UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE POLYDISCIPLINAIRE DE SAFI
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

جامعة القاضي عياض
الكلية المتعددة التخصصات
شعبة الفيزياء- آسفي-

Épreuve de mécanique du point
Session normale : 02 Janvier 2017

Module : *Mécanique du point* ***Durée*** *: 1h45*
Filières : SMPC-SMIA

Problème:

Un petit anneau M de masse *m*, considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottement le long d'une tige (T) de longueur d. Cette tige tourne autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire ω constante dans le repère galiléen $R(O,x,y,z)$ muni de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormée et directe tel que $\vec{\omega}=\omega\vec{k}=\dot{\varphi}\vec{k}$ (voir figure 1).
On définit le référentiel relatif $R_1(O,x_1,y_1,z_1=z)$ auquel est attachée la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$. Au cours du temps, la tige doit rester dans le plan vertical $(O,\vec{e}_\rho,\vec{k})$ et faisant un angle **constant** θ $\left(\theta \prec \frac{\pi}{2} rad\right)$ avec l'axe (Oz).
L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance r_0 du point O $(r_0 \prec d)$. On note $\overrightarrow{OM}=r(t)\,\vec{e}_r$ où $r(t)$ est une fonction inconnue du temps t.
$\vec{e}_\theta$ est le vecteur perpendiculaire à $\vec{e}_r$ dans le plan vertical $(O,\vec{e}_\rho,\vec{k})$ (voir figure 2).
$(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$ est une base orthonormée directe.

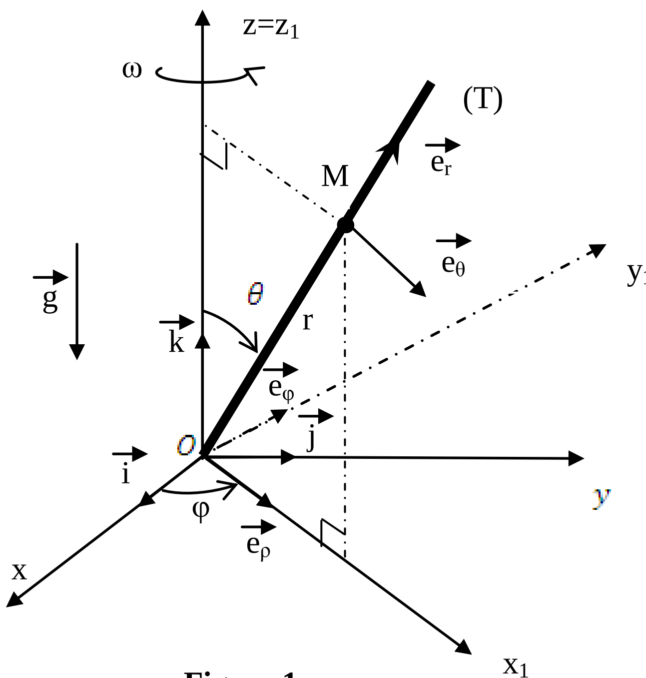

Figure 1

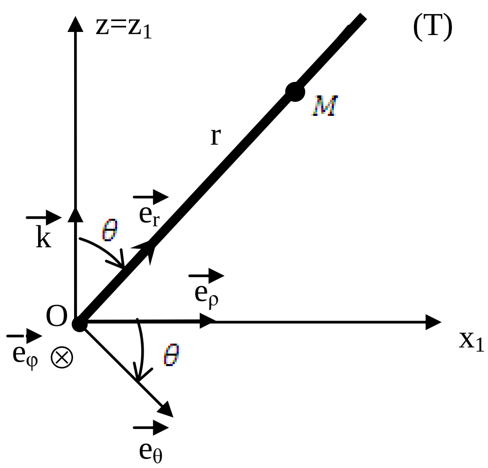

Figure 2

N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$.

Partie A : Étude cinématique

1. Définir puis exprimer :

1 a) La vitesse relative : $\vec{V}_r(M) = \vec{V}(M / R_1)$.

1 b) L'accélération relative : $\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M / R_1)$.

2. Définir puis exprimer:

1 a) La vitesse d'entraînement : $\vec{V}_e(M) = \vec{V}(M \in R_1 / R)$.

1.5 b) L'accélération d'entraînement : $\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(M \in R_1 / R)$.

1.5 c) L'accélération de Coriolis : $\vec{\gamma}_c(M)$.

Partie B : Étude dynamique

1 a) Faire le bilan de toutes les forces exercées sur M dans le repère relatif R_1.

1 b) Vérifier que la réaction de la tige sur M peut s'écrire sous la forme : $\vec{R} = R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi$

2 c) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

1.5 d) En déduire l'équation horaire $r(t)$ sachant qu'à t=0, $r = r_0$ et $\dot{r} = 0$.

1 e) Déterminer les composantes de la réaction de (T) sur M : R_θ et R_φ.

1 f) Déterminer la position d'équilibre $r_{éq}$ de l'anneau sur la tige. Exprimer $r_{éq}$ en fonction de ω, θ et g.

1.5 g) Montrer qu'une position d'équilibre de l'anneau sur la tige (T) ne peut exister que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur seuil ω_0 que l'on déterminera. Exprimer ω_0 en fonction de θ, d et g.

1.5 h) On se place dans le cas où $\omega > \omega_0$, l'anneau étant dans sa position d'équilibre. On écarte légèrement l'anneau de cette position d'équilibre puis on le libère sans vitesse initiale. Déterminer, en la justifiant, l'orientation de la résultante des forces appliquées sur l'anneau? En déduire si l'équilibre est stable ou instable.

Partie C : théorème du moment cinétique

1.5 a) Définir le moment cinétique du point M en O dans le référentiel relatif R_1 et donner son expression.

2 b) En appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel relatif R_1, retrouver les composantes de la réaction de (T) sur M : R_θ et R_φ.

Rappel mathématique : *Les solutions de l'équation différentielle de type* $\ddot{r} - \lambda_0^2 r = A$ *où* λ_0 *et* A *sont constantes, s'écrivent sous la forme :*

$$r(t) = \alpha e^{\lambda_0 t} + \beta e^{-\lambda_0 t} - \frac{A}{\lambda_0^2} \text{ avec } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes à déterminer.}$$