Université Cadi Ayyad
Faculté Poly-Disciplinaire
Département de Physique
SAFI

Année Universitaire 2016/2017
Filière : SMPC-SMIA

TD N°2 : Mécanique du Point

Exercice 1 :

On considère un cylindre d'axe vertical, circulaire de rayon R et de hauteur h=$2\pi R$, auquel est lié le repère cartésien orthonormé direct (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) supposé galiléen (voir figure1).

La surface latérale du cylindre porte un tube mince de forme hélicoïdale, d'extrémités H et B, dans lequel se déplace un point matériel M. Les équations paramétriques de la trajectoire du point M sont données par :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = R(2\pi - \theta) \\ avec\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

En particulier, le point H correspond à $\theta = 0$ et le point B à $\theta = 2\pi$.

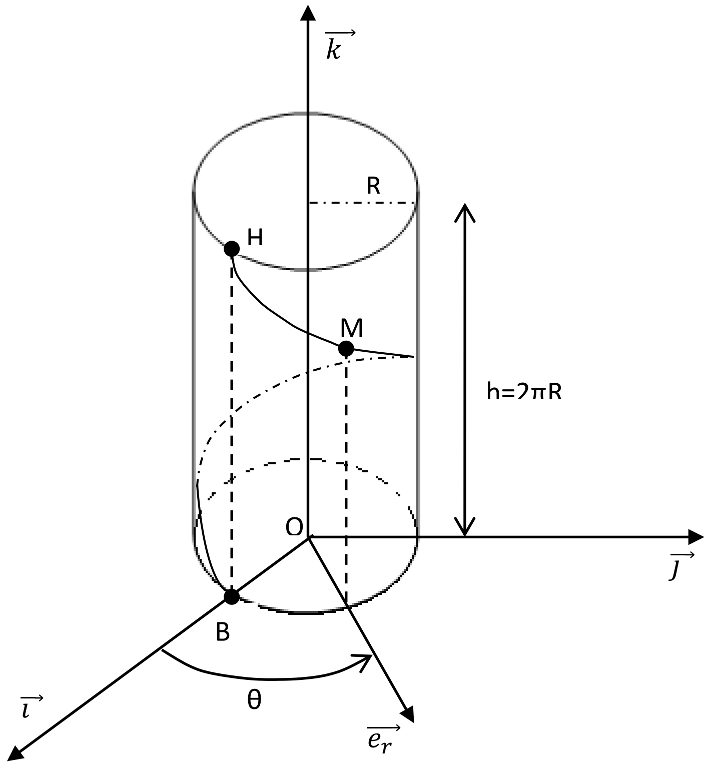


Figure 1

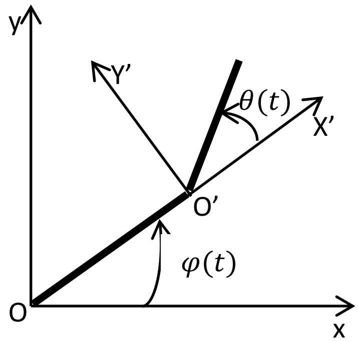
1. Ecrire le vecteur position du point M dans la base cylindrique habituelle ($\vec{e}_r$,$\vec{e}_\theta$, $\vec{k}$).
2. Ecrire de même le vecteur vitesse du point M. Quelle est sa norme ?
3. Déterminer une relation entre l'abscisse curviligne s(t) du point M et l'angle $\theta(t)$, sachant que s=0 lorsque $\theta = 0$.
4. Montrer que le vecteur unitaire tangent au point M est : $\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} - \vec{k})$
5. Ecrire le vecteur accélération du point M dans la base cylindrique, et calculer sa norme.
6. En déduire, en fonction de R, de θ et de ses dérivées, l'accélération tangentielle, l'accélération normale du point M ainsi que le rayon de courbure ρ de la trajectoire en M.
7. Exprimer les trois vecteurs ($\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$) de la base de Frenet à l'aide des vecteurs ($\vec{e}_r$,$\vec{e}_\theta$, $\vec{k}$).

Exercice 2 :

Un système est constitué de deux tiges OO' et O'M , de longueurs respectivement L et D , reliées entre elles par une articulation **parfaite** en O'.

Soit R(O,X,Y,Z) un repère orthonormé direct de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ lié au point O. Le point O' décrit par rapport à O, une trajectoire circulaire de rayon L, dans le plan XOY, avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$. Dans le même plan, le point M est en rotation autour de O', avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

Soit R'(O',X',Y',Z') un repère orthonormé direct de base $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ lié au point mobile O'. L'axe O'X' est confondu avec la direction OO' (voir figure 2).
Les angles $\theta(t) et\ \varphi(t)$ évoluent de manière quelconque.



$figure\ 2$

1. Exprimer les vecteurs unitaires $\vec{\imath'},\vec{\jmath'}\ et\ \ \vec{k'}$ du repère R' dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$,

   en déduire $\frac{d\vec{\imath'}}{dt}$,$\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}$ et $\frac{d\vec{k'}}{dt}$ $en\ fonction\ de\ \dot{\varphi}, \vec{\imath'}\ , \vec{\jmath'}\ et\ \vec{k'}$.
2. Exprimer les vecteurs vitesses rotations $\vec{\Omega}(R'/R) et\ \vec{\omega}$ dans la base $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$.
3. Donner, dans la base relative $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$, les vecteurs positions $\overrightarrow{O'M}\ et\ \overrightarrow{OM}$.
4. Calculer directement le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point M dans le référentiel R(O,X,Y,Z), on les exprimera dans la base $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$.
5. Déterminer, dans la base $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$, les expressions des vecteurs :
   a) Vitesse relative et accélération relative de M.
   b) Vitesse, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis.