant les résultats précédents, calculer la dérivée par rapport au temps des vecteurs de la base cylindrique par rapport à $\Re$.

6- Considérons un vecteur $\vec{V} = V_r\overrightarrow{e_r} + V_\theta\overrightarrow{e_\theta} + V_\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$. En utilisant les résultats précédents, calculer la dérivée par rapport au temps de $\vec{V}$ par rapport à $\Re$.

Correction de l'exercice N°9: Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Soit $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère cartésien et considérons la base sphérique $(\overrightarrow{e_r},\ \overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi})$.

1- Exprimons les vecteurs de la base sphérique dans la base cartésienne :

$$\overrightarrow{e_r} = cos\theta\,\vec{k} + sin\theta\,\overrightarrow{e_\rho} = cos\theta\,\vec{k} + sin\theta\,(cos\varphi\vec{\imath} + sin\varphi\,\vec{\jmath}) = cos\varphi sin\theta\,\vec{\imath} + sin\varphi sin\theta\,\vec{\jmath} + cos\theta\,\vec{k}$$

nous sommes passés par le vecteur $\overrightarrow{e_\rho}$ de la base cylindrique.

De même, pour $\overrightarrow{e_\theta}$, nous avons

$$\overrightarrow{e_\theta} = -sin\theta\,\vec{k} + cos\theta\,\overrightarrow{e_\rho} = -sin\theta\,\vec{k} + cos\theta\,(cos\varphi\vec{\imath} + sin\varphi\,\vec{\jmath}) = cos\varphi cos\theta\,\vec{\imath} + sin\varphi cos\theta\,\vec{\jmath} - sin\theta\,\vec{k}$$

et finalement

$$\overrightarrow{e_\varphi} = -sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

2- Calculons les dérivées partielles suivantes sachant que les vecteurs de la base cartésienne sont fixes :

$$\frac{\partial\overrightarrow{e_r}}{\partial\theta} = cos\varphi cos\theta\,\vec{\imath} + sin\varphi cos\theta\,\vec{\jmath} - sin\theta\,\vec{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\overrightarrow{e_r}}{\partial\varphi} = -sin\varphi sin\theta\,\vec{\imath} + cos\varphi sin\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{e_\theta}}{\partial\theta} = -cos\varphi sin\theta\,\vec{\imath} - sin\varphi sin\theta\,\vec{\jmath} - cos\theta\,\vec{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\overrightarrow{e_\theta}}{\partial\varphi} = -sin\varphi cos\theta\,\vec{\imath} + cos\varphi cos\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{e_\varphi}}{\partial\theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\overrightarrow{e_\varphi}}{\partial\varphi} = -cos\varphi\vec{\imath} - sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

3- Pour établir la différentielle de chacun des vecteurs de la base, on a

$$d\overrightarrow{e_r} = \frac{\partial\overrightarrow{e_r}}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial\overrightarrow{e_r}}{\partial\varphi}d\varphi = \left(cos\varphi cos\theta\,\vec{\imath} + sin\varphi cos\theta\,\vec{\jmath} - sin\theta\,\vec{k}\right)d\theta + (-sin\varphi\,\vec{\imath} + cos\varphi\,\vec{\jmath})sin\theta\,d\varphi$$
$$= d\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + sin\theta\,d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

De la même manière, on établit la différentielle de $\overrightarrow{e_\theta}$ comme suit

$$d\overrightarrow{e_\theta} = \frac{\partial\overrightarrow{e_\theta}}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial\overrightarrow{e_\theta}}{\partial\varphi}d\varphi$$
$$= \left(-cos\varphi sin\theta\,\vec{\imath} - sin\varphi sin\theta\,\vec{\jmath} - cos\theta\,\vec{k}\right)d\theta + (-sin\varphi cos\theta\,\vec{\imath} + cos\varphi cos\theta\,\vec{\jmath})d\varphi$$
$$= -\,d\theta\,\overrightarrow{e_r} + cos\theta\,d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

et finalement

$$d\overrightarrow{e_\varphi} = 0\,d\theta + (-cos\varphi\vec{\imath} - sin\varphi\,\vec{\jmath})\,d\varphi = -\,d\varphi\overrightarrow{e_\rho} = -\,d\varphi(sin\theta\overrightarrow{e_r} + cos\theta\overrightarrow{e_\theta})$$

4- Pour cette question, il suffit de faire apparaitre les différentielles des vecteurs de la base sphérique sous la forme demandée. On a $\vec{k} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\ \overrightarrow{e_\theta}$, , ce qui donne $\overrightarrow{e_r}\wedge\vec{k} = \sin\theta\ \overrightarrow{e_\varphi}$ et $\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_\varphi}\wedge\overrightarrow{e_r}$, ainsi on peut écrire

$$d\overrightarrow{e_r} = d\theta\,\overrightarrow{e_\varphi}\wedge\overrightarrow{e_r} + d\varphi\,\vec{k}\wedge\overrightarrow{e_r} = \left(d\theta\,\overrightarrow{e_\varphi} + d\varphi\,\vec{k}\right)\wedge\overrightarrow{e_r} = \left(dt\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\varphi} + dt\,\dot{\varphi}\,\vec{k}\right)\wedge\overrightarrow{e_r} = dt\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{e_r}$$

Avec $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\varphi}\,\vec{k}$

De même, on a

$$\overrightarrow{e_\theta} = -\,d\theta\,\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\,d\varphi\overrightarrow{e_\varphi} = d\theta\,\overrightarrow{e_\varphi}\wedge\overrightarrow{e_\theta} + d\varphi\vec{k}\wedge\overrightarrow{e_\theta} = dt\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{e_\theta}$$

Finalement, reprenons la différentielle de $\overrightarrow{e_\varphi}$:

$$d\overrightarrow{e_\varphi} = -\,d\varphi(\sin\theta\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\overrightarrow{e_\theta}) = -\,dt\dot{\varphi}(\sin\theta\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\overrightarrow{e_\theta}) = -\,dt\dot{\varphi}\left(\sin\theta\overrightarrow{e_\theta}\wedge\overrightarrow{e_\varphi} - \cos\theta\overrightarrow{e_r}\wedge\overrightarrow{e_\varphi}\right)$$
$$= -\,dt\dot{\varphi}(\sin\theta\overrightarrow{e_\theta} - \cos\theta\overrightarrow{e_r})\wedge\overrightarrow{e_\varphi} = dt\dot{\varphi}\,\vec{k}\wedge\overrightarrow{e_\varphi}$$

Les dérivées par rapport au temps s'obtiennent facilement en divisant par dt :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{e_r}$$
$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{e_\theta}$$
$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{e_\varphi}$$

5- Considérons cette fois-ci la base cylindrique. Le seul angle qui varie est φ, d'où le vecteur rotation de la base cylindrique par rapport à la base cartésienne est $\dot{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$. En appliquant les résultats précédents, on obtient

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\varphi}\vec{\mathrm{k}}\wedge\overrightarrow{e_\rho} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$
$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\varphi}\vec{\mathrm{k}}\wedge\overrightarrow{e_\varphi} = -\,\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$
$$\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

6- Soit $\vec{V} = V_r\overrightarrow{e_r} + V_\theta\overrightarrow{e_\theta} + V_\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$. Sa dérivée par rapport au temps est

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_r}{dt}\overrightarrow{e_r} + V_r\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} + \frac{dV_\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} + V_\theta\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} + \frac{dV_\varphi}{dt}\overrightarrow{e_\varphi} + V_\varphi\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}$$
$$= \frac{dV_r}{dt}\overrightarrow{e_r} + \frac{dV_\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{dV_\varphi}{dt}\overrightarrow{e_\varphi} + V_r\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{e_r}\right) + V_\theta\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{e_\theta}\right) + V_\varphi\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{e_\varphi}\right)$$
$$= \frac{dV_r}{dt}\overrightarrow{e_r} + \frac{dV_\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{dV_\varphi}{dt}\overrightarrow{e_\varphi} + \vec{\Omega}\wedge\left(V_r\overrightarrow{e_r} + V_\theta\overrightarrow{e_\theta} + V_\varphi\overrightarrow{e_\varphi}\right)$$
$$= \frac{dV_r}{dt}\overrightarrow{e_r} + \frac{dV_\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{dV_\varphi}{dt}\overrightarrow{e_\varphi} + \vec{\Omega}\wedge\vec{V}$$

qui reste une relation générale.

Exercice N°10: Déplacement élémentaire

On se propose de traiter dans cet exercice le déplacement élémentaire dans les trois systèmes de coordonnées, cartésiennes, cylindriques et sphériques et ce en utilisant les résultats de **l'exercice 9**.

Considérons un repère cartésien $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soient $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$ et $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ respectivement les bases cylindrique et sphérique. Soit M un point repéré par $\overrightarrow{OM}$ par rapport à $\mathcal{R}$. On considère un déplacement infinitésimal de M en M′ tel que M′ est très proche de M. On note alors le déplacement élémentaire par $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$.

1- Dans le repère cartésien, $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$. Calculer le déplacement $d\overrightarrow{OM}$ par rapport à R dans la base cartésienne.

2- Rappeler le vecteur rotation de la base cylindrique par rapport à R. Partant de $\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho} + z\,\vec{k}$, calculer le déplacement $d\overrightarrow{OM}$ par rapport R dans la base cylindrique.

3- Rappeler le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à R. Dans la base sphérique $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$, calculer le déplacement $d\overrightarrow{OM}$ par rapport à R et ce dans cette base.

Correction de l'exercice N°10: Déplacement élémentaire

Considérons un repère cartésien $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soient $(\overrightarrow{e_\rho},\ \overrightarrow{e_\varphi},\vec{k})$ et $(\overrightarrow{e_r},\ \overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi})$ respectivement les bases cylindrique et sphérique. Soit M un point repéré par $\overrightarrow{OM}$ par rapport à $\mathcal{R}$. On considère un déplacement infinitésimal de M en M′ tel que M′ est très proche de M. On note alors le déplacement élémentaire par $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$.

1- La base cartésienne est fixe et donc la dérivée de ces vecteurs par rapport au temps dans R est nulle. D'où, le déplacement élementaire dans cette base est

$$d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$$

2- Le vecteur rotation de la base cylindrique dans $\mathcal{R}$ est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\,\vec{k}$. Ceci peut être démontré facilement en explicitant la base cylindrique dans la base cartésienne.

Le déplacement élémentaire dans cette base est

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{OM} &= d\left(\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + z\,\vec{k}\right) = d\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\overrightarrow{e_\rho} + dz\,\vec{k} = d\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho dt\ \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_\rho} + dz\,\vec{k} \\ &= d\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\varphi\ \vec{k} \wedge \overrightarrow{e_\rho} + dz\,\vec{k} = d\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi} + dz\,\vec{k} \end{aligned}$$

3- Pour ce qui est de la base sphérique, le vecteur rotation est $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\varphi}(cos\theta\overrightarrow{e_r} - sin\theta\overrightarrow{e_\theta})$.

Ainsi pour le déplacement élémentaire dans cette base, on trouve

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{OM} &= d(r\,\overrightarrow{e_r}) = dr\,\overrightarrow{e_r} + r\,d\overrightarrow{e_r} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rdt\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_r} \\ &= dr\,\overrightarrow{e_r} + r(d\theta\,\overrightarrow{e_\varphi} \wedge \overrightarrow{e_r} + d\varphi[cos\theta\overrightarrow{e_r} - sin\theta\overrightarrow{e_\theta}] \wedge \overrightarrow{e_r} \\ &= dr\,\overrightarrow{e_r} + r\left(d\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + d\varphi sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}\right) = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + rd\varphi sin\theta\overrightarrow{e_\varphi} \end{aligned}$$

Exercice 11: Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Considérons la position d'un point M dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Considérons un repère cartésien $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soient $(\overrightarrow{e_\rho},\ \overrightarrow{e_\varphi},\vec{k})$ et $(\overrightarrow{e_r},\ \overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi})$ respectivement les bases cylindrique et sphérique associées à ce repère.

1- Calculer : $\dfrac{\partial\overrightarrow{e_\rho}}{\partial\varphi}$, $\dfrac{\partial\overrightarrow{e_\varphi}}{\partial\varphi}$, $\dfrac{\partial\vec{k}}{\partial\varphi}$

2- En déduire $d\overrightarrow{e_\rho}$ et $d\overrightarrow{e_\varphi}$ dans la base cartésienne.

3- Montrer que les différentielles des vecteurs de la base cylindrique peuvent se mettre sous la forme :

$$d\overrightarrow{e_\rho} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_\rho}\,dt \quad , \quad d\overrightarrow{e_\varphi} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_\varphi}\,dt$$

en précisant l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ des vecteurs de la base cylindrique par rapport à R. Déduire les dérivées par rapport au temps des vecteurs de la base cylindrique dans R.

4- Quel est le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à R? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire les expressions de : $\frac{d\vec{e_r}}{dt}$, $\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$ et $\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}$

Correction de l'exercice 11: Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Considérons la position d'un point M dans le repère $R(O,xyz)$. Soient $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath},\vec{k})$, $(\vec{e_\rho},\ \vec{e_\varphi},\vec{k})$ et $(\vec{e_r},\ \vec{e_\theta},\vec{e_\varphi})$ respectivement les bases cartésienne, cylindrique et sphérique associées à ce repère.

1- Exprimons d'abord les vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne :

$$\vec{e_\rho} = cos\varphi\vec{\imath} + \ sin\varphi\,\vec{\jmath}$$
$$\vec{e_\varphi} = -sin\varphi\vec{\imath} + \ cos\varphi\,\vec{\jmath}$$
$$\vec{k} = \vec{k}$$

Sachant que la base cartésienne est une base fixe, alors

$$\frac{\partial\vec{e_\rho}}{\partial\varphi} = \ -sin\varphi\vec{\imath} + \ cos\varphi\,\vec{\jmath} \ = \ \vec{e_\varphi}$$
$$\frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\varphi} = -cos\varphi\vec{\imath} - \ sin\varphi\,\vec{\jmath} \ = - \ \vec{e_\rho}$$
$$\frac{\partial\vec{k}}{\partial\varphi} = \ \vec{0}$$

2- Sachant que $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\varphi}$ ne dépendent que de φ, leurs différentielles sont données

$$d\vec{e_\rho} = \frac{\partial\vec{e_\rho}}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi} \ = \ d\varphi\vec{e_\varphi}$$
$$d\vec{e_\varphi} = \frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi} \ = -\,d\varphi\vec{e_\rho}$$

3- Comme la base $(\vec{e_\rho},\ \vec{e_\varphi},\vec{k})$ est une base directe alors $\vec{e_\varphi} = \ \vec{k}\ \wedge\ \vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\rho} = \ \ \vec{e_\varphi}\ \wedge\ \vec{k}$

En utilisant ces deux résultats, nous obtenons

$$d\vec{e_\rho} = d\varphi\vec{e_\varphi} = \ dt\ \frac{d\varphi}{dt}\vec{k}\wedge\vec{e_\rho} \ = \ \vec{\Omega}\ \wedge\ \vec{e_\rho}\,dt$$

Avec $\vec{\Omega} = \ \dot{\varphi}\ \vec{k}$. De même, on peut écrire

$$d\vec{e_\varphi} \ = -\,d\varphi\vec{e_\rho} \ = \ dt\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{k}\wedge\vec{e_\varphi} \ = \ \vec{\Omega}\ \wedge\ \vec{e_\varphi}\,dt$$

D'où les résultats recherchés.

Ce qui donne les dérivées par rapport aux temps de $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\varphi}$

$$\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \ \vec{\Omega}\ \wedge\ \vec{e_\rho}$$

Pour dériver par rapport au temps dans un repère R un vecteur unitaire, il suffit de connaître son vecteur rotation dans R et utiliser le résultat précédent.

4- Pour déterminer le vecteur rotation d'une base, la méthode directe est celle utilisée dans l'exercice précédent. Il suffit de prendre un vecteur de la base et de mettre sa dérivée sous la forme qui met en évidence le vecteur rotation. Une deuxième approche qualitative consiste à procéder comme suit

i- repérer chaque angle qui décrit la rotation 4 du vecteur considéré : dans le cas précédent c'est φ;

ii- repérer le plan dans lequel chaque rotation a lieu et le vecteur rotation qui lui est associé est porté par le vecteur unitaire perpendiculaire au plan en appliquant la règle du tire-bouchon : dans le cas précédent c'est $\vec{k}$;

iii- le vecteur rotation est alors la somme de tous les vecteurs décrivant chacune des rotations : dans le cas précédent, il s'agit d'une seule et le vecteur rotation est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\,\vec{k}$.

Notons que le module du vecteur rotation associé à un angle est donné par la vitesse angulaire associée à cet angle. Aussi, dans le cas de la base sphérique, on prend $\overrightarrow{e_r}$ et sa rotation est repérée par les angles.

i- φ : rotation dans le sens trigonométrique dans le plan perpendiculaire à $\vec{k} \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega_1} = \dot{\varphi}\,\vec{k}$;

ii- θ : rotation dans le sens trigonométrique dans le plan perpendiculaire $\overrightarrow{e_\varphi} \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega_2} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\varphi}$

et le vecteur rotation de $\overrightarrow{e_r}$ dans R est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\varphi}$ et qui est par la même occasion le vecteur rotation de la base sphérique dans R.

En utilisant le résultat de la question précédente, nous obtenons

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_r} = \left(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi}\right) \wedge \overrightarrow{e_r}$$

Or $\vec{k} = cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$, ce qui donne $\vec{k} \wedge \overrightarrow{e_r} = (\,cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}) \wedge \overrightarrow{e_r} = sin\theta\,\overrightarrow{e_\varphi}$ et $\overrightarrow{e_\varphi} \wedge \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_\theta}$ ce qui implique

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\varphi} sin\theta\,\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

De la même manière, nous avons

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_\theta} = \left(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi}\right) \wedge \overrightarrow{e_\theta} = \dot{\varphi} sin\theta\,\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$$

Nous avons utilisé $\vec{k} \wedge \overrightarrow{e_\theta} = cos\theta\overrightarrow{e_\varphi}$.

et enfin,

$$\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_\varphi} = \left(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi}\right) \wedge \overrightarrow{e_\varphi} = \dot{\varphi}(cos\theta\overrightarrow{e_r} - sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}) \wedge \overrightarrow{e_\varphi} = -\dot{\varphi}(cos\theta\overrightarrow{e_r} + sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta})$$