UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE POLYDISCIPLINAIRE DE SAFI
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

جامعة القاضي عياض
الكلية المتعددة التخصصات
شعبة الفيزياء- آسفي-

Corrigé de l'Épreuve de mécanique du point
Session de rattrapage : 22 Janvier 2016

Partie A : théorème du moment cinétique

1. *Expression de la quantité de mouvement :*.

$$\boxed{\vec{P}(M/R) = m\vec{V}(M/R)} \quad 0.5\text{pt} \qquad d'où \qquad \boxed{\vec{P}(M/R) = m\,a\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}} \quad 0.5\text{pt}$$

2. *le moment cinétique du M en O est défini par :* $\vec{\sigma}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/R) = \boxed{a\,\vec{e_\rho} \wedge m\,a\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}}$ 0.5pt

   donc $\boxed{\vec{\sigma}_O(M/R) = ma^2\dot{\varphi}\,\vec{k}}$ 1.5pt

3. *Les forces qui s'appliquent sur M dans le repère R sont :*

   - *la force du poids :* $\vec{P}$ 0.25pt $\quad \Rightarrow \boxed{\vec{P} = mg\,\vec{i} = mg\left(\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi}\right)}$ 0.25pt
   - *la réaction de la circonférence :* $\vec{R}$ 0.25pt $\quad \Rightarrow \boxed{\vec{R} = R_\rho\,\vec{e_\rho}}$ 0.25
   - *la tension* $\vec{T}$: 0.25pt $\quad \Rightarrow \boxed{\vec{T} = -k\,\overrightarrow{AM} = -ka\left((1-\sin\varphi)\,\vec{e_\rho} - \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}\right)}$ 0.25pt

4. *Moment en O de chaque force*

   - $\vec{M}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} \Rightarrow \boxed{\vec{M}_O(\vec{P}) = a\,\vec{e_\rho} \wedge mg\left(\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi}\right)} \Rightarrow \boxed{\vec{M}_O(\vec{P}) = -mga\sin\varphi\,\vec{k}}$ 0.5pt

   - $\vec{M}_O(\vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} \Rightarrow \vec{M}_O(\vec{R}) = a\,\vec{e_\rho} \wedge R_\rho\,\vec{e_\rho} \Rightarrow \boxed{\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{0}}$ 0.5pt

   - $\vec{M}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} \Rightarrow \vec{M}_O(\vec{T}) = a\,\vec{e_\rho} \wedge -ka\left((1-\sin\varphi)\,\vec{e_\rho} - \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{M}_O(\vec{T}) = ka^2\cos\varphi\,\vec{k}}$ 0.5pt

5. *En appliquant le théorème du moment cinétique de M en O dans R, on aura :*

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_O(M/R)\right]_R = \vec{M}_O\left(\Sigma\vec{F}_{rélles}\right)}$$

donc $ma^2\ddot{\varphi}\,\vec{k} = \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{T} + \vec{R} + \vec{P}\right)$ *ce qui implique :* $ma^2\ddot{\varphi} = -mga\sin\varphi + ka^2\cos\varphi$

d'où $\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{a}\sin\varphi - \frac{k}{m}\cos\varphi = 0}$ *avec* $\boxed{\omega_1^2 = \frac{g}{a}}$ *et* $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$ 0.5pt

1pt 0.5pt

Partie B : théorème de l'énergie mécanique

1. *Energie cinétique de M dans le repère R :*

0.5pt $\boxed{E_C = \frac{1}{2} m\vec{V}^2(M/R)} \Rightarrow \boxed{E_C = \frac{1}{2} ma^2\dot{\varphi}^2}$ 1pt

0.5pt

2. On sait que : $\boxed{dE_{P1} = -dw(\vec{P}) = -\vec{P}.d\overrightarrow{OM}} = -amg(\cos\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} - \sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi})d\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$

$\Rightarrow dE_{P1} = mga\sin\varphi\,d\varphi \Rightarrow \boxed{E_{P1} = -mga\cos\varphi + cte}$ 1pt

3. On sait que : $\boxed{dE_{p2} = -dw(\vec{T}) = -\vec{T}.d\overrightarrow{OM}}$ 0.5pt

On a $\boxed{E_{P2} = \frac{1}{2}k\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{2}ka^2\left((1-\sin\varphi)^2 + \cos^2\varphi\right)} \Rightarrow \boxed{E_{P2} = ka^2(1-\sin\varphi)}$ 1pt

4. *le déplacement est sans frottement donc $\vec{R}$ ne travaille pas $\Rightarrow$ les seules forces qui travailles sont $\vec{P}$ et $\vec{T}$*

ces forces dérivent d'une énergie potentielle $\Rightarrow$ le système est conservatif 1pt

implique $\boxed{E_m = cte}$ 0.5pt

5. $\boxed{E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 - mga\cos\varphi + ka^2(1-\sin\varphi) + cte}$ 1pt

$\boxed{\text{cette équation est appelée l'intégrale première de l'énergie cinétique}}$ 1pt

6. *Equation différentielle en φ :*

On a $E_m = \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 - mga\cos\varphi + ka^2(1-\sin\varphi) + cte \Rightarrow \boxed{\frac{dE_m}{dt} = 0}$ 0.5pt

$\Rightarrow ma^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mga\dot{\varphi}\sin\varphi - ka^2\dot{\varphi}\cos\varphi = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}\left(ma^2\ddot{\varphi} + mga\sin\varphi - ka^2\cos\varphi\right) = 0$

$\Rightarrow$ or $\dot{\varphi}$ ne peut être jamais nulle $\Rightarrow \boxed{ma^2\ddot{\varphi} + mga\sin\varphi - ka^2\cos\varphi = 0}$

d'où $\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{a}\sin\varphi - \frac{k}{m}\cos\varphi = 0}$ avec $\omega_1^2 = \frac{g}{a}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ 1.5pt

0.5pt

7. Position d'équilibre : $\boxed{\frac{dE_p}{d\varphi} = 0}$ avec $E_p = E_{p1} + E_{p2} \Rightarrow \boxed{-ka^2\cos\varphi + mga\sin\varphi = 0}$ 0.5pt

or $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ ne peuvent jamais correspondre à des positions d'équilibre en dévisant par $\cos\varphi$, on aura

$tg(\varphi) = \frac{ka}{mg} = \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \succ 0 \Rightarrow$ donc pour $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$ une seule solution $\boxed{tg\varphi_1 = \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}}$ 0.5pt

$\Rightarrow$ si $\varphi \in [0, 2\pi] \Rightarrow$ on aura deux solutions $\boxed{tg\varphi_2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}}$ et $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$

0.5pt