

Chapitre 3

Etude énergétique de la mécanique du point matériel

En principe, les lois de Newton permettent de résoudre tous les problèmes de la mécanique classique. Si on connaît les positions et les vitesses initiales des particules d'un système ainsi que toutes les forces agissant sur elles, on peut prévoir l'évolution du système au cours du temps. Mais dans la pratique, on ne connaît pas toujours toutes les forces qui entrent en jeu et même si c'est le cas, les équations à résoudre sont trop nombreuses ou trop complexes. Dans bien des cas des informations intéressantes, concernant le système, peuvent être obtenues plus simplement en faisant appel à des notions de l'énergie.

L'énergie est une grandeur fondamentale de la physique qui peut donner naissance à une action (déplacer chauffer, éclairer, casser, ...). Aboutissant à une équation scalaire, elle permet aussi de mettre en relation plusieurs domaines de la physique (notamment la thermodynamique), puisque l'énergie perdue par un système mécanique doit se retrouver sous une forme différente. Par conséquent, elle peut prendre plusieurs formes : **thermique, mécanique, électrique, chimique, nucléaire, ...**

I- Travail et puissance d'une force

1- Notion de travail d'une force

Tout comme la notion de force, la notion de travail est d'origine physiologique. Elle est liée à la notion d'effet utile des forces sur des corps en mouvement. Il est intuitif que, lorsqu'on veut déplacer un objet, l'effort fourni est d'autant plus grand que la distance parcourue est grande et que la force à appliquer est grande. Cet effort peut dépendre aussi de la trajectoire suivie pour déplacer l'objet. Le travail, est une notion physique qui va rendre compte de cet effort.

Le travail se note W (de l'anglais Work = travail).

1 – 1- Travail d'une force constante

C'est le cas le plus simple et le plus connu. Si $\vec{F}$ est la force qui nous occupe et qu'on se déplace de M_1 à M_2 , le travail de la force $\vec{F}$ est : $W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$.

L'unité du travail est le Joule [1 Joule = 1 N.m]

Un joule correspond au travail fourni par une force de 1 newton qui déplace son point d'application d'un mètre dans sa propre direction.

- La force est dite motrice si son travail est positif ($W > 0$).
- La force est résistante si son travail est négatif ($W < 0$).
- La force ne travaille pas si son travail est nul ($W = 0$).

Le travail est nul dans les trois cas suivants :

- la force est nulle : $F = 0$
- la particule est fixe : $M_1 M_2 = 0$
- les directions de la force et du déplacement sont perpendiculaires : $\theta = \frac{\pi}{2}$.

1- 2- Travail d'une force non constante

Dans cette situation, on commence par définir le travail élémentaire, dW , de la force $\vec{F}$ lorsque le point matériel M, décrivant une trajectoire (C) par rapport à un référentiel R, soumis à la force $\vec{F}$ se déplace de A à B pendant un instant dt . Pour dt petit, la force peut être considérée comme constante et la trajectoire peut être assimilée à sa tangente. D'autre part, on sait que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire donc $\overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{V} dt = d\overrightarrow{OM}$.

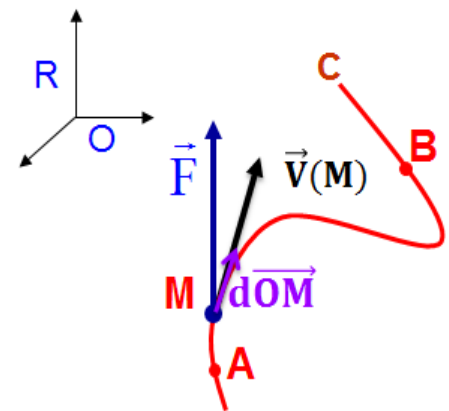
On définit, le travail élémentaire δW de la force $\vec{F}$ au cours d'un déplacement infinitésimal $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ du point matériel M, est égale au produit scalaire :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Le travail total de la force $\vec{F}$ le long du trajet AB (non nécessairement rectiligne) est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Le AB en bas de l'intégrale indique que l'intégration s'effectue du point A au point B en suivant la courbe (dans l'espace) parcourue par le point M (intégrale curviligne). L'expression $C_{AB} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$ est appelée circulation du vecteur force $\vec{F}$.



Le travail W est égal à la circulation de la force le long du parcours AB

Lorsque le point d'application de la force a lieu sur un contour fermé, on note :

$$W_C(\vec{F}) = \oint \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

L'expression du travail d'une force dans un système des coordonnées

i- Travail en coordonnées cartésiennes:

$$d\overrightarrow{OM} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$dW = dW_x + dW_y + dW_z$$

ii- Travail en coordonnées cylindriques:

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{k}$$

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{k}$$

$$dW = F_r dr + F_\varphi r d\varphi + F_z dz$$

2- Puissance d'une force

Dans les applications industrielles de la physique, il ne suffit pas de savoir quelle quantité de travail un moteur peut fournir, il est aussi primordial de savoir combien de temps il lui faudra pour effectuer ce travail. La puissance est une grandeur qui mesure le taux de travail ; elle est définie comme étant une quantité de travail par unité de temps. Pour une quantité de travail ΔW fournie pendant un intervalle de temps Δt , on définit la puissance moyenne de la force $\vec{F}$ par : $P_m(\vec{F}) = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

La puissance instantanée est obtenue en passant à la limite $\Delta t \rightarrow 0$: $P(\vec{F}) = \frac{dW}{dt}$

L'unité SI de puissance est le watt (W) ; il vaut : $1W = 1J/1s$.

Le watt est la puissance qu'il faut développer pour fournir un travail d'un joule en une seconde.

Autres unités:

$$1 \text{ cheval-vapeur} = 1CV = 736 \text{ W}$$

$$1 \text{ kW} = 1000 \text{ W} = 10^3 \text{ W}$$

$$1 \text{ MW} = 1000000 \text{ W} = 10^6 \text{ W}$$

$$1 \text{ GW} = 1000000000 \text{ W} = 10^9 \text{ W}$$

Soit un point matériel M de vitesse $\vec{V}(M/R)$, par rapport à un référentiel R, soumis à une force $\vec{F}$. La puissance de $\vec{F}$, dans le référentiel R, s'exerçant sur un le point M en mouvement est définie par:

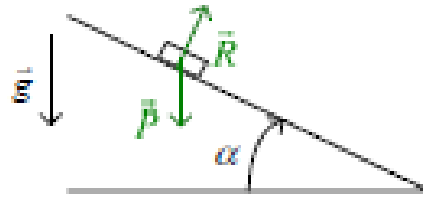
$$P(\vec{F}) = \frac{dW_{A \rightarrow B}(\vec{F})}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{OM}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/R)$$

La puissance dépend du référentiel.

- Si la puissance est positive ($P(\vec{F}) > 0$) la force est dite *motrice*.
- Si la puissance est négative ($P(\vec{F}) < 0$), la force est dite *résistante*.
- Si la puissance est nulle ($P(\vec{F}) = 0$) Il s'agit d'une force qui ne travaille pas. C'est le cas d'une force perpendiculaire au mouvement du point matériel ou d'un point matériel immobile.

3- Exemples

i- Forces perpendiculaires au déplacement

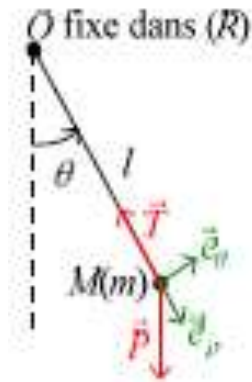


- Travail élémentaire de $\vec{R}$:

$$\delta W(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{V}(M/R) dt = 0 \quad \text{car} \quad \vec{R} \perp \vec{V}(M/R)$$

$$\text{Donc } W_{A \rightarrow B}(\vec{R}) = \int_{AB} \delta W(\vec{R}) = 0$$

ii- Travail élémentaire de $\vec{T}$ tension de fil d'un pendule:



$$\delta W(\vec{T}) = \vec{T} \cdot d\vec{OM} = \vec{T} \cdot l d\theta \vec{e}_\theta = 0 \quad \text{car} \quad \vec{e}_\theta \perp \vec{T}$$

iii- Force de frottement fluide

$$\vec{F} = -\lambda \vec{V}(M/R)$$

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/R) dt = -\lambda \|\vec{V}(M/R)\|^2 dt = -\lambda V^2 dt$$

Le travail de $\vec{F}$ dépend du chemin suivi et de la vitesse

Remarque : $\vec{F}$ n'est constante que si M se déplace à vecteur vitesse constant.

II – Energie cinétique

1- Définition

L'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{V}(M/R)$ par rapport à un référentiel Galiléen, R , est définie par $E_c = \frac{1}{2} m V^2(M/R)$

Ou encore, en fonction de la quantité de mouvement $E_c = \frac{1}{2} \vec{p}(M/R) \cdot \vec{V}(M/R) = \frac{1}{2m} \vec{p}^2(M/R)$

2- Théorème de la puissance cinétique (T.P.C)

2- 1- Dans un référentiel Galiléen

Enoncé : La puissance de la résultante, $\vec{F}_{ext}$, de toutes les forces extérieures appliquées à un point matériel dans un référentiel Galiléen est égale à la dérivée de son énergie cinétique:

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum P(\vec{F}_{ext})$$

Preuve : La puissance de la résultante des forces extérieures peut être exprimée de la façon suivante $P(\vec{F}_{ext}) = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{V}(M/R) = m \vec{\gamma}(M/R) \cdot \vec{V}(M/R) = m \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \cdot \vec{V}(M/R)$

Où on a utilisé le PFD dans un référentiel Galiléen. D'autre part nous avons la relation suivante

$$\frac{dV^2}{dt} = \frac{d\vec{V}^2(M/R)}{dt} = \frac{d(\vec{V} \cdot \vec{V})}{dt} \cdot \vec{V} = 2 \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V}$$

En remplaçant dans la première relation on trouve

$$P(\vec{F}_{ext}) = \frac{1}{2} m \frac{dV^2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m V^2 \right) = \frac{dE_c}{dt}$$

Remarque : On peut démontrer le T.E.C comme suit :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m V^2 \right) = \frac{1}{2} m 2V \frac{dV}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} = \sum \vec{F} \cdot \vec{V} = \sum P(\vec{F}_{ext})$$

2- 2- Dans un référentiel non Galiléen R'

$$\frac{dE_c(M/R')}{dt} = \sum P(\vec{F}_{ext}) + \sum P(\vec{F}_{inertie})$$

Preuve : La puissance de la résultante des forces extérieures peut être exprimée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum P(\vec{F}) &= \sum \vec{F} \cdot \vec{V}(M/R') = m \frac{d\vec{V}(M/R')}{dt} \cdot \vec{V}(M/R') \\ \sum P(\vec{F}_{ext}) + \sum P(\vec{F}_{inertie}) &= m \frac{d\vec{V}(M/R')}{dt} \cdot \vec{V}(M/R') \end{aligned}$$

Où on a utilisé le PFD dans un référentiel non Galiléen. D'autre part nous avons la relation suivante

$$\frac{dV^2}{dt} = \frac{d\vec{V}^2(M/R')}{dt} = \frac{d(\vec{V}(M/R') \cdot \vec{V}(M/R'))}{dt} = 2 \frac{d\vec{V}(M/R')}{dt} \cdot \vec{V}(M/R')$$

En remplaçant dans la première relation on trouve

$$P(\vec{F}_{ext}) + P(\vec{F}_{inertie}) = m \frac{d\vec{V}(M/R')}{dt} \cdot \vec{V}(M/R') = \frac{1}{2} m \frac{dV^2(M/R')}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m V^2(M/R') \right) = \frac{dE_c(M/R')}{dt}$$

Remarque : On peut démontrer le T.E.C dans un référentiel non Galiléen comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{dE_c(M/R')}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m V^2(M/R') \right) = \frac{1}{2} m 2V(M/R') \frac{dV(M/R')}{dt} = m \frac{d\vec{V}(M/R')}{dt} \cdot \vec{V}(M/R') \\ &= \sum \vec{F} \cdot \vec{V}(M/R') = \sum (\vec{F}_{ext} + \vec{F}_{inertie}) \cdot \vec{V}(M/R') = \sum P(\vec{F}_{ext}) + \sum P(\vec{F}_{inertie}) \end{aligned}$$

Remarque : la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas, puisqu'elle est à chaque instant normale à la vitesse du point dans le référentiel entraîné (sa puissance est toujours nulle) :

$$P(\vec{F}_{ic}(M)) = \vec{F}_{ic}(M) \cdot \vec{V}(M/R') = 0 \quad (\forall t)$$

3- Théorème de l'énergie cinétique

3- 1- dans un référentiel galiléen R

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces.

On peut écrire ce théorème sous forme différentielle : $\delta W(\vec{F}_{ext}) = dE_c$

Dans un référentiel galiléen, la différentielle de l'énergie cinétique correspond à la somme des travaux élémentaires des forces

Enoncé : Dans un référentiel Galiléen, la variation de l'énergie cinétique, entre deux position M_1 et M_2 d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures (dont la résultante est noté $\vec{F}_{ext}$) est égal au travail de cet résultante entre ces deux points :

Sous forme différentielle : $dE_c = \delta W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_{ext})$

Sous forme intégrale : $\Delta E_c = E_c(M_2) - E_c(M_1) = \sum W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_{ext})$

3- 2- dans un référentiel non galiléen R'

Si le référentiel n'est pas galiléen, on peut également appliquer le théorème de l'énergie cinétique. Cependant, il faut rajouter au travail de la résultante des forces, le travail des forces d'inertie :

Sous forme différentielle : $dE_c = \delta W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_{ext}) + \delta W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_{inertie})$

Sous forme intégrale : $\Delta E_c = \sum W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_{ext}) + \sum W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_{inertie})$

4- Application de théorème de l'énergie cinétique

i- pendule simple

On étudie un point matériel M(m) dans un référentiel du laboratoire supposé galiléen.

- Les puissances (ou travaux) en jeu sont :

$$P(\vec{P}) = m\vec{g} \cdot \vec{V} = -mgl \dot{\theta} \sin\theta$$

$$P(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{V} = 0$$

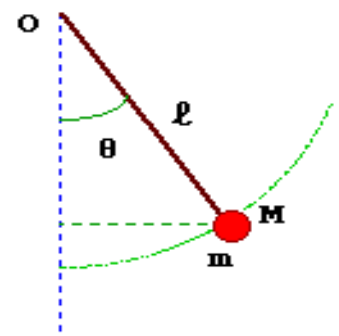
- Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum P(\vec{F}_{ext}) = \frac{d(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2)}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mgl\dot{\theta}\sin\theta \quad \text{D'où } \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Remarque : on peut aussi écrire

$$W = mg(x_f - x_i) = mg(l\cos\theta - l) = \Delta E_c = \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 - V_0^2)$$

Que l'on dérive pour obtenir $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$



ii- Amortissement visqueux

$$\vec{F} = -\lambda \vec{v} \Rightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\lambda v^2$$

Soit :

$$\frac{dE_c}{dt} = -\lambda v^2 = -\frac{\lambda}{m}(mv^2) = -\frac{2\lambda}{m}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{2\lambda}{m}E_c$$

c.à.d.

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{2\lambda}{m}E_c = -\frac{2}{\tau}E_c$$

On obtient la solution :

$$\frac{dE_c}{E_c} = -\frac{2\lambda}{m}dt \Rightarrow E_c = E_o e^{-\frac{2\lambda}{m}t} = E_o e^{-2t/\tau}$$

Où $\tau = \frac{m}{\lambda}$: est la constante de temps d'amortissement

À cause de la force de frottement visqueux, l'énergie cinétique décroît avec le temps.

III- Energie potentielle et forces conservatives

1 – Forces conservatives

Le théorème de l'énergie cinétique permet de déterminer l'état de la vitesse d'un point matériel. Il repose sur la détermination du travail de toutes les forces extérieures appliquées à ce point. Il est possible de définir une seconde fonction d'état appelée énergie potentielle du système. Pour ce faire, il importe de distinguer deux types de forces extérieures:

i- Les forces conservatives

Une force est dite conservative si son travail entre deux point **A** et **B** dépend uniquement de la position de départ et de la position d'arrivée. Autrement dit, le travail est indépendant du chemin suivi pour aller de **A** vers **B**.

Exemples de forces conservatives

- la force électrique qui dérive du potentiel électrique
- la force gravitationnelle (exemple du poids d'un corps) qui dérive d'un potentiel de gravitation

ii- Les forces non conservatives

Une force est dite conservative si son travail dépend du chemin suivi.

Exemples de forces non-conservatives

- La force de Lorentz qui ne travaille pas
- Les forces de frottement
- Les forces de pression

Les forces conservatives possèdent trois propriétés remarquables :

- i- Le travail ne dépend pas du chemin suivi ;
- ii- Existence d'un potentiel de la force conservative ;

iii- Conservation de l'énergie mécanique.

2- Énergie potentielle

Par définition, le travail des forces conservatives ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et final. Le travail de ces forces peut donc s'exprimer à partir d'une **fonction d'état** appelée **énergie potentielle** (E_p). Pour des raisons qui apparaîtront clairement au paragraphe suivante (Energie mécanique), nous conviendrons que la variation d'énergie potentielle est représentée par l'opposé du travail des forces conservatives soit :

$$E_p(B) - E_p(A) = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{ext}}^C)$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\Delta E_p = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{ext}}^C)$$

Cette relation conduit, en explicitant le travail, à la *définition intégrale* de l'énergie potentielle:

$$E_p(B) - E_p(A) = - \int_A^B \vec{F}_{\text{ext}}^C \cdot d\vec{l} \quad (1)$$

De l'expression intégrale, il est possible de déduire la *définition différentielle* de l'énergie potentielle en faisant apparaître le travail élémentaire de la force conservative soit :

$$dE_p = - \vec{F}_{\text{ext}}^C \cdot d\vec{l} \quad (2)$$

Finalement la différentielle de l'énergie potentielle peut s'exprimer en fonction du gradient de E_p :

$$dE_p = \overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{l}$$

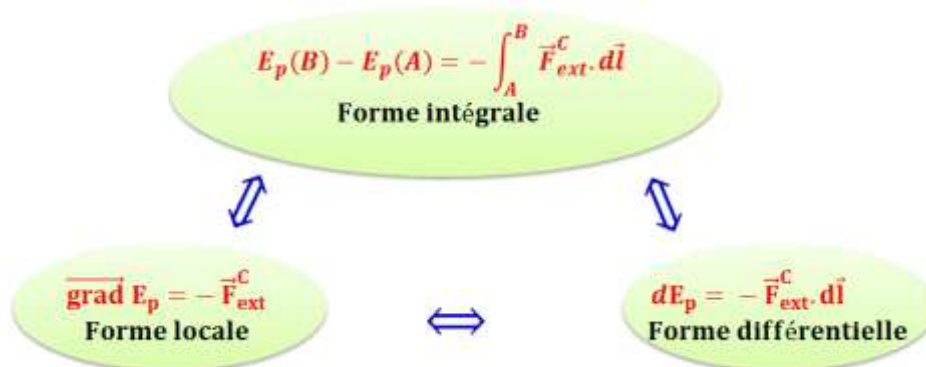
On aboutit à la *définition locale* de l'énergie potentielle :

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_p = - \vec{F}_{\text{ext}}^C \quad (3)$$

Conclusion : Une force $\vec{F}$ est dite conservative si elle dérive d'un potentiel :

$$\vec{F}_{\text{ext}}^C = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

Les trois formes précédentes sont équivalentes entre elles comme l'indique la figure récapitulative suivante.



Représentation schématique des trois formes possibles de l'énergie potentielle

2- Gradient d'une fonction

Soit $f(x, y, z)$ une fonction scalaire des coordonnées cartésiennes x, y, z et soient $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy, Oz . On appelle gradient de la fonction $f(x, y, z)$ le vecteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{k}$$

Il est commode d'introduire l'opérateur différentiel ∇ (*nabla*) défini par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ceci permet d'écrire le gradient d'une fonction scalaire $f(x, y, z)$ sous la forme suivante : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$

En coordonnées cylindriques, les composantes du gradient sont :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi,z} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{\rho,z} \vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho,\varphi} \vec{k}$$

En coordonnées sphériques, les composantes du gradient sont :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \vec{e}_\varphi$$

Remarques

♠ Dans le système des coordonnées cartésiennes, le vecteur déplacement élémentaire du point matériel M s'écrit :

$$d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz = df$$

Cette propriété est indépendante du système de coordonnées

♠ L'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante près ; c.à.d. que E_p et $E'_p = E_p + C$ (où C est une constante), donnent lieu à la même force conservative :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E'_p = -\overrightarrow{\text{grad}} (E_p + C) = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

♠ Puisque $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0}$, quel que soit la fonction de f , pour vérifier qu'une force $\vec{F}$ est conservative, il suffit de vérifier que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$.

2- Travail d'une force conservative

On remarque d'après les exemples précédents que le travail fourni par la force quand le point matériel se déplace de **A** vers **B** est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle entre ces deux positions :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -\Delta E_p = -(E_p(B) - E_p(A))$$

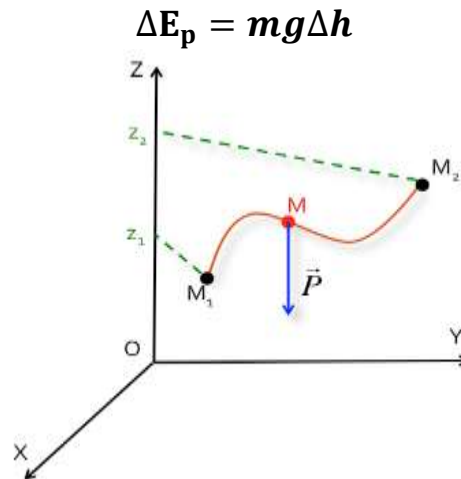
3- Exemples

2. 1- Energie potentielle de pesanteur

Dans un référentiel Galiléen $R(O, X, Y, Z)$, on considère le mouvement d'un point matériel M de masse m soumis à la pesanteur terrestre: $\vec{P} = -mg\vec{k}$. Le travail du poids quand le point matériel se déplace de A vers B est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{OM} = \int_{z_1}^{z_2} -mg \cdot dz = -mg(z_2 - z_1) = -mg\Delta h$$

Donc :



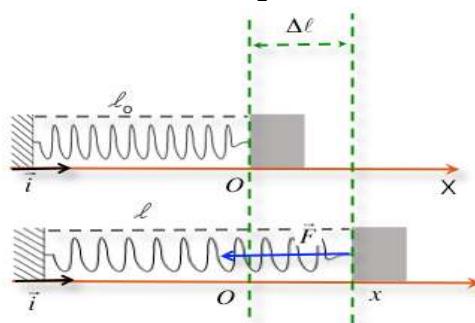
L'énergie potentielle peut être calculer en utilisant la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$ et elle est donnée par :

$$E_p = mgh + C \quad \text{où } C \text{ est une constante d'intégration.}$$

2. 2- Energie potentiel élastique

On considère le mouvement d'un point matériel attaché à un ressort de raideur k . En se basant sur le schéma ci-dessous, la force de rappel du ressort est donnée par $\vec{F} = -k\Delta l \vec{i} - kx \vec{i}$ Le travail de cette force quand le point matériel se déplace de A vers B est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \int_{x_1}^{x_2} -kx \cdot dx = -\left(\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2\right)$$



L'énergie potentielle dont dérive la force de rappel est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 + cste$$

IV- Energie mécanique

1- l'énergie mécanique

Nous introduisons maintenant une nouvelle fonction particulièrement utile dans tous les problèmes de mécanique, l'**énergie mécanique** d'un système. Pour définir cette fonction, nous partons du théorème de l'énergie cinétique dans lequel nous faisons apparaître le travail des forces conservatives et celui des forces non conservatives, soit :

$$[E_c(B) - E_c(A)] = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^C) + \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC})$$

En appelant E_p l'énergie potentielle totale, somme des énergies potentielles dont dérive chaque force conservative, on peut écrire :

$$[E_c(B) - E_c(A)] = [E_p(A) - E_p(B)] + \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC})$$

Ce qui, en faisant passer l'énergie potentielle dans le membre de gauche, conduit à :

$$[E_c(B) - E_c(A)] + [E_p(B) - E_p(A)] = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC})$$

Si l'on regroupe dans le premier membre les fonctions qui ne dépendent que de B et de A , il vient :

$$[E_c(B) + E_p(B)] - [E_c(A) + E_p(A)] = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC})$$

Il est possible d'introduire une nouvelle fonction d'état appelée énergie mécanique E_m du système en posant $E_m = E_c + E_p$.

L'introduction de cette fonction permet de présenter de façon très simple le bilan énergétique d'un système par la relation suivante :

$$E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC})$$

C'est le **théorème de l'énergie mécanique**

2- Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel Galiléen

Dans un référentiel **galiléen** R , la variation de l'énergie mécanique E_p d'un point matériel M de masse m **constante** entre deux instants est égale au travail de la force **totale non conservative** F^{nc} qui lui est appliquée :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC}) \quad (\text{Forme différentielle})$$

$$\text{Ou } dE_m = \delta W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC}) \quad (\text{Forme intégrale})$$

Théorème de la puissance mécanique dans R

Dans un référentiel **galiléen** R , la dérivée de l'énergie mécanique d'un point matériel M de masse m **constante** par rapport au temps est égale à la puissance de la force **totale non conservative** F^{nc} que M subit :

$$\left(\frac{dE_m}{dt} \right)_R = P(\vec{F}_{ext}^{NC})$$

3- Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel Galiléen R'

Ici encore, pour déterminer l'évolution de l'énergie mécanique dans un référentiel non galiléen, il faut rajouter aux forces, les forces d'inertie. On peut ainsi décomposer

les forces totales comme la somme des forces à circulation conservative de résultante $\vec{F}_C$, des forces à circulation non conservatives de résultante $\vec{F}_C$ et des forces qui ne travaillent pas de résultante $\vec{R}$. Enfin, on note $\vec{F}_{\text{inertie}}$ la résultante des forces d'inertie ('entraînement' et 'Coriolis'). On obtient alors :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{ext}}^{\text{NC}}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{inertie}}) \quad (\text{Forme différentielle})$$

$$\text{Ou } dE_m = \delta W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{ext}}^{\text{NC}}) + \delta W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{inertie}}) \quad (\text{Forme intégrale})$$

Théorème de la puissance mécanique dans un référentiel Galiléen R' :

$$\left(\frac{dE_m}{dt} \right)_R = P(\vec{F}_{\text{ext}}^{\text{NC}}) + P(\vec{F}_{\text{inertie}})$$

Critère d'utilisation:

- Puissance mécanique: pour établir une équation horaire ($v(t)$ ou $OM(t)$)
- Energie mécanique: pour calculer une vitesse à un instant donné

Remarques :

* Les forces non conservatives étant des forces résistantes, l'énergie mécanique d'un système va diminuer au cours du temps, **donc** $E_m(t_f) < E_m(t_i)$: **le système est dit dissipatif.**

* si $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}^{\text{NC}}) = 0$

- Il n'y a pas de forces non conservatives.
- Il y a de forces non conservatives, mais elles ne travaillent pas.

Dans ce cas : $E_m = \text{constante}$: Le système est conservatif.

4- Conservation de l'énergie mécanique

Si le point matériel n'est soumis qu'à des forces conservatives, ou que le travail des forces non conservatives est nul alors dans ce cas, l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement.

Autrement : Une particule M constitue un système conservatif si les seules forces, appliquées à cette particule, qui travaillent au cours du mouvement, dérivent d'un potentiel.

Dans ce cas, nous avons : $dW = -dE_p$.

D'autre part, $dW = dE_C$.

Donc $dE_C = -dE_p$ ou $d(E_C + E_p) = dE_m = 0$.

Par conséquent : $E_m = E_C + E_p = E_0 = \text{constante}$ ou encore $\frac{dE_m}{dt} = 0$

L'énergie mécanique $E_m(M/R)$, d'un système conservatif, reste constante au cours du mouvement et conserve sa valeur initiale.

Système mécaniquement isolé $\Leftrightarrow E_m = \text{cste}$

Ainsi, dans un référentiel galiléen, si un système est soumis uniquement à des forces à circulation conservative ou bien à des forces ne travaillant pas, l'énergie mécanique

totale est conservée. L'équation obtenue $E_c + E_p = Cte = E_m$ est appelée *intégrale première du mouvement*.

Cette intégrale première du mouvement est donc plus pratique et permet d'obtenir l'équation du mouvement. Ainsi, dans un problème de mécanique, au lieu d'écrire $E_m = E_c + E_p = E_0 = cste$, on écrira plutôt que la dérivée de l'énergie mécanique est nulle (la dérivée d'une constante est nulle) : $\frac{dE_m}{dt} = 0$, ceci nous donnera une équation différentielle du mouvement qui permettra d'obtenir tout aussi simplement les équations horaires du mouvement. Que la 'traditionnelle' relation fondamentale de la dynamique.

5- Applications

i- Ressort élastique

On a $\overrightarrow{OM} = \Delta l \vec{i} = x \vec{i}$

Bilan des forces :

$$\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{k}$$

$$\vec{R} = R_z \vec{k} \text{ (Pas de frottement)}$$

$$\vec{F} = -k \Delta l \vec{i} = -k x \vec{i}$$

L'expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mgz + \frac{1}{2} k x^2$$

D'après le théorème de l'énergie mécanique : pour un système isolé $\frac{dE_m}{dt} = 0$

$$\text{Donc } E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mgz + \frac{1}{2} k x^2 = cste$$

L'altitude z ne change pas, alors $E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 + cste$ (intégrale première du mouvement)

$$\text{Par conséquent : } \frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m (2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{1}{2} k (2\dot{x}x) = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

ii- Pendule simple

$$\overrightarrow{OM} = l \vec{e}_\rho \quad \vec{P} = m \vec{g} \quad \vec{V}(M/R) = l \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

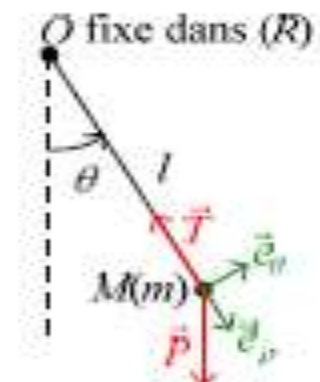
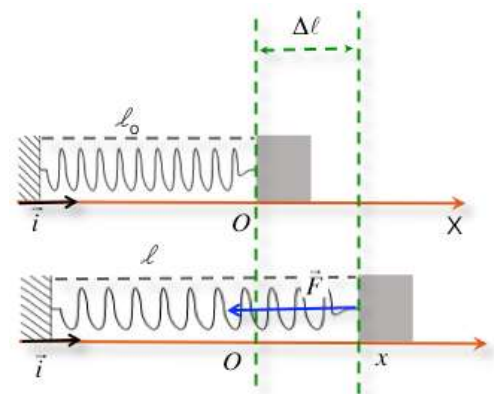
$$E_m = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(M/R) + E_{pp} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgz$$

$$\text{On a : } z = -OH = -l \cos \theta$$

$$E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mlg \cos \theta$$

D'après le théorème de l'énergie mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = 0$

$$\text{Donc : } m l^2 \ddot{\theta} + mlg \sin \theta = 0$$



Par conséquent : $I\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$ est l'équation différentielle du mouvement

V- Equilibre et stabilité d'un système conservatif

1- Positions d'équilibre

Dans un référentiel Galiléen, On considère un point matériel M soumis à des **forces conservatives** dont la résultante est $\vec{F}$. La position d'équilibre du point matériel correspond à un **extremum** de l'énergie potentielle. Donc, si $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est une position d'équilibre, les dérivées premières de l'énergie potentielle doivent être nulles en ce point :

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_0} = \left. \frac{dE_p}{dy} \right|_{y_0} = \left. \frac{dE_p}{dz} \right|_{z_0} = 0$$

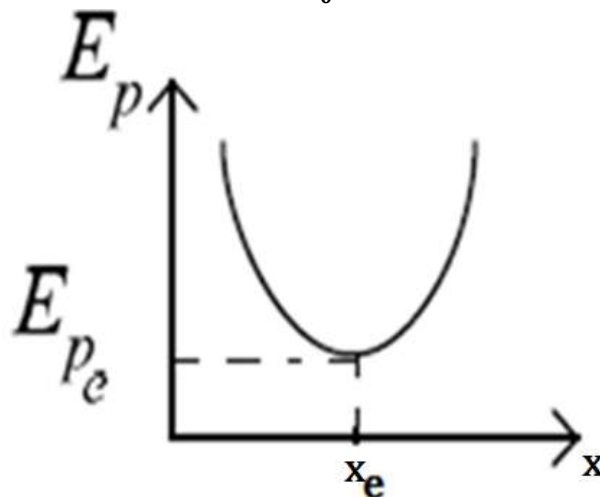
2- Stabilité de l'équilibre

La position d'équilibre est dite stable si, lorsque le point est légèrement écarté de sa position d'équilibre il tend à y revenir spontanément. Dans le cas contraire l'équilibre est instable.

2. 1- Equilibre stable : E_p minimale

Soit un point matériel M ayant la position d'équilibre M_0 . M_0 est une position d'équilibre stable si l'énergie potentielle est minimale en ce point. Dans le cas d'un mouvement à une dimension ($E_p(x)$), la dérivée seconde de l'énergie potentielle par rapport à la variable x est positive dans une position d'équilibre stable :

$$\left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_0} > 0$$



Equilibre stable

x_e : Point d'équilibre stable

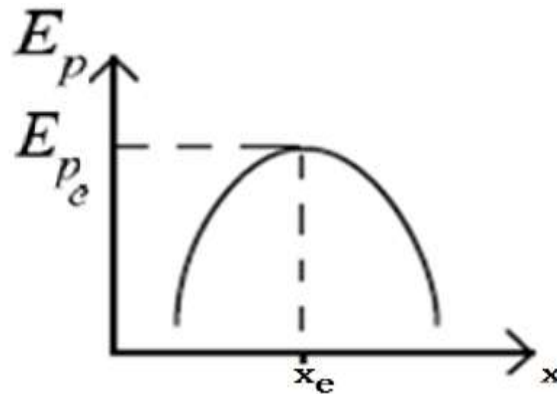
c.à.d. que le point M_0 est un minimum de la fonction $E_p(x)$. Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ quand le point matériel est éloigné de sa position d'équilibre est négatif :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -dE_p < 0$$

2. 2- Equilibre instable : E_p maximale

M_0 est une position d'équilibre instable si l'énergie potentielle est maximale en ce point. Dans le cas d'un mouvement à une dimension ($E_p(x)$), la dérivée seconde de l'énergie potentielle par rapport à la variable x est négative dans une position d'équilibre instable :

$$\left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_0} < 0.$$



Equilibre instable

x_e : Point d'équilibre stable

c.à.d. que le point M_0 est un maximum de la fonction $E_p(x)$. Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ quand le point matériel est éloigné de sa position d'équilibre est positif :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -dE_p > 0$$

2. 3- Equilibre indifférent

Dans ce cas $F = 0 \forall x \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = -F = 0 \Rightarrow E_p = cste$ quelle que soit la valeur de x .

3- Discussion qualitative d'un mouvement d'un point à un degré de liberté

La résolution des problèmes de mécanique à un degré de liberté, à partir de la conservation de l'énergie mécanique, est fondamentalement très enrichissante. Comme $E_m = E_c + E_p$, les seuls mouvements possibles sont ceux pour lesquels $E_c = E_m - E_p \geq 0$. On représente alors graphiquement E_p en fonction du seul degré de liberté, par exemple x , et les mouvements possibles sont ceux qui réalisent $E_m \geq E_p$.

1-5 Etude de la possibilité d'un mouvement

Soit : $E \rightarrow$ l'énergie mécanique d'un système isolé.

Soit : $T \rightarrow$ l'énergie cinétique.

E_c

Soit : $U \rightarrow$ l'énergie potentielle.

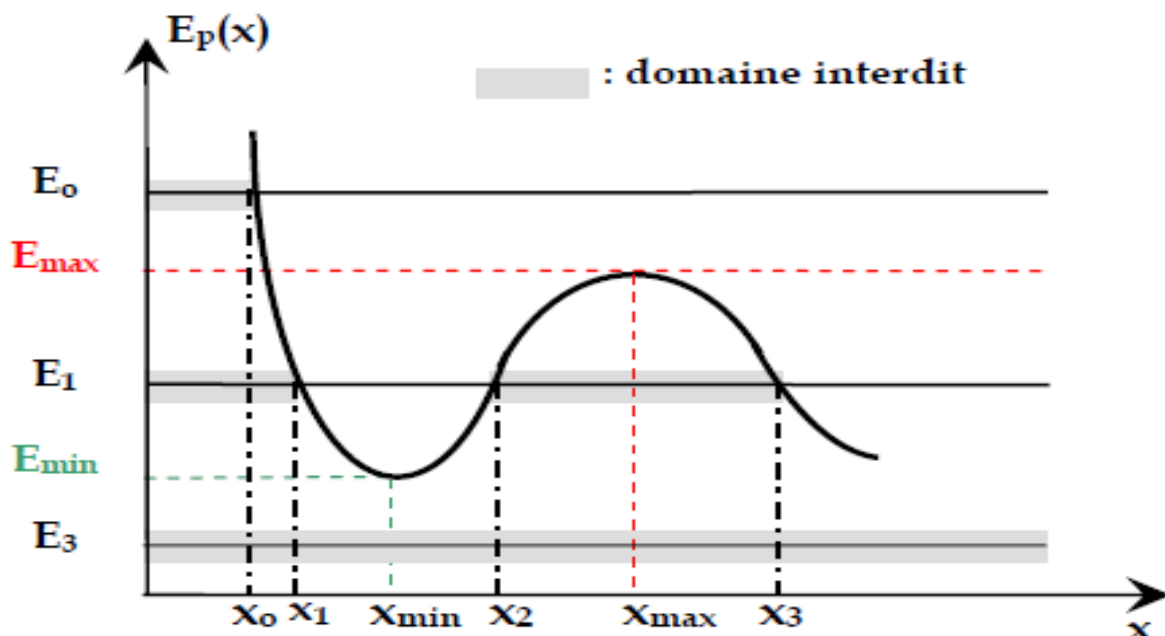
E_p

On a : $E = \underline{T} + \underline{U} \rightarrow T = E - U.$

Et : $\forall t$ (le temps) on a $T \geq 0$ durant le mouvement.

- Si : $E - U = 0 \rightarrow T = 0 \rightarrow$ l'arrêt du Mvt.
- Si : $E - U > 0 \rightarrow T > 0 \rightarrow$ le Mvt est possible.
- Si : $E - U < 0 \rightarrow T < 0 \rightarrow$ le Mvt est impossible.

Supposons qu'un point matériel de masse m soit assujéti à se déplacer sur l'axe Ox par exemple, d'un référentiel Galiléen, dans n champ de force conservatif, d'énergie potentielle $E_p(x)$ qui a l'allure donnée dans la figure ci-dessous :



Envisageons différents cas possible selon la valeur de l'énergie mécanique E_m .

1^{er} cas : $E_m = E_0$

Les seuls mouvements possibles sont ceux pour lesquels $x \geq x_0$

x_0 étant définis par $E_m = E_p(x_0) = E_0$

2^{eme} cas : $E_m = E_1$

Les seuls mouvements possibles sont ceux pour lesquels $x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, +\infty[$
 x_1, x_2, x_3 étant définis par $E_m = E_p(x_1) = E_p(x_2) = E_p(x_3) = E_1$

3^{eme} cas : $E_m = E_3$

On a toujours $E_m \leq E_p$, ce qui est impossible.

4^{eme} cas : $E_m = E_{\max}$, pour $x = x_{\max}$

Le point matériel est position d'équilibre. Cet équilibre est instable puisqu'il s'agit d'un maximum d'énergie potentielle.

5^{eme} cas : $E_m = E_{\min}$, pour $x = x_{\min}$

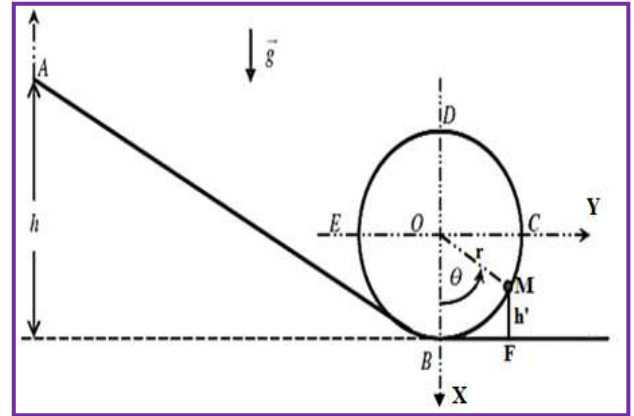
Le point matériel est position d'équilibre. Cet équilibre est stable puisqu'il s'agit d'un minimum d'énergie potentielle.

VI- Applications

Partie N°1 : Le looping

Le jouet d'un enfant est constitué d'un petit chariot de masse m qui se déplace sur une piste se terminant par une boucle circulaire verticale (looping) de rayon r . Le chariot assimilé à un point matériel M glisse sur la piste (ABCDEF) sans frottement. On repère M sur la boucle par l'angle θ que fait OM avec la verticale OB (Voir la figure).

L'objectif de cette partie est de calculer la valeur minimale de l'altitude h du point A pour que le chariot abandonné en A sans vitesse initiale ($V_A = 0$) puisse faire le tour complet de la boucle en restant en contact avec la piste tout le long du trajet.



I. Étude énergétique

- 1- En prenant l'origine de l'énergie potentielle au niveau du sol ($E_{PP}(B) = 0 = E_{PP}(F)$), donner l'expression de l'énergie potentielle $E_{PP}(A)$ en A et $E_{PP}(M)$ en M.
- 2- On notera V_M la vitesse du point M dans la position repérée par θ . Écrire l'énergie mécanique totale $E_m(A)$ en A et $E_m(M)$ en M.
- 3- Le système est-il conservatif ? En déduire une relation entre $E_m(A)$ et $E_m(M)$.
- 4- En déduire l'expression de $\frac{V_M^2}{r}$ en fonction de g , r , h et θ (*relation N°1*).

II. Cinématique (*les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$*)

L'étude du mouvement de M sur la boucle (BCDE) se fait naturellement en coordonnées polaires (r, θ) et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

- 1- Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ en coordonnées polaires et en déduire la relation entre V_M , r et $\dot{\theta}$. Exprimer $\frac{V_M^2}{r}$ en fonction de r et $\dot{\theta}$ (*relation N°2*).
- 2- Exprimer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M)$ en coordonnées polaires et en déduire, en utilisant la relation N°2 précédente, l'expression de la composante radiale (suivant $\vec{u}_r$) de l'accélération en fonction de V_M et r .

III. Dynamique (*les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$*)

- 1- On appellera $\vec{R}$ la réaction de la piste sur la masse M .
- 1- 1- Exprimer les forces agissant sur la masse M dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. Représenter ces forces lorsque le chariot est sur la boucle circulaire.
- 1- 2- Appliquer le principe fondamental de la dynamique en M sur la partie circulaire (BCDE) dans un repère galiléen. Projeter ce principe sur $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et exprimer alors le rapport $\frac{R}{m}$ (*relation 3*).

2- Utiliser les relations N°1 et 3 pour exprimer $\frac{R}{m}$ en fonction de h , g , r et θ .

3- Dire que la masse fait un tour complet en restant en contact avec la piste se traduit par :

Pour toute valeur de l'angle θ , la réaction R existe : $\forall \theta, R(\theta) \geq 0$

3- 1- Pour quelle valeur évidente de θ la réaction R est- elle minimale ?

3- 2- En déduire la valeur minimale que doit avoir l'altitude h du point A pour que le chariot réalise la looping sans quitter la piste.

3- 3- Etablir l'expression de V_D la vitesse du chariot au point D en fonction de g et r .

3- 4- Etablir l'expression de V_B la vitesse au point B , en fonction de g et r , lorsque le chariot effectuer un tour complet.

Partie N°2 : Oscillation libre

On considère que le chariot assimilé à un point matériel M et abandonné en A sans vitesse initiale ($V_A = 0$)

1- ETABLIR L'EXPRESSION DE LA vitesse au point B en fonction de g et r .

2- ETABLIR L'EXPRESSION DE LA HAUTEUR h , en fonction de r , pour que la valeur maximale de θ est $\theta_{\max} = \frac{\pi}{6}$

3- Par la suite, le chariot effectuera une oscillation libre autour de B .

Etablir l'équation horaire du mouvement $\theta(t)$ en appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à O dans le repère fixe $R(XOY)$. On prend $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{k}$

Partie N°3 : Oscillation amortie

On considère maintenant que le chariot assimilé à un point matériel M glisse sur la piste **(ABCDE)** avec frottement et sans vitesse initiale ($V_A = 0$). Les frottements sont assimilables à une force constante de norme f .

Etablir l'expression de la hauteur h pour que le chariot atteigne juste le point C en fonction de m , g , f , AB et r

CORRECTION DE L'EXAMEN DE MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Partie N°1 : Le looping

I. Étude énergétique

1- $E_{PP}(A) = mgh$ et $E_{PP}(M) = mgh' = mgr(1 - \cos\theta)$

2- $E_m(A) = E_{PP}(A) + E_C(A) = mgh$

et $E_m(M) = E_{PP}(M) + E_C(M) = \frac{1}{2}mV_M^2 + mgr(1 - \cos\theta)$

3- Le système est conservatif (Pas de frottement) donc : $E_m(A) = E_m(M)$.

4- on a : $E_m(M) = E_m(A)$ donc $\frac{1}{2}mV_M^2 + mgr(1 - \cos\theta) = mgh$

Par conséquent $\frac{V_M^2}{r} = 2g \left[\frac{h}{r} - (1 - \cos\theta) \right]$ (relation n°1)

II- Cinématique

1- $\overrightarrow{V(M)} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ On a donc $V_M = R\dot{\theta} \Rightarrow V_M^2 = (r\dot{\theta})^2 \Rightarrow \frac{V_M^2}{r} = r\dot{\theta}^2$ (relation n°2)

2- Le vecteur accélération :

$$\overrightarrow{\gamma(M)} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

soit $\gamma_r = -r\dot{\theta}^2 = -\frac{V_M^2}{r}$ la composante radiale de l'accélération

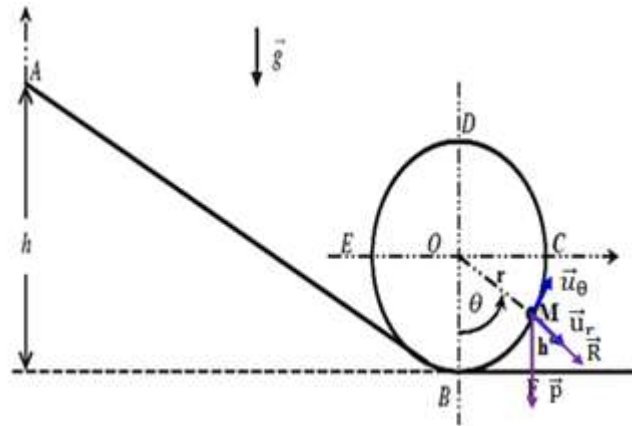
III- Dynamique

1- 1- Système : le chariot M, Référentiel terrestre considéré galiléen,

Les Forces sont :

$$\text{Poid } \vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)$$

La réaction $\vec{R} = R\vec{u}_r$ (réaction normale à la piste car le mouvement s'effectue sans frottement).



1- 2- Le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\overrightarrow{\gamma(M)}$$

La projection suivant : $\vec{u}_r$: $R - mg \cos \theta = mr\dot{\theta}^2 = m\frac{V_M^2}{r}$
 $mg \sin \theta + r\ddot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow \frac{R}{m} = g \cos \theta + \frac{V_M^2}{r} \quad (\text{relation N°3}).$$

2- En utilisant les relations N°1 et 3 pour exprimer $\frac{R}{m}$ en fonction de h, g, r et θ .

$$\frac{R}{m} = g \cos \theta + \frac{V_M^2}{r} = g \cos \theta + 2g \left[\frac{h}{r} - (1 - \cos \theta) \right] = 2g \left[\frac{h}{r} - 1 + \frac{3}{2} \cos \theta \right]$$

3- Dire que la masse fait un tour complet en restant en contact avec la piste se traduit par :

Pour toute valeur de l'angle θ , la réaction R existe : $\forall \theta, R(\theta) \geq 0$

3- 1- La réaction R est minimale pour $\theta = \pi$.

3- 2- La condition pour que le chariot réalise la looping sans quitter la piste est $R_{min} \geq 0$.

Donc la valeur minimale que doit avoir l'altitude h du point A.

$$R_{min} = 0 \Rightarrow \frac{h}{r} = 1 - \frac{3}{2} \cos \pi = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Donc : $h = \frac{5}{2} r$

3- 3- L'expression de V_D la vitesse du chariot au point D.

On a démontré que : $\frac{V_M^2}{r} = 2g \left[\frac{h}{r} - (1 - \cos\theta) \right]$

Donc $V_D^2 = 2g r \left[\frac{5}{2} - (1 - \cos\pi) \right]$

Soit $V_D = \sqrt{gr}$

4- 4- L'expression de V_B la vitesse au point D lorsque le chariot effectuer un tour complet.

On applique le théorème d'énergie cinétique entre D et B : $\frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_D^2 = 2mgr$

$$V_B^2 = V_D^2 + 4gr$$

Alors : $V_B = \sqrt{gr + 4gr} = \sqrt{5gr}$

Partie N°2 : Oscillation libre

On considère maintenant que M effectue une oscillation libre.

1- Calcul de la vitesse au point B.

On a : $E_m(A) = E_m(B)$ donc $mgh = \frac{1}{2} m V_B^2$

Donc $V_B = \sqrt{2gh}$

2- Calcul de la valeur de h pour que la valeur maximale de θ est $\theta_{max} = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{h}{r} - (1 - \cos\theta_{max}) = 0 \Leftrightarrow \frac{h}{r} - \left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\frac{h}{r} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow h = 0.134 r$$

3- L'équation horaire du mouvement $\theta(t)$ en appliquant le théorème du moment cinétique.

Le théorème du moment cinétique s'écrit : $\left. \frac{d\vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P} + \vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R}$

Avec l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$$

La vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ de M dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Avec : $\vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) = r \vec{u}_r \wedge mr\dot{\theta} \vec{u}_\theta$

$$\Rightarrow \left. \frac{d\vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = mr^2 \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = r \vec{e}_r \wedge (mg \cos\theta \vec{u}_r - mg \sin\theta \vec{u}_\theta) = -mgr \sin\theta \vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

Ce qui implique que : $mr^2 \ddot{\theta} \vec{k} = -mgr \sin\theta \vec{k} \Rightarrow mr^2 \ddot{\theta} = -mgr \sin\theta$

On obtient finalement pour des faibles amplitudes : $\ddot{\theta} + \frac{g}{r} \theta = 0$

La résolution de l'équation différentielle.

$$\theta = \theta_{max} \cos \omega_0 t \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r}} : \text{la pulsation propre du mouvement}$$

Partie N°3 : Oscillation amortie

L'expression de la hauteur **h** pour que le chariot atteigne le point **C**.

On applique le théorème d'énergie cinétique entre A et C :

$$\text{On écrit : } \frac{1}{2} m V_C^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{f}) = 0$$

$$W(\vec{P}) = mg(h - r) \quad \text{et} \quad W(\vec{f}) = -f \left(AB + r \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Donc : } mg(h - r) - f \left(AB + r \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$\text{Par conséquent : } h = \frac{f}{mg} \left(AB + r \frac{\pi}{2} \right) + r$$