Travaux dirigés de mécanique du point matériel / Filières SMPC/session I
Série N° 2 : Cinématique d'un point matériel

Exercice N°1

On se propose d'étudier le mouvement d'un point matériel dans le système des coordonnées polaires, il décrit une trajectoire suivant une loi suivante : $r = 2a\cos\theta$ **avec** $\boldsymbol{\theta = \omega t}$ (a et w étant des constantes).

1- Déterminer la vitesse et l'accélération de M ainsi que leurs normes, dans le système des coordonnées polaires

2- Déterminer la vitesse et l'accélération de M ainsi que leur norme, dans le système des coordonnes intrinsèques (Frenet).

3- Déterminer le rayon de courbure

4- Déterminer la vitesse et l'accélération de M ainsi que leurs normes, dans le système des coordonnées cartésiennes.

Exercice N°2

Soit M un point matériel se déplaçant dans le référentiel $\mathcal{R}(O,x,y,z)$ de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ le long d'une courbe d'équation paramétriques.

$$\begin{cases} x(t) = 0{,}3.\cos(\omega t) \\ y(t) = 0{,}3.\sin(\omega t) \\ z(t) = 0{,}1\ \omega t \end{cases}$$

Où $\omega = 2\pi\ rad/s$ et l'unité de longueur est le centimètre.

1- Exprimer dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$: le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, le vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ et le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$.

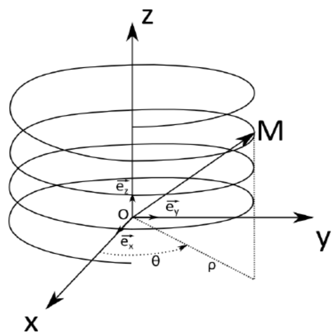
2- Calculer les normes $\|\vec{v}(M/\mathcal{R})\|$ et $\|\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})\|$.

3- Exprimer, dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, les vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ de la base de frenet.

4- Calculer le rayon de courbure Rc.

Exercice 3 : Le mouvement hélicoïdal

Le mouvement hélicoïdal se décompose en un mouvement circulaire et un mouvement de translation. Dans notre cas, le mouvement circulaire est dans le plan $(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y})$ et le mouvement de translation selon l'axe z. Les équations horaires sont données par :



$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta \\ y(t) = \sin\theta \\ z(t) = 2R(1 - \theta) \end{cases}$$

Avec R le rayon associé au mouvement circulaire, $\frac{d\theta}{dt} = \omega = cste > 0$ et $\theta(t=0) = 0$.

On étudie le mouvement du point M dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z},t)$ d'abord dans la base cartésienne $(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ puis dans la base cylindrique $(O,\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})$.

Coordonnées cartésiennes :

1- Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ en fonction de R, ω et t.

2- Déterminer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ en fonction de R, ω et t.

Coordonnées cylindriques :

3- Donner l'expression de $\overrightarrow{OM}$

4- Déterminer $\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}$ et $\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$ à partir du vecteur rotation (ou vitesse angulaire) que vous définirez au préalable.

5- Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ en fonction de R et ω.

6- Déterminer la vitesse $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ en fonction de R et ω.

7- Calculer la norme de la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$.

Composantes de Frenet :

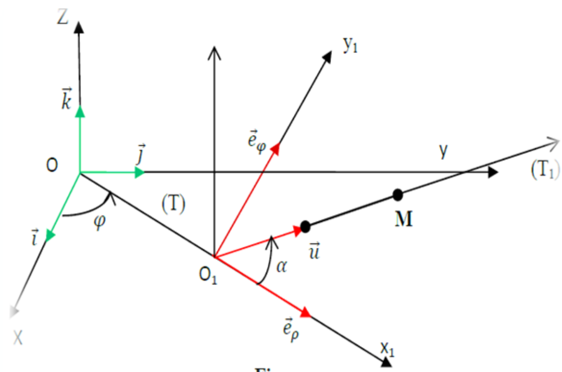
8- Déterminer le vecteur $\vec{e_T}$ dans la base cylindrique.

9- Représenter le vecteur $\vec{e_N}$ dans le plan $(O,\vec{e_x},\vec{e_y})$.

10- Déterminer γ_T puis γ_N en fonction de R et ω.

Exercice N° 4 *(sera résolu par Prof. ELOUARDI)*

Soient $\Re(O,xyz)$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et $\Re_1(O_1,x_1y_1z_1)$ le référentiel relatif muni de la base $(\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$. Un point M est assujetti à se déplacer sur une Tige (T_1). La tige (T_1) est solidaire en O_1 avec une Tige (T) en rotation d'angle (t) autour de l'axe (Oz) (voir figure). La tige (T_1) est située dans le plan vertical $(\vec{e_\rho},\vec{k})$. Le point O_1 est repéré par : $\overrightarrow{OO_1} = \rho\vec{e_\rho}$ et le point M est repéré sur la tige (T_1) par :



Figure

$\overrightarrow{O_1M} = V_0 t\vec{u}$ ($V_0 = cte$). Le vecteur unitaire $\vec{u}$ fait un angle constant α avec le vecteur $\vec{e_\rho}$.

N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$.

I- Etude de la cinématique de M par calcul direct

1- Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{e_\rho}$, $\vec{k}$ et α.

2- Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

3- Déterminer $\vec{V}(M/R)$ la vitesse de M dans le repère $\Re$.

4- Déterminer $\vec{\gamma}(M/R)$ l'accélération de M dans le repère $\Re$.

II- Etude de la cinématique de M par décomposition de mouvement

1- Vérifier que la vitesse de rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$ est donnée par $\vec{\Omega}\,(R_1/R) = \dot{\varphi}\,\vec{\imath}$.

2- Déterminer $\vec{V}(M/R_1)$ la vitesse relative de M.

3- Déterminer $\vec{V}_e(M)$ la vitesse d'entrainement de M.

4- En déduire $\vec{V}(M/R)$ la vitesse absolue de M.

5- Déterminer $\vec{\gamma}(M/R_1)$ l'accélération relative de M.

6- Déterminer $\vec{\gamma}_e(M)$ l'accélération d'entrainement de M.

7- Déterminer $\vec{\gamma}_c(M)$ l'accélération de Coriolis de M.

8- En déduire $\vec{\gamma}_a(M)$ l'accélération absolue de M.