

**Épreuve de mécanique du point**  
**Session de rattrapage : 22 Janvier 2016**

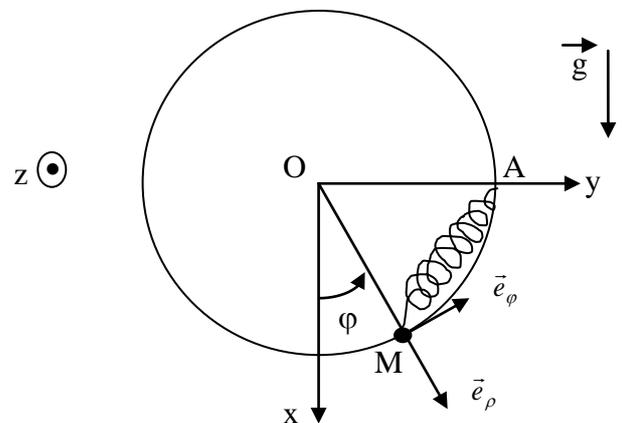
**Module : Mécanique du point**  
**Filières : SMPC**

**Durée : 1h30**

Dans un repère galiléen  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur un guide circulaire vertical fixe de rayon a et de centre O. Le point M est lié au point fixe A par un ressort de raideur k et de longueur à vide négligeable. On admet que ce ressort exerce sur M une tension  $\vec{T} = -k\overline{AM}$  qui dérive d'une énergie potentielle  $E_{p2} = \frac{1}{2}k\overline{AM}^2$ .

Le point M est repéré par l'angle  $\varphi(t) = (\vec{i}, \overline{OM})$  où l'axe (Ox) est vertical descendant,  $\vec{g}$  est l'accélération de pesanteur (voir figure).

**Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$**



**Partie A : théorème du moment cinétique**

- 1) Exprimer la quantité de mouvement  $\vec{P}(M/R)$  du point M.
- 2) Déterminer le moment cinétique  $\vec{\sigma}_O(M/R)$  en O du point M.
- 3) Faire le bilan de toutes les forces exercées sur M dans R et donner leurs expressions.
- 4) Calculer le moment en O de chacune de ces forces.
- 5) En appliquant le théorème du moment cinétique en O, montrer que l'équation différentielle du mouvement de M dans R est de la forme :  $\ddot{\varphi} + \omega_1^2 \sin \varphi = \omega_0^2 \cos \varphi$ . Calculer  $\omega_1$  et  $\omega_0$  en fonction des données du problème.

**Partie B : théorème de l'énergie mécanique**

- 1) Calculer l'énergie cinétique  $E_c(M/R)$  du point M.
- 2) Calculer en fonction  $\varphi$ , l'énergie potentielle  $E_{p1}(M/R)$  du poids de M.
- 3) Calculer en fonction  $\varphi$ , l'énergie potentielle  $E_{p2}(M/R)$  de la tension T.
- 4) L'énergie mécanique du point matériel M est-elle conservée ? Justifier votre réponse.
- 5) Écrire l'énergie mécanique du point matériel M. comment appelle-t-on l'équation obtenue ?
- 6) Retrouver l'équation du mouvement en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.
- 7) Déterminer la (les) position (s) d'équilibre de M.

