

*Épreuve de mécanique du point*  
*Session normale : 21 Janvier 2016*

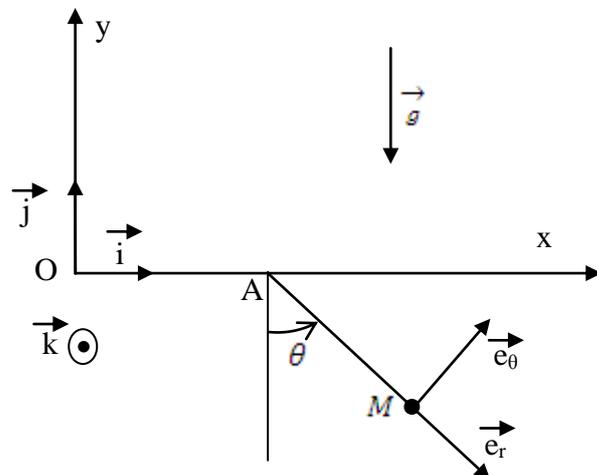
*Module : Mécanique du point*  
*Filières : SMIA*

*Durée : 2h00*

Soit  $R_0(O, x, y, z)$  un repère galiléen muni de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormée et directe, avec  $\vec{j}$  vertical ascendant.

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil **inextensible** de longueur  $l$  et de masse négligeable. L'autre extrémité A du fil se déplace horizontalement le long de l'axe  $(Ox)$  en effectuant un mouvement uniformément varié avec une accélération  $g$  identique à celle de la

pesanteur tel que  $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} g t^2 \vec{i}$  (voir figure).



On se propose d'étudier le mouvement du M dans le repère relatif défini par  $R(A, x, y, z)$  lié au point A.

On désigne par  $\theta(t)$  l'angle que fait le vecteur  $\overrightarrow{AM}$  avec la verticale ascendante passant par A tel que  $\theta(t) = (-\vec{j}, \overrightarrow{AM})$ . On note  $\overrightarrow{AM} = l \vec{e}_r$  et  $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{k}$  tels que  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  représentent les vecteurs unitaires de la base polaire.

On supposera que le fil reste tendu en permanence et que les frottements sont négligeables.

**N.B :** Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$

**Partie A : Étude cinématique**

- 1 1. Donner l'expression du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ .
- 1 2. Déterminer la vitesse absolue  $\vec{V}_a(M) = \vec{V}(M / R_0)$  puis l'accélération absolue  $\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}(M / R_0)$ .
3. Définir puis exprimer :
  - 0.5 a) La vitesse relative :  $\vec{V}_r(M) = \vec{V}(M / R)$ .

0.5 b) L'accélération relative :  $\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M/R)$ .

4. Définir puis exprimer:

1 a) La vitesse d'entraînement :  $\vec{V}_e(M) = \vec{V}(M \in R/R_0)$ .

1 b) L'accélération d'entraînement :  $\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(M \in R/R_0)$ .

1 5. Définir puis calculer l'accélération de Coriolis :  $\vec{\gamma}_c(M)$ .

### **Partie B : Étude dynamique**

1 1. Quelles sont les forces appliquées au point matériel M dans le repère relatif R ?

1 2. Vérifier que la force d'inertie d'entraînement s'exprime par:  $\vec{F}_{ie} = -mg (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta)$ .

1 3. Calculer la force d'inertie de Coriolis  $\vec{F}_{ic}$ .

2 4. Montrer que  $\theta_0 = -\frac{\pi}{4}$  est la seule position d'équilibre du point M dans son mouvement relatif.

2 5. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel relatif R, donner une équation différentielle du second ordre en  $\theta$  et une expression de la tension du fil T en fonction de  $\dot{\theta}$  et  $\theta$ .

2 6. En déduire que  $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \sin \theta - \sqrt{2})$  et que la tension du fil est donnée par :

$T = mg (3 \cos \theta - 3 \sin \theta - 2\sqrt{2})$ . On utilisera pour cela le fait que la vitesse relative est nulle à l'équilibre.

### **Partie C : théorème du moment cinétique**

1 a) Définir le moment cinétique du point M en A dans le repère relatif R et donner son expression.

2 b) Déterminer le moment en A de chacune des forces agissantes sur M dans le repère relatif R.

2 c) En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère relatif R, retrouver l'équation du mouvement.