Chapitre 1 : Cinématique du point matériel

Pré-requis

• Connaître les systèmes de coordonnées (cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques).

• Savoir dériver les vecteurs de la base polaire ou cylindrique.

• Savoir intégrer quelques fonctions élémentaires (polynômes, fonctions trigonométriques, exponentielle etc.).

Objectif

* À partir de vecteur accélération d'un point, savoir retrouver le vecteur vitesse, les équations horaires du mouvement ainsi que l'équation de la trajectoire de ce point.

* Connaître l'expression de vecteur position, vitesse et accélération dans les différents systèmes de coordonnées.

* Connaître la définition de quelques mouvements particuliers traités en fin de chapitre.

* L'objectif de la cinématique du point est d'étudier le mouvement d'un point au cours du temps indépendamment des causes qui produisent ce mouvement.

Définition

La cinématique est une branche de la mécanique qui étudie les mouvements des corps dans l'espace en fonction du temps indépendamment des causes qui les provoquent.

Elle a pour **but** de préciser **la position, les trajectoires, la vitesse, l'accélération** et les **lois horaires….**

Dans un premier temps, nous allons caractériser la position d'un point M de l'espace dans différents systèmes de coordonnées. Ensuite, nous présenterons la cinématique du point dans un référentiel donne puis les compositions des mouvements (dits aussi changements de référentiels).

I- Relativité du mouvement : nécessité d'un référentiel

1- Introduction

L'étude du mouvement d'un point implique nécessairement la présence simultanée du point et d'un observateur qui analyse le mouvement de ce point. Selon la position de l'observateur les conclusions peuvent être différentes alors que l'étude porte sur le même point. Considérons l'exemple simple de la chute d'une bille réalisée dans le wagon d'un train qui se déplace sur une voie rectiligne à vitesse constante. Les résultats de l'étude de ce mouvement obtenus par un observateur assis dans ce wagon et un autre immobile sur le quai seront inévitablement différents (voir figure 1.1).

Le mouvement d'un point est donc ***relatif*** à un observateur fixe dans un ***référentiel*** d'étude.

- Il n'est pas faux par exemple de dire que le soleil est en mouvement par rapport à la Terre si l'observateur est fixe sur Terre. Il faut donc à chaque fois préciser par rapport à quoi l'étude du mouvement est effectuée.
- Dans l'expression « le train se déplace à vitesse constante » il est évident que c'est par rapport au sol et donc la Terre. Le voyageur assis dans un wagon du train peut dire : « je suis immobile », tout le monde comprendra que c'est par rapport au siège du wagon et du wagon lui-même. Il peut dire aussi « je me déplace à grande vitesse » et on comprendra que c'est par rapport à la Terre.

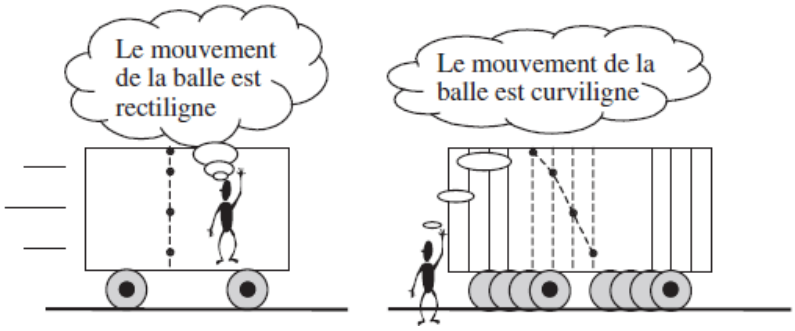


Figure 1.1 : Relativité du mouvement pour la chute d'une balle dans un wagon en mouvement rectiligne uniforme : positions d'une balle à différents instants pour un observateur dans le wagon et pour un autre immobile sur le quai.

- En mécanique, pour qu'il n'y ait pas de doute possible, il est impératif de préciser par rapport à quoi l'étude du mouvement sera effectuée ; c'est-à-dire indiquer le ***référentiel*** choisi.

2- Notion de référentiel

Un ***référentiel*** (ou ***solide de référence***) est un ensemble de points tous fixes les uns par rapport aux autres. L'observateur qui étudie le mouvement d'un point est lui-même immobile dans ce référentiel.

Exemple : l'observateur est dans le train, le référentiel est le train. L'observateur est sur le quai, le référentiel est la Terre.

- Un référentiel peut être caractérisé par son nom. Dans les exemples précédents on peut parler du référentiel « train » (constitué de tout ce qui est fixe par rapport au train) ou du référentiel « Terrestre » (constitué de tout ce qui est fixe par rapport à la Terre) sans qu'il y ait d'ambiguïté.
- Un référentiel peut aussi être caractérisé par un point O et trois directions fixes dans ce référentiel c'est-à-dire par un repère (O, x, y, z). Tout ce qui est fixe dans ce repère constitue le référentiel.

Par exemple, pour l'étude du mouvement d'une bille dans un laboratoire il est possible de choisir un point O correspondant à la position de la bille à un instant initial et 3 axes Ox (longueur), Oy (largeur) et Oz (hauteur) liés au laboratoire. Le repère R(O, x, y, z) définit le référentiel d'étude correspondant au référentiel «laboratoire».

Tout ensemble de systèmes d'axes de coordonnées, lié à un corps solide S qui est le référentiel, constitue un repère lié à ce corps solide S.

Pour un référentiel donné il existe une infinité de repères possibles (infinité de possibilités de choisir une origine et 3 axes).

Pour un repère donné il n'existe qu'un référentiel associé (tout ce qui est fixe dans le repère forme le référentiel).

3- Exemples de référentiel à connaître

On distingue plus particulièrement les référentiels de Copernic, géocentrique et terrestre définis par :

➢ Le **référentiel de Copernic** (ou héliocentrique du grec Hêlios signifiant Soleil) (Copernic 1473-1543): L'origine du repère définissant ce référentiel correspond au centre d'inertie du système solaire (pratiquement confondu avec le centre d'inertie du Soleil). Les 3 axes du repère sont dirigés vers trois étoiles qui s'éloignent du Soleil toujours dans la même direction (étoiles fixes par rapport au Soleil choisies convenablement). Ce système est utilisé pour l'étude du mouvement des planètes et des vaisseaux spatiaux interplanétaires.

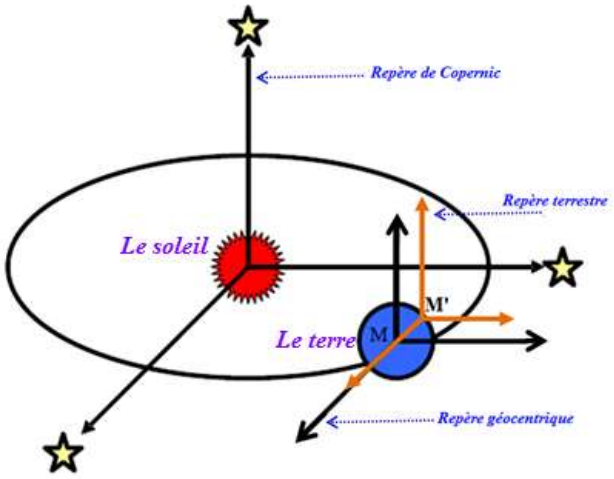


Figure 1. 2: Les différents repères les plus connait

NB : Le référentiel géocentrique est en mouvement de translation circulaire uniforme par rapport au référentiel de Copernic (les axes du référentiel géocentrique restent parallèles à ceux du référentiel de Copernic).

➢ Le **référentiel géocentrique** (du grec géo signifiant Terre). Le repère caractérisant ce référentiel a pour origine le centre de la Terre et les 3 axes sont des axes qui restent parallèles à ceux du référentiel de Copernic. Ce repère est utilisé pour l'étude du mouvement de la lune et des satellites en rotation autour de la terre.

➢ Le **référentiel terrestre**: l'origine de repère choisi est liée à la terre ainsi que les 3 axes (issus de n'importe quel point de la terre). Il est utilisé pour l'étude des corps en mouvement liés à la terre. Dans ce repère la terre est fixe.

Le référentiel terrestre est un référentiel en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique (rotation autour d'un axe Nord - Sud fixe dans le référentiel géocentrique).

Le référentiel géocentrique est en mouvement de translation circulaire uniforme par rapport au référentiel de Copernic (voir *figure 1. 2*).

Un référentiel est défini soit par son nom (exemple : référentiel terrestre) soit par un de ses repères $R(O, x, y, z)$ et le repère temps, c'est-à-dire une référence spatiale et une référence temporelle, toutes deux indispensables dans l'étude de tout mouvement. La notation suivante est d'usage courant : **référentiel** $R(O, x, y, z, t)$

4- Repères

L'étude cinématique du mouvement d'un point revient à pouvoir répondre aux questions « où ? » (où se trouve le point ?) et « quand ? » (à quel moment dans le temps ?). Pour répondre à ces questions il est nécessaire de définir un repère d'espace et un repère de temps.

On suppose que l'espace est de dimension au plus 3 (trois) et que le temps est absolu indépendant du lieu.

4- 1- Repère d'espace

Un repère d'espace est défini par une origine O qui est fixe dans le référentiel et des axes de référence orthonormés c'est-à-dire orthogonaux et munis d'une unité de longueur (vecteur unitaire de norme égale à 1) qui vont permettre à l'observateur de juger dans quelle direction se trouve le point. Les trois axes forment un trièdre direct (voir figure 1.3).

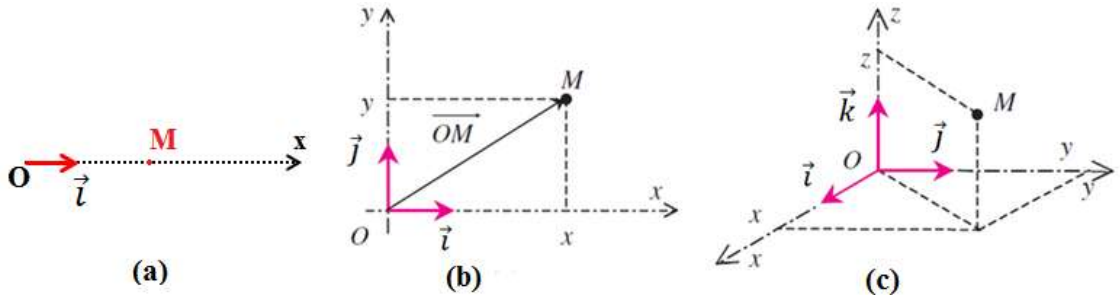


Figure 1. 3 : Repère dans un axe (a) dans un plan (b) et dans l'espace (c).

Selon le mouvement, on choisit le repère convenable : s'il est linéaire on choisit un axe (ox) lié par $(O,\vec{\imath})$, s'il est dans un plan nécessite deux axes (Ox, Oy) liés par la base $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, s'il est dans l'espace nécessite trois axes (Ox, Oy, Oz). À chacun de ces axes est associé un vecteur unitaire respectivement $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$. Les vecteurs $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ forment une base orthonormée.

4- 2- Repère de temps

Pour pouvoir répondre à la question « quand? » il faut ajouter un repère de temps c'est-à-dire une grandeur qui est la variable de temps.

La durée écoulée entre **deux** événements ou **deux** instants (dates) est mesurée au moyen d'une horloge ou chronomètre. Le repère de temps est constitué d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire fixant une chronologie.

Le temps est considéré comme uniforme et absolu. Sa représentation est une droite graduée orientée.

À chaque instant, on associe un nombre réel **t** appelé date ou instant qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine (l'origine du repère de temps qui est choisi a $\mathbf{t = 0}$).

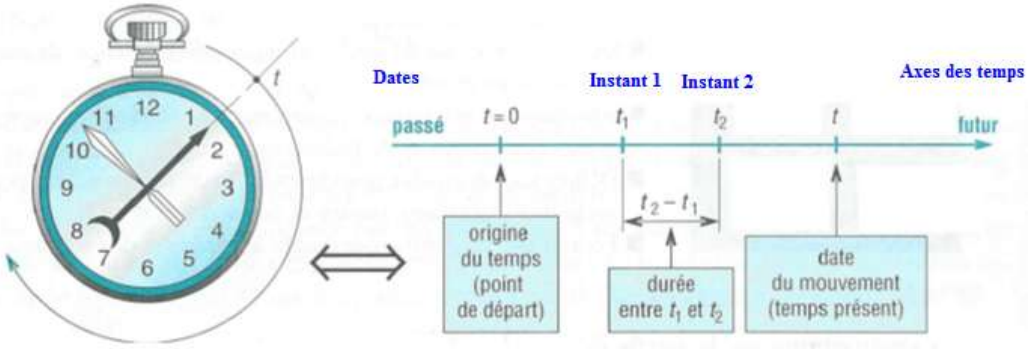


Figure 1. 4 : Repère de temps : la durée Δt entre les instants 1 et 2 correspond à la différence de leur date $t_2 - t_1$.

En mécanique classique ou newtonienne, on postule que le repère de temps est le même pour tous les référentiels et que le temps s'écoule de la même manière dans des référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres.

NB : Le repère d'espace et le repère de temps définissent un **REFERENTIEL**.

On notera donc un référentiel d'étude sous la forme présentée sur la **figure 1.4**.

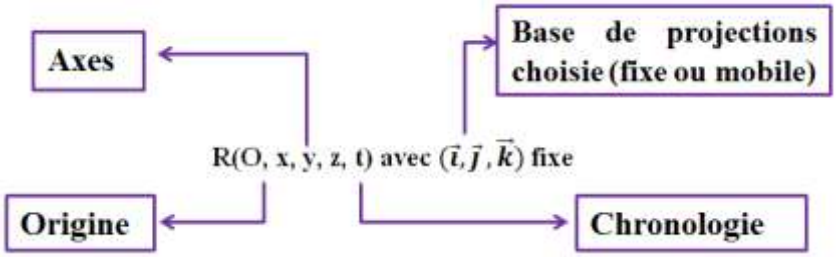


Figure 1. 5 : Référentiel d'étude

Pour une étude plus précise du mouvement d'un point mobile dans un référentiel *R* on est amené à définir sa position mais aussi des grandeurs vectorielles comme le vecteur vitesse ou accélération de ce point. Il faudra donc faire un choix de **système de coordonnées** (voir chapitre 0 : Rappel et compléments mathématiques) et utiliser la **base** correspondante :

- (x, y, z) en coordonnées cartésiennes avec la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ qui est une base dont les vecteurs sont fixes dans le repère.
- (ρ, θ, z) en coordonnées cylindriques avec la base $(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\vec{k})$ qui est une base dont les deux premiers vecteurs voient leur direction varier au cours du temps.
- (ρ, θ, φ) en coordonnées sphériques avec la base mobile $(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi})$.

Il est important de noter que suivant le choix effectué, la base utilisée, comme outil mathématique, peut être fixe ou mobile dans le référentiel donné. Ceci a des conséquences importantes lorsqu'il s'agit de dériver des vecteurs. Pour éviter toute erreur ou confusion, on notera, à chaque fois qu'une étude est entreprise, le choix de la base en précisant si elle est fixe ou pas.

Quand on dit que la base est *fixe* dans *R* cela signifie que ces vecteurs gardent la même direction, le même sens et la même norme au cours du temps. Ces vecteurs ne sont pas liés à un point : ils peuvent être représentés n'importe où dans l'espace mais par habitude et commodité ils sont en général représentés au point origine *O*.

5- Repère absolu et relatif

Pour déterminer la position précise du mobile, on associe au référentiel un repère. Selon la nature du mouvement, on choisit un repère convenable.

Un référentiel est donc un « objet » par rapport auquel on étudie le mouvement d'un autre objet. Tout mouvement est relatif au référentiel utilisé. Il permet de situer qualitativement la position du mobile au cours de son mouvement.

Il existe deux types de repère: Repères absolus et repères mobiles.

5- 1- Repères absolus

Ce sont des repères supposés fixes: pas de mouvement de translation, ni de rotation.

Le mouvement d'un solide est dit absolu s'il est décrit par rapport à un repère absolu.

Repères galiléens ou d'inerties (Galilée 1564-1642) : sont constitués d'un système libre (c'est-à-dire au repos ou en mouvement rectiligne uniforme).

Un repère en mouvement de translation uniforme par rapport à un autre repère galiléen est aussi galiléen.

Les repères de Copernic, géocentrique et terrestre sont des principaux repères galiléens. Seuls le premier est rigoureusement galiléen. Les deux derniers le sont également, lorsque l'on tient compte de certaines hypothèses.

5- 2- Repères relatifs (mobiles)

Un repère relatif est en mouvement par rapport au repère absolu.

Le mouvement d'un solide est dit relatif s'il est décrit par rapport à un repère relatif.

Repères non galiléens: Tout repère non galiléen peut être ramené à un repère en translation non uniforme et / ou en rotation

Exemple : Cas d'un voyageur (2) marchant dans un wagon (1) en mouvement par rapport au sol (0).

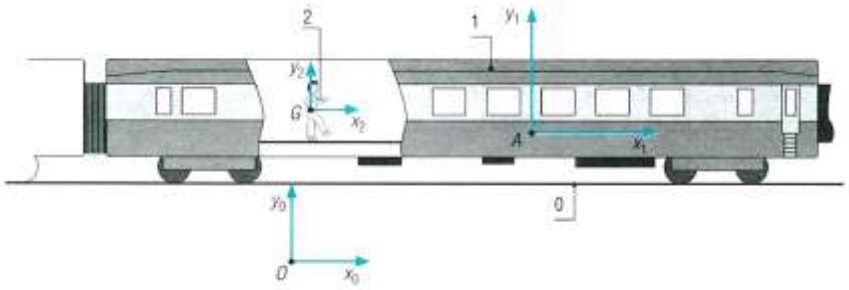


Figure. 1. 6

R_0(O, X_0, Y_0): repère absolu , lie à la terre. Mvt 1/0 : mouvement absolu.

R_1(O, X_1, Y_1): repère relatif , lie au train. Mvt 2/0 : mouvement absolu.

R_2(O, X_2, Y_2): repère relatif , lie au voyageur. Mvt 2/1 : mouvement relatif

6- Trajectoire d'un point

Définition : La trajectoire d'un mobile (point matériel) est l'ensemble des positions successives occupées par le mobile au cours du temps par rapport au repère choisi. C'est la courbe géométrique décrite au cours du temps par les positions successives de ce point par rapport à un repère de référence.

Exemple:

Considérons le mouvement d'une valve sur la jante d'une roue de vélo lorsque celle-ci roule, sans glisser, sur une route horizontale. La situation est schématisée ci-dessous (**Figure. 1**):

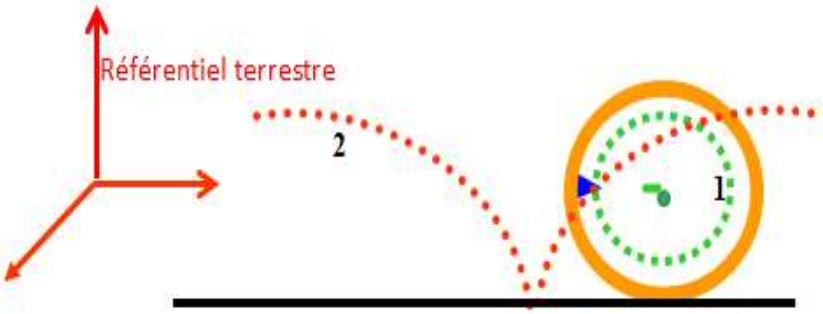


Figure. 1.7

La trajectoire de la valve est représentée :

En vert (1) **(cercle)** par rapport à l'axe de la roue (référentiel lié à l'axe de la roue).

En rouge (2) **(cycloïde)** par rapport à la Terre (référentiel terrestre).

La trajectoire dépend donc du repère, on dit que la trajectoire est relative.

II- Cinématique sans changement de référentiel

1- Position d'une particule

La position du point matériel peut être définie au cours du temps en fonction du vecteur position $\overrightarrow{OM}$; pour cela il est nécessaire de considérer un référentiel (fixe et non déformable au cours du temps) formé d'un repère orthonormé (défini par son origine, sa base et ses axes) menu d'une horloge qui indique le temps.

2- Vecteur vitesse d'un point matériel

Puisque la trajectoire d'un point mobile dépend du référentiel choisi, les caractéristiques du mouvement doivent changer d'un référentiel à un autre. Une de ces caractéristiques est le vecteur vitesse du point mobile. C'est pour cette raison qu'on utilise la notation $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M/R})$ pour signifier qu'il s'agit de la vitesse du point **M** par rapport au référentiel ***R***. On utilisera la même notation pour les deux types de vitesse qu'on va traiter dans la suite, la vitesse moyenne et la vitesse instantanée.

2– 1- Vitesse moyenne

Soit un point matériel décrivant une trajectoire **(C)** dans un référentiel **R**. Le point matériel occupe la position **M** à l'instant t et la position **M'** à l'instant $\mathbf{t' = t + \Delta t}$.

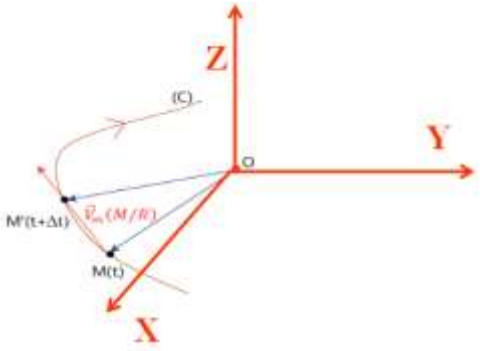


Figure. 1. 8 : Variation de la position dans le temps : vitesse moyenne.

Le même déplacement d'un point M entre deux positions peut se faire pendant des durées différentes. Pour caractériser un mouvement il peut être intéressant de connaître la distance parcourue par unité de temps c'est-à-dire la vitesse moyenne. Si la position du point mobile M à l'instant t correspond au point M(t) = M et à l'instant t′ au point M(t′) = M′ le vecteur vitesse moyenne se définit par :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t' - t} = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

Le vecteur vitesse est donc un vecteur qui a la même direction et le même sens que $\overrightarrow{MM'}$ (si t' > t).

La norme renseigne sur la distance parcourue en moyenne par unité de temps.

◈ Une vitesse s'exprime, dans le système international, en mètre/seconde, symbole : $m \cdot s^{-1}$.

2. 2-Vitesse instantanée

La vitesse instantanée de **M** par rapport au référentiel **R** à un instant t (vitesse à un instant t, celle par exemple qui apparaît sur le compteur de vitesse d'un véhicule) peut se définir comme une vitesse moyenne entre la position M = M(t) du point mobile à la date t et la position M′ = M(t + Δt) de ce même point à la date t + Δt où Δt représente une durée très faible **(Δt → 0)**. Cette vitesse moyenne tend d'autant plus vers la vitesse instantanée à la date t que la durée Δt tend vers zéro. Le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t)$ est une fonction du temps et la vitesse instantanée correspond alors à la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

$$\vec{V}(M/R) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

Lorsqu'on considère une durée élémentaire **dt** « infiniment petite » le point mobile passe d'une position M′ à une position « infiniment proche » de M. Le déplacement élémentaire correspondant peut s'écrire : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM}$. La durée élémentaire est choisie suffisamment petite pour que la vitesse moyenne sur le déplacement élémentaire coïncide avec la vitesse instantanée. Avec ces notations, le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$, dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, s'écrit : $\vec{V}(t) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R$

Lorsque le point M′ tend vers le point M, le parcourt MM′ tend vers la tangente de la trajectoire au point M. Le vecteur vitesse est un vecteur tangent à la trajectoire au point considéré.

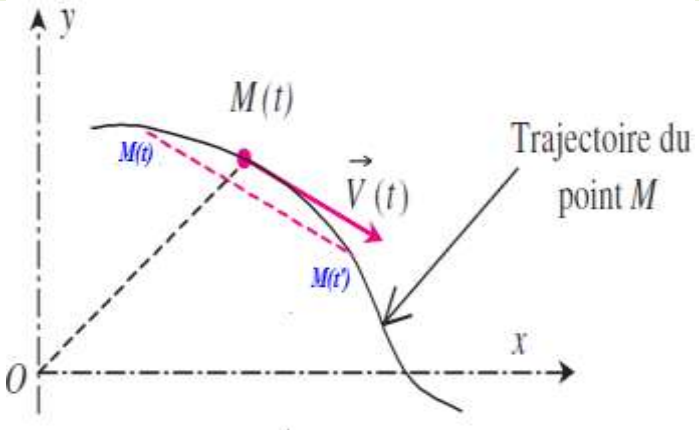


Figure 1. 9 : Vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ tangent à la trajectoire au point M(t) considéré.

- La durée *élémentaire* **dt** correspond à la différence entre deux dates infiniment proches et s'appelle aussi la *différentielle* de la variable **t**.
- De même, le vecteur $d\overrightarrow{OM}$, noté aussi $d\overrightarrow{OM} = d\vec{\ell}$ est le résultat de la différence entre deux vecteurs position infiniment proches et s'appelle la *différentielle* du vecteur position. Il correspond aussi à ce qu'on nomme un déplacement *élémentaire* (infiniment petit ou aussi petit que nécessaire). À partir de la définition du vecteur vitesse instantanée le déplacement *élémentaire* s'écrit : $d\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t).dt = d\vec{\ell}$

Propriétés du vecteur vitesse instantanée :

- Son origine est la position de la particule à l'instant *t*.

- Sa direction est tangente à la trajectoire à la position considérée.
- Son sens est donné par le sens de parcours de la trajectoire.
- Son module est $\frac{ds}{dt}$ où ds représente le déplacement curviligne élémentaire.

On peut résumer ces propriétés dans l'expression :

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{u_\tau}$$

Où $\overrightarrow{u_\tau}$ dénote le vecteur unitaire tangent à la trajectoire de même sens que le sens du mouvement.

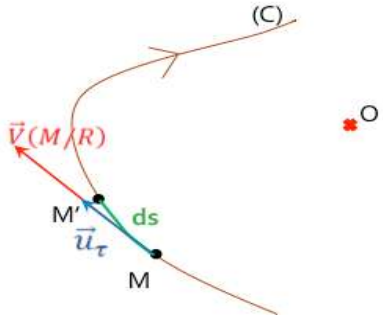


Figure. 1.10

3- Vecteur accélération

Une autre caractéristique du mouvement d'un point matériel est le vecteur accélération. On utilise une notation similaire à celle pour la vitesse, $\vec{\gamma}(M/R)$, pour signifier qu'il s'agit de l'accélération du point M par rapport au référentiel **R**.

Le vecteur accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse, ou de façon équivalente la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_{\mathcal{R}}) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}}$$

On peut définir le vecteur accélération moyenne aussi de façon similaire au vecteur vitesse. Il mesure alors la variation moyenne de la vitesse sur un intervalle de temps **Δt**.

4- Mouvement accéléré ou retardé

Le mouvement est accéléré lorsque $\|\vec{V}(t)\|$ est une fonction croissante du temps, donc $\|\vec{V}(t)\|^2$ est également une fonction croissante du temps, c'est-à-dire :

$\frac{d\|\vec{V}(t)\|^2}{dt} > 0$ or $\|\vec{V}(t)\|^2 = \vec{V}^2$ donc $\frac{d\|\vec{V}(t)\|^2}{dt} > 0 \implies 2\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt} > 0 \implies \vec{V}.\vec{\gamma} > 0$

Et inversement, le mouvement est retardé ou décéléré lorsque $\vec{V}.\vec{\gamma} < 0$.

Exemple : mouvement de l'ascenseur au cours de la montée:

Etape I : démarrage de l'ascenseur de la position de repos : pendant un court instant, le mouvement est accéléré: les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{\gamma}$ sont dans le même sens, donc : $\vec{V}.\vec{\gamma} > 0$.

Etape II : La vitesse devient constante, donc $\vec{\gamma} = \vec{0}$: le mouvement est uniforme.

Etape III : l'ascenseur va bientôt s'arrêter, il décélère, donc $\vec{V}$ et $\vec{\gamma}$ sont en sens opposés. Le mouvement est retardé jusqu'à l'arrêt : $\vec{V}.\vec{\gamma} < 0$.

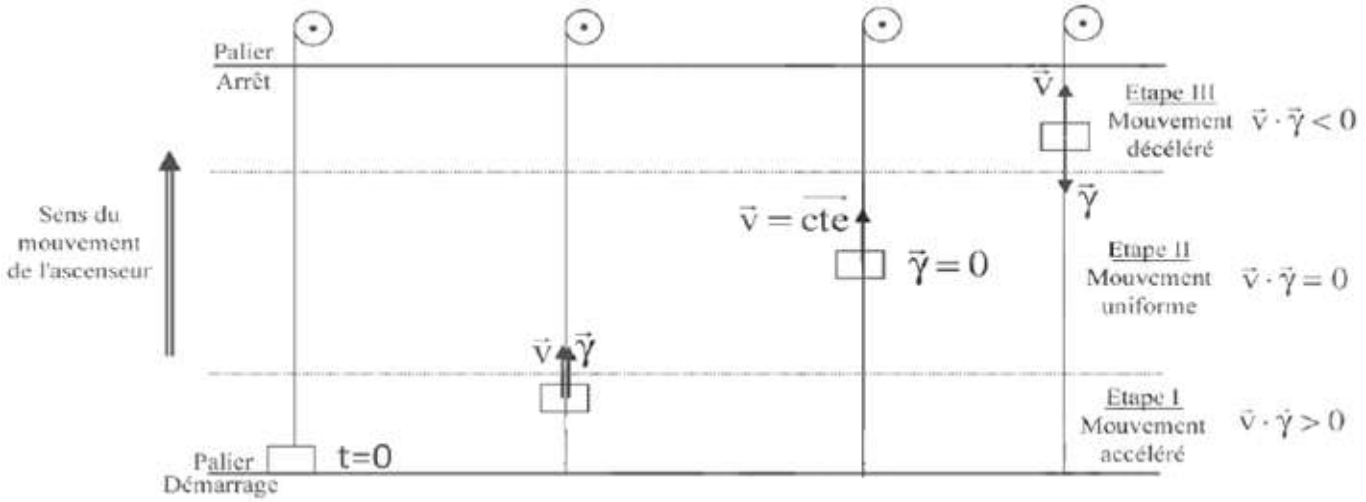


Figure. 1.11

5- Hodographe du mouvement ou des vitesses

L'hodographe **(H)** d'un mouvement par rapport à un point fixe **O** est l'ensemble des points H tel que à chaque instant t: $\overrightarrow{OH}(t) = \vec{V}(M/R)$

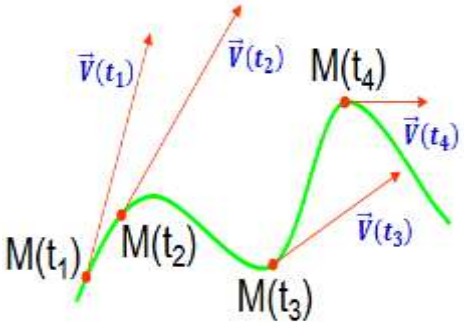


Figure. 1.12.a : Trajectoire d'un point matériel

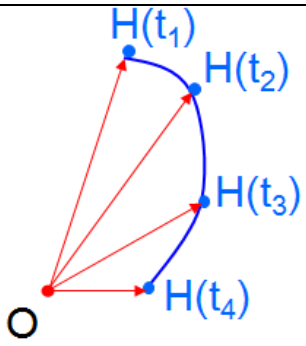


Figure.1.12.b : Hodographe du même mouvement

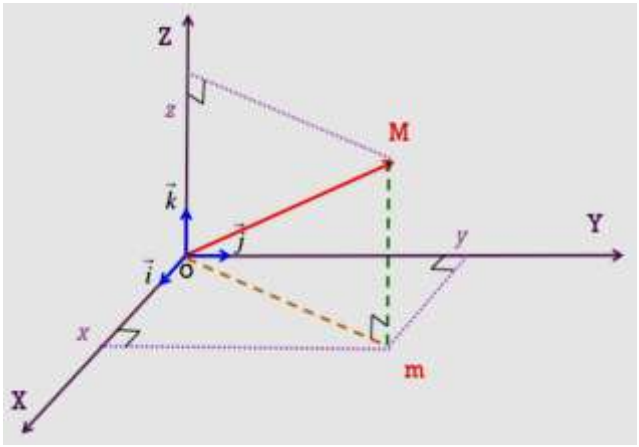
La **figure. 1.12** ci-dessus, décrit le mouvement d'un point matériel. A gauche la trajectoire est obtenue en reliant les extrémités du vecteur position à chaque instant **t**. L'hodographe, à droite, est la courbe décrite par le vecteur vitesse, d'origine **O**.

6- Vecteurs position, vitesse et accélération dans les différents systèmes de coordonnées

6. 1- Expressions des vecteurs : position, de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cartésiennes

6. 1-1- Expression de vecteur position

Soit le repère fixe orthonormé directe **R(O; X, Y, Z)** de base orthonormé directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. La position d'un point **M** peut être repérer par ses trois composantes cartésiennes **(x, y, z)**, projection orthogonales sur les trois axes du repère.



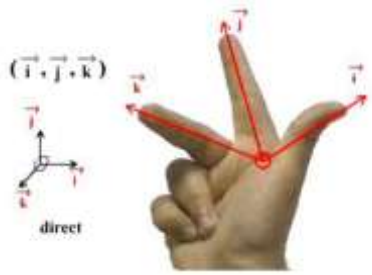


Figure. 1.13

Le vecteur position s'écrit alors: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Le module de $\overrightarrow{OM}$ est : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Remarques

i- Le repère plan

Si le mouvement s'effectue dans le plan, il est possible de repérer la position du mobile ponctuel M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ à l'aide des coordonnées rectangulaires x et y, ou bien à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Le vecteur position s'écrit donc : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

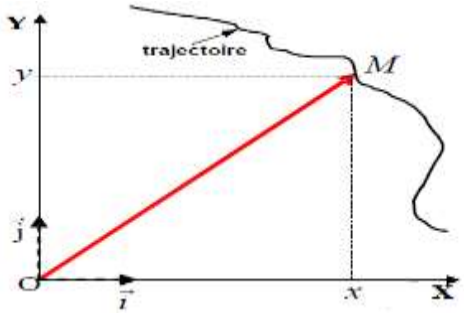


Figure 1.14: Coordonnées rectangulaires

ii- Le repère rectiligne

Si le mouvement est rectiligne, on se contente de l'axe OX tel que le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$

6. 1- 2- Expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes

En dérivant l'expression du vecteur position par rapport au temps, on obtient l'expression de la vitesse:

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt})_R = \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt}\Big)_R$$

En appliquant la règle de dérivation d'une somme l'expression devient :

$$\vec{V}(M/R = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt})_R = \frac{d(x\vec{i})}{dt}\Big)_R + \frac{d(y\vec{j})}{dt}\Big)_R + \frac{d(z\vec{k})}{dt}\Big)_R$$

Les vecteurs de la base cartésienne $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ sont des vecteurs indépendants du temps (fixes), leurs dérivées par rapport au temps sont nulles: $\frac{d\vec{\imath}}{dt}=\frac{d\vec{\jmath}}{dt}=\frac{d\vec{k}}{dt}=0$. Si le point M est mobile, seules les composantes x, y et z sont des fonctions du temps : $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$. L'expression devient :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt})_R = \frac{dx}{dt}\vec{\imath}+\frac{dy}{dt}\vec{\jmath}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Par convention et pour alléger les expressions, la « dérivation d'une variable x par rapport au temps t » est notée par la variable surmontée d'un point pour la dérivée première, de 2 points pour la dérivée seconde etc.

Donc, on utilise la notation suivante : $\vec{V}(M/R) = \dot{x}\vec{\imath}+\dot{y}\vec{\jmath}+\dot{z}\vec{k} = \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}_R$; où le point sur la variable signifie la dérivée par rapport au temps.

On écrit aussi : $\vec{V}(M/R) = V_x\vec{\imath}+V_y\vec{\jmath}+V_z\vec{k}$

Avec : $V_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$; $V_y=\frac{dy}{dt}=\dot{y}$; $V_z=\frac{dz}{dt}=\dot{z}$

Le module de la vitesse du point M s'écrit : $\|\vec{V}(M/R)\| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$;

6. 1- 3- Expression de l'accélération en coordonnées cartésiennes

L'expression du vecteur accélération est obtenue à partir de : $\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt})_R = \frac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2})_R$

On écrit donc :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d(\frac{dx}{dt}\vec{\imath}+\frac{dy}{dt}\vec{\jmath}+\frac{dz}{dt}\vec{k})}{dt})_R$$

Puisque les vecteurs de la base des coordonnées cartésiennes sont fixes, on dérive seulement les composantes du vecteur vitesse, ce qui donne :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k})_R$$

On utilise parfois la notation suivante :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{x}\vec{\imath}+\ddot{y}\vec{\jmath}+\ddot{z}\vec{k}$$

Où les deux points sur une variable signifie la dérivée seconde de la variable par rapport au temps.

Le module de l'accélération du point M s'écrit :

$$\|\vec{\gamma}(M/R)\| = \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2};$$

Remarque : on utilise les coordonnées cartésiennes quand le mouvement de **M** est quelconque.

6. 2- Expressions des vecteurs : position, de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires

C'est un système de coordonnées utilisé pour repérer la position d'un point **M** à deux dimensions. La position du point **M**, est repérée par la donnée de la distance **ρ**, qui le sépare de l'origine **O** et de l'angle **φ** que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe **(Ox)**.

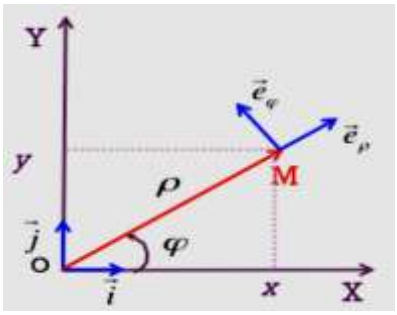


Figure 1.15

Le vecteur position en coordonnées polaires s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho}$.

Remarque : Nous avons déjà signalé, dans le **chapitre 0**, que le repère $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi})$ est un repère local. Ainsi, ces deux vecteurs unitaires ne sont constants qu'en module, ils sont variables en direction, donc leurs dérivées par rapport au temps ne sont pas nulles.

On obtient alors pour le vecteur vitesse :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

Avec : $\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi} \times \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

On écrit donc $\vec{V}(M/R) = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

$\overrightarrow{V_\rho}(M/R) = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho}$: est la vitesse radiale du point M.

$\overrightarrow{V_\varphi}(M/R) = \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$: est la vitesse <u>orthoradiale</u> du point M.

$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$: est la vitesse angulaire du point M.

Le vecteur accélération s'écrit comme suit : $\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d(\vec{V}(M/R))}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi})}{dt}$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\dot{\varphi}\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}$$

C.à.d $\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho})$

Sachant que $\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi} \times \frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho}$,

on trouve $\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\,\dot{\rho}\dot{\varphi})\overrightarrow{e_\varphi}$

Interprétation :

$\overrightarrow{\gamma_\rho} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e_\rho}$: est l'accélération radiale du point M.

$\overrightarrow{\gamma_\varphi} = (\rho\ddot{\varphi} + 2\,\dot{\rho}\dot{\varphi})\overrightarrow{e_\varphi}$: est l'accélération <u>orthoradiale</u> du point M.

$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$: est l'accélération angulaire du point M.

6. 3- Expressions des vecteurs : position, de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques

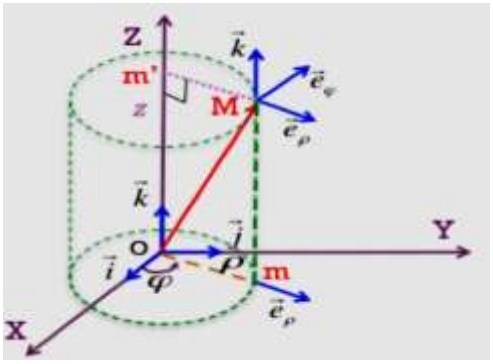


Figure 1.16

Soit la base orthonormée $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$ aux coordonnées cylindriques.

Dans cette base le vecteur position s'écrit de la façon suivante : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{om} + \overrightarrow{mM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\,\vec{k}$

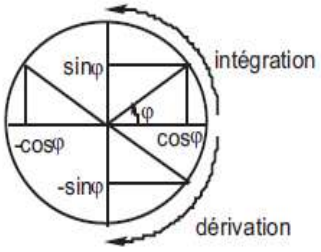
Expression de la vitesse en coordonnées cylindriques

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques on dérive le vecteur position en coordonnées cylindriques:

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\overrightarrow{e_\rho} + z\,\vec{k})}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d\,\vec{k}}{dt}$$

Sachant que $\vec{k}$ est un vecteur fixe sa dérivée est nulle $\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$. Le vecteur $\overrightarrow{e_\rho}$ étant mobile, sa dérivée n'est pas nulle en générale.

En effet, $\overrightarrow{e_\rho}$ dépend de façon implicite de t, à travers sa dépendance de l'angle φ.

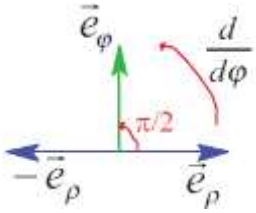


Ainsi $\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

En utilisant l'expression du vecteur $\overrightarrow{e_\rho}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}) = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\varphi\vec{\jmath} = \overrightarrow{e_\varphi}$$

Rappels : $\frac{d(\cos\varphi)}{d\varphi} = -\sin\varphi$ et $\frac{d(\sin\varphi)}{d\varphi} = \cos\varphi$



Que l'on peut retenir avec :

On déduit des coordonnées des vecteurs :

$$\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi} = \overrightarrow{e_\varphi} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi} = \overrightarrow{e_\rho}$$

On constate que **la dérivation** par rapport à φ correspond à une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

Remarque : Si le point **M** reste sur le plan **xoy** tel que $\mathbf{z = 0}$ la base choisit est dite polaire.

La dérivée par rapport au temps est alors donnée par: $\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

On obtient alors pour le vecteur vitesse : $\vec{V}(M/R) = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

Ou encore : $\vec{V}(M/R) = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{z}\vec{k}$

$\overrightarrow{V_\rho}(M/R) = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho}$: est le vecteur de la vitesse radiale du point M.

$\overrightarrow{V_\varphi}(M/R) = \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$: est le vecteur de la vitesse <u>orthoradiale</u> du point M.

$\overrightarrow{V_z}(M/R) = \dot{z}\vec{k}$

Le module du vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ est : $\|\vec{V}(M/R)\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}$

Expression de l'accélération en coordonnées cylindriques

On utilise l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{z}\vec{k})}{dt}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\dot{\varphi}\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k}$$

On avait obtenu l'expression de la dérivée par rapport au temps du vecteur $\overrightarrow{e_\rho}$: $\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

On obtient de façon similaire la dérivée du vecteur $\overrightarrow{e_\varphi}$:

$$\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath})\frac{d\varphi}{dt} = (-\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\varphi\vec{\jmath})\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho}$$

En remplaçant dans l'expression de l'accélération ci-dessus on obtient :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho}) + \ddot{z}\vec{k}$$

Qui donne finalement : $\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\overrightarrow{e_\varphi} + \ddot{z}\vec{k}$

$\overrightarrow{\gamma_\rho} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e_\rho}$: est le vecteur l'accélération radiale du point M.

$\overrightarrow{\gamma_\varphi} = (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\overrightarrow{e_\varphi}$: est le vecteur accélération <u>orthoradiale</u> du point M.

$$\overrightarrow{\gamma_z} = \ddot{z}\,\vec{k}$$

Le module du vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ est :

$$\|\vec{\gamma}(M/R)\| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)^2 + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}$$

6. 4- Expressions des vecteurs : position, de la vitesse et de l'accélération en coordonnées sphériques

Dans ce cas, les équations horaires du mouvement sont : **r(t)**, **θ(t)** et **φ(t)**. Les vecteurs unitaires de la base $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ constituent un repère local. Par rapport au repère fixe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, ils sont donc variables en directions. Leurs modules sont constants et égaux à **1**.

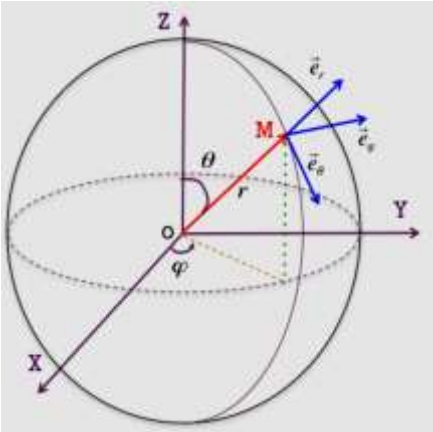


Figure 1.17

Soit la base orthonormée associées aux coordonnées sphériques ; notée $(\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_\theta}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_\varphi}})$.

Dans cette base, le vecteur position s'écrit de la façon suivante : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}$

Expression de la vitesse en coordonnées sphériques

Le vecteur vitesse est obtenu en dérivant le vecteur position :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{OM}}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{dr}}{\boldsymbol{dt}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}} + \boldsymbol{r}\,\frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{e_r}}}{\boldsymbol{dt}}$$

$\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}$ dépend des angles **θ** et **φ**, donc sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

En utilisant les expressions des vecteurs $(\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_\theta}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_\varphi}})$ en fonction des vecteurs $(\overrightarrow{\boldsymbol{e_\rho}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_\varphi}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_z}})$ données au **chapitre 0**.

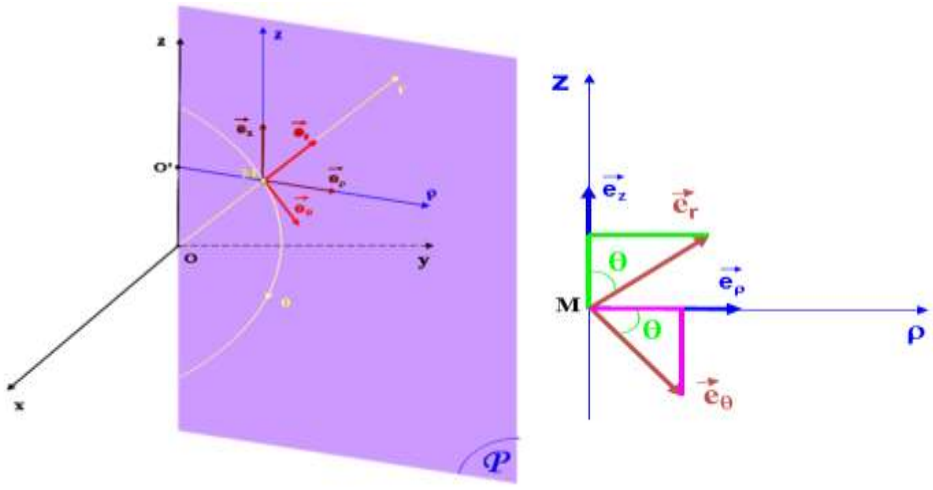


Figure 1. 18

$$\overrightarrow{e_r} = \sin\theta\overrightarrow{e_\rho} + \cos\theta\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{e_\theta} = \cos\theta\overrightarrow{e_\rho} - \sin\theta\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_\varphi}$$

On montre que : $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta} = \overrightarrow{e_\theta}$ et $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\varphi} = \sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$

Ainsi : $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} + \sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{e_\varphi} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

Ainsi, en coordonnées sphériques, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{dr}{dt}\,\vec{e_r} + r\,\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$$

Ou encore : $\vec{V}(M/R) = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\,\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$

Expression de l'accélération en coordonnées sphériques

On utilise l'expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{\boldsymbol{d(\dot{r}\,\vec{e_r} + r\,\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\varphi})}}{\boldsymbol{dt}}$$

Pour dériver les vecteurs de la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ on utilise leurs expressions en fonctions des vecteurs de la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$.

On obtient alors :

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\vec{e_r};\quad \frac{d\vec{e_\theta}}{d\varphi} = \cos\theta\vec{e_\varphi} \quad ;\quad \frac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi} = -\vec{e_\rho} = -(\sin\theta\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta})$$

Les dérivées temporelles des vecteurs de la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$, sont alors données par :

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d\vec{e_r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e_r}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\vec{e_\theta} + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e_\theta}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e_r} + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e_\varphi}$$

$$\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} = \frac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e_\rho} = -\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e_r} - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e_\theta}$$

Ainsi en dérivant les composantes du vecteur vitesse en coordonnées sphériques ainsi que les vecteurs de la base, on obtient alors l'expression finale du vecteur accélération en coordonnées sphériques :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\,\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e_\theta} + \left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e_\varphi}$$

7- Coordonnées curvilignes

7- 1- Repère de Frenet

Dans le cas d'un mouvement plan on peut définir en chaque point **M** de la trajectoire la base de Frenet. Le repère de frenet est un repère local, lie au centre de masse du système étudie.

Pour cela on définit en tout point **M** un repère de frenet de vecteurs unitaires :

$\vec{u_\tau}$: Tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement ;

$\vec{u_n}$: Perpendiculaire à $\vec{u_\tau}$ et orienté vers la concavité de la trajectoire.

Pour compléter le trièdre on définit un vecteur $\vec{B}$ tel que le trièdre ($\vec{u_\tau}$, $\vec{u_n}$, $\vec{B}$) est un trièdre directe *c.à.d.* $\vec{B} = \vec{u_\tau} \wedge \vec{u_n}$.

Le trièdre ($\vec{u_\tau}$, $\vec{u_n}$, $\vec{B}$) est appelé repère de Serret-Frenet.

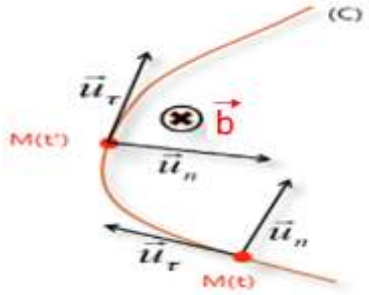


Figure 1.19

7- 2- Abscisse curviligne

Dans le cas d'un mouvement curviligne, il est parfois utile d'utiliser l'abscisse curviligne pour repérer la position du point matériel. Pour cela, on fixe un point **A** de la trajectoire (voir la figure.1.20). L'abscisse curviligne **s(t)** est alors définie comme étant la distance curviligne du point fixe A au point **M(t)** qu'occupe le point matériel à l'instant **t** : $\widehat{\mathbf{AM}} = \mathbf{arc(AM)} = \mathbf{s(t)}$

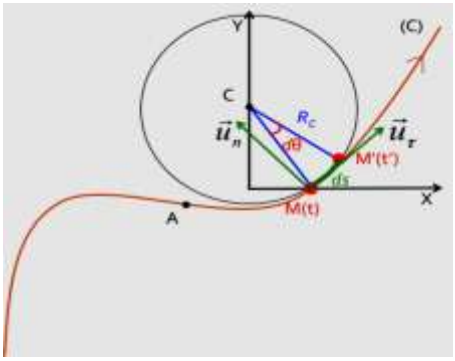


Figure 1.20

A l'instant $\mathbf{t' = t + dt}$, le point matériel occupant la position **M'(t')** on aura le vecteur position:

$$\widehat{\boldsymbol{AM'}} = \boldsymbol{arc(AM')} = \boldsymbol{s(t')} \quad ; \quad \boldsymbol{t' = t + dt}$$

Le déplacement élémentaire s'écrit alors : $\widehat{\boldsymbol{MM'}} = \boldsymbol{arc(MM')} = \boldsymbol{s(t')} - \boldsymbol{s(t)} = \boldsymbol{ds}$ est un arc de cercle de centre **C** et de rayon $\mathbf{R_c}$; appelé rayon de courbure. Les vecteurs $\overrightarrow{u_\tau}$ et $\overrightarrow{u_n}$ peuvent alors être obtenue de façon analytique.

En effet, $\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{MM'} = ds\,\overrightarrow{u_\tau}$, ce qui donne la définition du vecteur tangent $\overrightarrow{\boldsymbol{u_\tau}} = \frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{OM}}}{\boldsymbol{ds}}$.

Pour le vecteur normal, on remarque d'abord d'après **la figure 1. 20**, que $\overrightarrow{u_n}$ est le vecteur directement perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{u_\tau}$ on a donc : $\overrightarrow{\boldsymbol{u_n}} = \frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{u_\tau}}}{\boldsymbol{d\theta}}$

D'autre part on a : $\boldsymbol{ds} = \boldsymbol{R_C d\theta} \implies \boldsymbol{d\theta} = \frac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{R_C}}$. Ce qui donne pour $\overrightarrow{u_n}$ l'expression $\overrightarrow{\boldsymbol{u_n}} = \boldsymbol{R_C}\,\frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{u_\tau}}}{\boldsymbol{ds}}$

En fin $\overrightarrow{u_\tau} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$ et $\overrightarrow{u_n} = R_C\,\frac{d\overrightarrow{u_\tau}}{ds}$

7- 3- Vecteur vitesse dans le repère de Frenet

En dérivant le vecteur position par rapport au temps on trouve l'expression du vecteur vitesse dans la base de Frenet.

On a déjà vu que $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = ds\,\overrightarrow{u_\tau}$ Ce qui donne pour le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{u_\tau}$.

7- 4- Vecteur accélération dans le repère de Frenet

Pour dériver l'expression du vecteur vitesse obtenue ci-haut, on doit dériver, entre autres, le vecteur tangentielle $\overrightarrow{u_\tau}$ par rapport au temps : $\frac{d\overrightarrow{u_\tau}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}$

Sachant que $\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{V}$, Le module du vecteur vitesse et que $\frac{d\overrightarrow{u_\tau}}{ds} = \frac{1}{R_C}\overrightarrow{\boldsymbol{u_n}}$, On obtient $\frac{d\overrightarrow{u_\tau}}{dt} = \frac{V}{R_C}\overrightarrow{\boldsymbol{u_n}}$

On dérive le vecteur vitesse pour obtenir l'expression du vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d(\frac{ds}{dt}\overrightarrow{u_\tau})}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{u_\tau} + \frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_\tau}}{dt}$$

Le vecteur accélération dans la base de Frenet est donné par :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{u_\tau} + \frac{V^2}{R_C}\overrightarrow{\boldsymbol{u_n}}$$

Le vecteur accélération peut être décomposé en une composante tangentielle, appelée accélération tangentielle : $\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma_t}} = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{u_\tau}$

Et une composante normale, appelée accélération normale : $\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma_n}} = \frac{V^2}{R_C}\overrightarrow{\boldsymbol{u_n}}$ tel que $\vec{\gamma}(M/R) = \overrightarrow{\boldsymbol{\gamma_t}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\gamma_n}}$

Ou encore en terme de module : $\|\vec{\gamma}(M/R)\|^2 = \|\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma_t}}\|^2 + \|\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma_n}}\|^2$

On peut remarquer que la composante de l'accélération normale est toujours positive, ce qui signifie que l'accélération normale est toujours orientée vers la concavité de la trajectoire.

8- Exemples de mouvement

8- 1- Le mouvement circulaire

On considère le mouvement d'un point matériel M dont la trajectoire est un cercle dans le plan XOY, de centre O et de rayon R.

i- le vecteur position : peut s'écrire dans la base cartésienne : $\overrightarrow{OM} = R\cos\theta\ \vec{\imath} + R\sin\theta\ \vec{\jmath}$. ou encore dans le base des coordonnées polaires $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\tau})$: $\overrightarrow{OM} = R\ \overrightarrow{u_r}$.

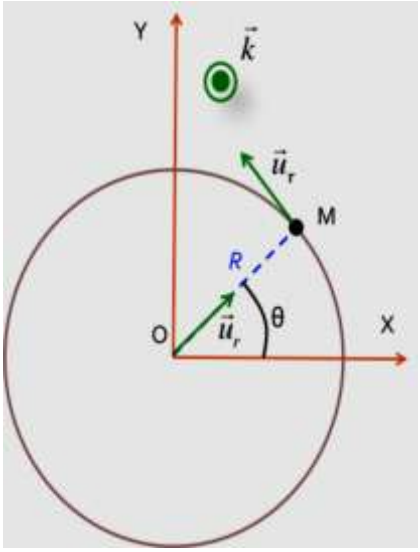


Figure. 1. 21

ii- Le vecteur vitesse

$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\tau} = R\omega\overrightarrow{u_\tau} = V\overrightarrow{u_\tau}$ Avec $V = R\omega$ où $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire

On peut ainsi montrer que : $\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

En effet ;

Soit le trièdre ($\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\tau}$, $\vec{k}$) étant un trièdre direct on a $\overrightarrow{u_\tau} = \vec{k} \wedge \overrightarrow{u_r}$ Ce qui permet d'écrire pour le vecteur vitesse :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = V\overrightarrow{u_\tau} = R\omega\overrightarrow{u_\tau} = R\omega\left(\vec{k} \wedge \overrightarrow{u_r}\right) = \omega\,\vec{k} \wedge R\,\overrightarrow{u_r}$$

En utilisant la définition du vecteur vitesse angulaire, $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$, et l'expression du vecteur position, $\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{u_r}$, On obtient alors $\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$.

Remarque : Si $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur unitaire : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, alors on a le résultat important suivant $\frac{d\,\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$.

iii- Le vecteur accélération

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d(V\,\overrightarrow{u_\tau})}{dt} = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{u_\tau} + V\frac{d\overrightarrow{u_\tau}}{dt} = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{u_\tau} - V\frac{d\overrightarrow{u_\tau}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$
$$= \frac{dV}{dt}\overrightarrow{u_\tau} - V\omega\overrightarrow{u_r} = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{u_\tau} - \frac{V^2}{R}\overrightarrow{u_r}$$

Par identification avec l'expression obtenu dans la base de Frenet :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{u_\tau} + \frac{V^2}{R}\overrightarrow{\boldsymbol{u_n}}$$

On constate que: $\overrightarrow{u_n} = -\overrightarrow{u_r}$

Remarque – Mouvement circulaire uniforme

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme la vitesse angulaire est constante, c.à.d. que l'accélération angulaire est nulle : $\omega = cste \Longrightarrow \frac{d\omega}{dt} = 0$.

L'accélération tangentielle étant nulle, l'accélération n'a qu'une seule composante, la composante normale :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \overrightarrow{\boldsymbol{\gamma_n}} = \mathrm{R}\omega^2\overrightarrow{\boldsymbol{u_n}}$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme l'accélération est toujours normale à la trajectoire et orientée vers le centre du cercle : l'accélération est centripète.

8- 1- Mouvement hélicoïdal

C'est un mouvement tel que : $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\theta \end{cases}$

On coordonnées cylindriques, on peut écrire : $\begin{cases} \rho = R \implies \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{z} = h\dot{\theta} = h\omega \end{cases}$

Calculons la vitesse du point *M(x, y, z)* à partir de l'expression $\overrightarrow{OP} = R\overrightarrow{e_\rho} + h\theta\overrightarrow{e_z}$.

$$\vec{V} = R\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} + h\omega\overrightarrow{e_z}$$

Or $\frac{d\,\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{e_\rho}$, alors la vitesse peux s'écrire $\vec{V} = R\omega\,\overrightarrow{e_\varphi} + h\omega\overrightarrow{e_z}$

Son module sera donnée par : $\|\vec{V}\| = \vec{V} = \omega\sqrt{R^2 + h^2}$

A présent on peut calculer l'accélération

$$\vec{\gamma} = R\dot{\omega}\,\overrightarrow{e_\varphi} + R\omega\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} + h\dot{\omega}\overrightarrow{e_z} = R\dot{\omega}\,\overrightarrow{e_\varphi} + R\omega\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{e_\varphi}\right) + h\dot{\omega}\overrightarrow{e_z}$$
$$= \dot{\omega}\,\overrightarrow{e_\varphi} - R\omega^2\,\overrightarrow{e_\rho} + h\dot{\omega}\overrightarrow{e_z}$$

Son module s'exprime sous la forme suivante :

$$\|\vec{\boldsymbol{\gamma}}\|^2 = \dot{\boldsymbol{\omega}}^2(\mathbf{R}^2 + \mathbf{h}^2) + \mathbf{R}^2\boldsymbol{\omega}^4$$

III- Cinématique avec changement de référentiel

1- Mouvement relatif et mouvement absolu

On considère deux référentiels $R_1(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$ et $R_2(O_2; X_2, Y_2, Z_2)$, de base respectives $(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ et $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$, en mouvement l'un par rapport à l'autre. On suppose que R_1 est fixe, qu'on l'appel référentiel absolu. Le référentiel R_2 est alors appelé référentiel relatif; il est en mouvement par rapport à R_1. On étudie le mouvement d'un point matériel **M** par rapport aux deux référentiels :

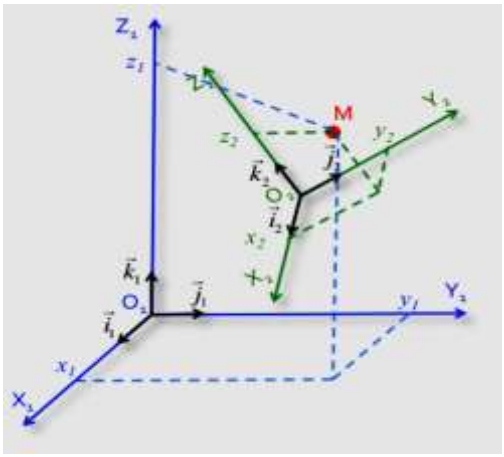


Figure. 1. 22

1. 1- Le mouvement absolu de M

Le mouvement de ***M*** par rapport au référentiel absolu est appelé mouvement absolu. La position du point ***M*** est repérée par la donnée des coordonnées cartésiennes dans le référentiel R_1 ***(Voir figure. 1. 22) :***

$$\overrightarrow{O_1M} = x_1\ \vec{\imath}_1 + y_1\ \vec{\jmath}_1 + z_1\ \vec{k}_1$$

La vitesse absolue de **M** est la vitesse du point matériel **M** par rapport au référentiel absolu, elle est obtenue en dérivant par rapport au temps le vecteur position dans le référentiel R_1:

$$\vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}$$

Les vecteurs de la base $(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ étant liés au référentiel R_1 leurs dérivées temporelles respectives sont nulles : $\left.\frac{d\,\vec{\imath}_1}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\,\vec{\jmath}_1}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\,\vec{k}_1}{dt}\right|_{R_1} = \vec{0}$. Il suffit alors de dériver les composantes :

$$\vec{V}(M/R_1) = \dot{x}_1\ \vec{\imath}_1 + \dot{y}_1\ \vec{\jmath}_1 + \dot{z}_1\ \vec{k}_1$$

L'accélération absolue est obtenue en dérivant la vitesse absolue par rapport au temps dans le référentiel absolu : $\vec{\gamma}(M/R_1) = \left.\frac{d\,\vec{V}(M/R_1)}{dt}\right|_{R_1}$

Là aussi, il suffit de dériver les composantes du vecteur vitesse absolue :

$$\vec{\gamma}(M/R_1) = \ddot{x}_1\ \vec{\imath}_1 + \ddot{y}_1\ \vec{\jmath}_1 + \ddot{z}_1\ \vec{k}_1$$

1. 2- Mouvement relatif de M

Le mouvement de ***M*** par rapport au référentiel relatif est appelé mouvement relatif. La position du point ***M*** est repérée par la donnée des coordonnées cartésiennes dans le référentiel ***R_2 (voir figure 12)***

$$\overrightarrow{O_2M} = x_1\ \vec{\imath}_2 + y_2\ \vec{\jmath}_2 + z_2\ \vec{k}_2$$

La vitesse relative de ***M*** est la vitesse du point matériel par rapport au référentiel relatif, elle est obtenue en dérivant par rapport au temps le vecteur position dans le référentiel ***R_2*** :

$$\vec{V}(M/R_2) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2}$$

Dans ce cas les vecteurs de la base $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$ étant liés au référentiel ***R_2*** leurs dérivées temporelles respectives sont nulles :

$$\left.\frac{d\,\vec{\imath}_2}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d\,\vec{\jmath}_2}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d\,\vec{k}_2}{dt}\right|_{R_2} = \vec{0}$$

Donc là aussi, il suffit de dériver les composantes :

$$\vec{V}(M/R_2) = \dot{x}_2\ \vec{\imath}_2 + \dot{y}_2\ \vec{\jmath}_2 + \dot{z}_2\ \vec{k}_2$$

L'accélération relative est obtenue en dérivant la vitesse relative par rapport au temps dans le référentiel relatif : $\vec{\gamma}(M/R_2) = \left.\frac{d\,\vec{V}(M/R_2)}{dt}\right|_{R_2}$

Elle a comme expression dans la base relative :

$$\vec{\gamma}(M/R_2) = \ddot{x}_2\ \vec{\imath}_2 + \ddot{y}_2\ \vec{\jmath}_2 + \ddot{z}_2\ \vec{k}_2$$

1. 3- Cas particulier : R_2 en translation rectiligne par rapport à R_1

Dans ce cas, les vecteurs de la base relative $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$ sont aussi fixe par rapport au référentiel $\mathbf{R_1}$:

$$\left.\frac{d\,\vec{\imath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\,\vec{\jmath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\,\vec{k}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{0}$$

1. 4- Cas particulier : R_2 en rotation par rapport à R_1

Si le référentiel $\mathbf{R_2}$ est en rotation par rapport au référentiel $\mathbf{R_1}$ avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_2/R_1)$. Les vecteurs de la base relative sont alors aussi en rotation avec la même vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{\omega}$. En utilisant le résultat exprimé dans la remarque à la fin du paragraphe précédente, on obtient les dérivées temporelles respectives des vecteurs de base :

$$\left.\frac{d\,\vec{\imath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath}_2 \quad , \quad \left.\frac{d\,\vec{\jmath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath} \quad , \quad \left.\frac{d\,\vec{k}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}_2$$

1. 5- Cas général : R_1 en mouvement quelconque par rapport à R_2

Tout mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre peut être ramené à la composition d'un mouvement de translation rectiligne et d'un mouvement de rotation, d'où l'importance de ces deux types de mouvement.

2- Dérivation en repère mobile

Dans toute la suite (sauf si autrement précisé), on va considérer les deux référentiels R_1 et R_2 liés respectivement au repères (O_1, X_1, Y_1, Z_1) et (O_2, X_2, Y_2, Z_2) et caractérisés, respectivement, par les bases orthonormées $(\vec{\imath_1}, \vec{\jmath_1}, \vec{k_1})$ et $(\vec{\imath_2}, \vec{\jmath_2}, \vec{k_2})$. On considère que R_2 est en mouvement (quelconque) par rapport à R_1 et que ce mouvement est caractérisé par la vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_2/R_1)$.

Soit un vecteur $\vec{A}$ défini par son expression dans le repère relatif R_2 : $\vec{A} = x_2\,\vec{\imath_2} + y_2\,\vec{\jmath_2} + z_2\,\vec{k_2}$

Pour dériver le vecteur $\vec{A}$ par rapport au référentiel R_1 il faut dériver les composantes et les vecteurs de la base $(\vec{\imath_2}, \vec{\jmath_2}, \vec{k_2})$ mobile par rapport à R_1 :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_1} = \dot{x}_2\,\vec{\imath_2} + x_2\,\frac{d\vec{\imath_2}}{dt} + \dot{y}_2\,\vec{\jmath_2} + y_2\,\frac{d\vec{\jmath_2}}{dt} + \dot{z}_2\,\vec{k_2} + z_2\,\frac{d\vec{k_2}}{dt}$$

On a vu que la dérivée d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ en rotation avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par rapport à un repère fixe est donnée par $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$. En remplaçant $\vec{u}$ par les vecteurs de la base $(\vec{\imath_2}, \vec{\jmath_2}, \vec{k_2})$ on obtient alors :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_1} = \dot{x}_2\,\vec{\imath_2} + \dot{y}_2\,\vec{\jmath_2} + \dot{z}_2\,\vec{k_2} + x_2(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath_2}) + y_2\,(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath_2}) + z_2\,(\vec{\omega} \wedge \vec{k_2})$$

Or $\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_2} = \dot{x}_2\,\vec{\imath_2} + \dot{y}_2\,\vec{\jmath_2} + \dot{z}_2\,\vec{k_2}$ est la dérivée du vecteur $\vec{A}$ dans le référentiel relatif

Et

$$x_2(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath_2}) + y_2\,(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath_2}) + z_2\,(\vec{\omega} \wedge \vec{k_2}) = \vec{\omega} \wedge (x_2\vec{\imath_2} + y_2\,\vec{\jmath_2} + z_2\,\vec{k_2}) = \vec{\omega} \wedge \vec{A}$$

Ce qui permet d'écrire la dérivée du vecteur $\vec{A}$ dans le référentiel R_1 connaissant son expression dans le référentiel R_2.

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \vec{A}$$

3- Composition des vitesses

On commence par décomposer le vecteur position absolu en fonction du vecteur position relatif : $\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M}$

La vitesse absolue est obtenue en dérivant dans le référentiel absolu R_1 :

$$\vec{V_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1}$$

En utilisant les résultats obtenus dans le paragraphe précédent concernant la dérivation en repère mobile, on exprime le dernier terme en haut (on remplace $\vec{A}$ par $\overrightarrow{O_2M}$)

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

Ce qui donne pour l'expression de la vitesse absolue :

$$\overrightarrow{V_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2} + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

Qui est le résultat cherché. Le premier terme est la vitesse relative et les deux derniers termes donnent la vitesse d'entrainement.

Donc :

$\overrightarrow{V_a} = \vec{V}(M/R_2) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}$: est la vitesse absolue du point matériel ;

$\overrightarrow{V_r} = \vec{V}(M/R_2) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2}$: est la vitesse relative du point matériel ;

$\overrightarrow{V_e} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}$: est la vitesse d'entrainement : La vitesse qu'aurait M par rapport à (R_1) s'il était fixe dans (R_2).

Autrement, la **vitesse d'entraînement** est la vitesse du point coïncident, c.-à-d. la vitesse qu'aurait M par rapport à (R_1) s'il était fixe dans (R_2).

Le mouvement d'entrainement: c'est le mouvement de R_1/R_2

La loi de composition des vitesses s'écrit : $\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{V_e}$

4- Composition des accélérations

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_a}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}\right|_{R_1} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1} + \left.\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)\right|_{R_1}$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_a}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}\right|_{R_1} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1} + \frac{d(\vec{\omega}\,(R_2/R_1)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M}) + (\vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1}$$

On développe le premier et le dernier terme.

$$\left.\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{V_r}$$

Où on a utilisé la règle de dérivation d'un vecteur dans un repère mobile. Pour le dernier terme on obtient :

$$\vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1} = (\vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \wedge \left(\vec{\omega}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1}$$

$$= \quad \vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \vec{V_r} + \vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge (\,\vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}\,)$$

En rapportant dans l'expression initiale, on obtient l'expression complète de l'accélération absolue :

$$\vec{\gamma_a} = \left.\frac{d\vec{V_a}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right|_{R_1} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1} + \frac{d(\vec{\omega}\,(R_2/R_1)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega}\,(R_2/R_1)$$
$$\wedge\,(\,\vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}\,) + 2\vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \vec{V_r}$$

Le premier terme à droite est l'accélération relative, le dernier est l'accélération de Coriolis et les termes restants composent l'accélération d'entrainement.

Donc :

$\vec{\gamma_a} = \vec{\gamma}(M/R_1) = \left.\frac{d\vec{V_a}}{dt}\right|_{R_1}$: est l'accélération absolue du point matériel ;

$\vec{\gamma_r} = \vec{\gamma}(M/R_2) = \left.\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_2M}}{dt^2}\right|_{R_2}$: est l'accélération relative du point matériel ;

$\vec{\gamma_e} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1} + \frac{d(\vec{\omega}\,(R_2/R_1)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge (\,\vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}\,)$: est l'accélération d'entrainement ;

$\vec{\gamma_c} = 2\vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \vec{V_r}$: est l'accélération complémentaire, aussi appelée accélération de Coriolis.

La loi de décomposition des accélérations s'écrit de la façon suivante :

$$\vec{\gamma_a} = \vec{\gamma_r} + \vec{\gamma_e} + \vec{\gamma_c}$$

L'accélération **d'entraînement** comme l'accélération du point coïncident, c.-à-d. l'accélération qu'aurait M dans (R_1) s'il était fixe dans (R_2) :

5- Exemples de mouvements particuliers

On considère deux cas particuliers de mouvement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu.

5. 1- Mouvement rectiligne

Si le référentiel $\mathbf{R_2}$ est en translation rectiligne par rapport au référentiel absolu $\mathbf{R_1}$, la vitesse de rotation angulaire est nulle : $\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{0}$.

La formule de décomposition des vitesses devient alors : $\vec{V_a}(M) = \vec{V_r}(M) + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1}$

Le second terme n'étant rien d'autre que la vitesse absolue du point O_2 : $\vec{V_a}(M) = \vec{V_r}(M) + \vec{V_a}(O_2)$

De même, l'accélération absolue s'écrit : $\vec{\gamma_a} = \left.\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right|_{R_2} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1}$

Le premier terme étant l'accélération relative du point **M** et le second l'accélération absolue du point O_2 : $\vec{\gamma_a}(M) = \vec{\gamma_r}(M) + \vec{\gamma_a}(O_2)$

Si en plus le mouvement relatif est rectiligne uniforme on aura la vitesse du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu qui est constante c.à.d. $\overrightarrow{V_a}(O_2) = \overrightarrow{cste}$ et $\overrightarrow{\gamma_a}(O_2) = \vec{0}$.

L'accélération relative est alors égale à l'accélération absolue : $\overrightarrow{\gamma_a}(M) = \overrightarrow{\gamma_r}(M)$

5. 2- Mouvement de rotation uniforme

On suppose que le référentiel $\mathbf{R_2}$ est en rotation uniforme par rapport au référentiel absolu $\mathbf{R_1}$, et que la rotation s'effectue autour d'un axe passant par l'origine commun aux deux référentiels $\mathbf{O = O_1 = O_2}$. Dans ce cas $\boldsymbol{\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{\omega} = \overrightarrow{Cste}}$; c.à.d. $\boldsymbol{\frac{d\vec{\omega}(R_2/R_1)}{dt} = \vec{0}}$.

Les expressions de la vitesse d'entrainement et de l'accélération d'entrainement deviennent particulièrement simples :

$$\overrightarrow{V_e} = \vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge (\vec{\omega}\,(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{0M})$$

IV- Application (voir TD)