Université Cady Ayyad, Marrakech
Faculté polydisciplinaire - Safi
Session Normale d'Automne (S1)

Année universitaire 2017 - 2018
Filières : SMIA
Durée : 2 h

Examen de Mécanique du Point Matériel

Glissement d'un anneau sans frottement sur une tige (T)

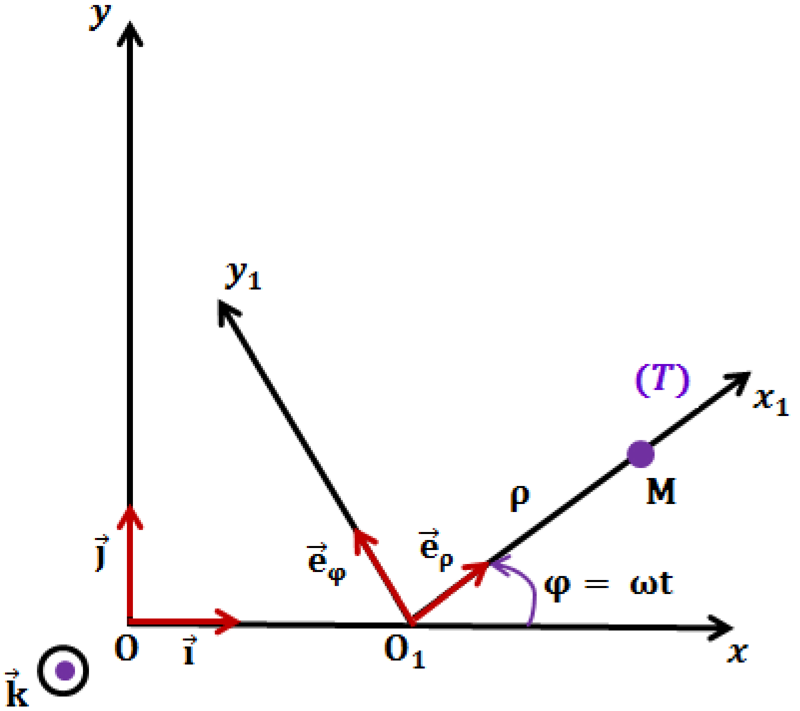
Soit Oxy un plan vertical d'un référentiel fixe supposé Galiléen R(O, x, y, z) de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormée et directe. Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur une tige (T) qui constamment (toujours) en contact par son extrémité O_1 avec l'axe ox. Le point O_1 se déplace sur l'axe ox.

Soit $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1 = z)$ de base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k})$ orthonormée et directe, un référentiel relatif lié à la tige (T) tel que l'axe O_1x_1 confondu avec (T).

La tige (T) effectue également un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe O_1z_1.

M est lancée depuis le point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e_\rho} = v_0\vec{\imath}$ $(v_0 > 0)$, elle soumit en plus des forces habituelles, à une force $\vec{\boldsymbol{F}} = \ddot{x}\, m \cos\varphi\ \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$ avec $\ddot{x} = a$. (Voir figure ci-dessous).

Les paramètres du système seront : $\|\overrightarrow{OO_1}\| = x(t)$, $\|\overrightarrow{O_1M}\| = \rho(t)$ et $\varphi(t) = (\vec{\imath}, \vec{e_\rho})$



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

Partie I : Etude dans le référentiel $\mathfrak{R}$ (Galiléen)

1- Donner le vecteur vitesse de rotation de $\mathfrak{R}_1$ par rapport à R : $\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R})$.

2- Calculer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, la vitesse $\vec{V}\ (M/\mathfrak{R})$ et l'accélération $\vec{\gamma}\ (M/\mathfrak{R})$ de M.

3- Justifier que la composante R_ρ selon $\vec{e}_\rho$ de la réaction $\vec{R}$ est nulle.

4- Exprimer les forces appliquées à M dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}$) par rapport au référentiel galiléen.

5- Ecrire le principe fondamentale de la dynamique (PFD).

6- Par projection du PFD suivant $\vec{e}_\rho$; déduire l'équation différentielle du mouvement.

II- Application du théorème du moment cinétique

1- Déterminer $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}\,(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{\Re})$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\boldsymbol{\Re}$.

2- Déterminer les moments de chacune des forces agissant sur le point M.

3- En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver les expressions de la composante de $\vec{\boldsymbol{R}}$.

III- Application du théorème de l'énergie cinétique

1- Déterminer $\boldsymbol{E_C}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{\Re})$ l'énergie cinétique du point $\boldsymbol{M}$ dans $\boldsymbol{\Re}$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\boldsymbol{\Re}$.

2- Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point $\boldsymbol{M}$.

3- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'équation différentielle du mouvement.

Partie II : Etude dans le référentiel $\boldsymbol{\Re_1}$ (non Galiléen)

1- Le référentiel $\Re_1$ est-il Galiléen ? Justifier clairement votre réponse.

2- Calculer la vitesse relative $\vec{V}(M/\Re_1)$ et la vitesse d'entrainement $\vec{V_e}(M)$.

3- Calculer l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis du point M.

4- Les lois de composition des vitesses et des accélérations sont–elles vérifiées?

5- Donner l'expression des forces appliquées à M dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}$).

6- Ecrire le principe fondamentale de la dynamique (PFD) dans $\Re_1$.

7- Retrouver l'équation différentielle du mouvement. Déduire l'équation horaire du mouvement.

8- Retrouver les expressions des composantes de la réaction.

9- Quelle sera la vitesse minimale de M sur la tige pour que le contact entre M et (T) puisse continuer à exister dans le temps?

Correction de l'examen de Mécanique du Point Matériel

Partie I : Etude dans le référentiel $\Re$ (Galiléen)

I- Application du principe fondamentale de la dynamique

1- Le vecteur vitesse de rotation de R_1 par rapport à R est : $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \dot{\varphi}\vec{k} = \omega\vec{k}$.

2- Calculons le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, la vitesse $\vec{V}\,(M/\Re)$ et l'accélération $\vec{\gamma}\,(M/\Re)$ de M dans $\Re$.

- Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + \rho\,\vec{e_\rho} = (x\cos\varphi + \rho)\,\vec{e_\rho} - x\sin\varphi\,\vec{e_\varphi}$

- Vecteur vitesse : $\vec{V}\,(M/R) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{\rho}\,\vec{e_\rho} + \rho\omega\,\vec{e_\varphi}$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}\,(M/R) = (\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho})\,\vec{e_\rho} + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)\,\vec{e_\varphi}$$

- Vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_{\Re} = \frac{d\left(\dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{\rho}\,\vec{e_\rho} + \rho\omega\,\vec{e_\varphi}\right)}{dt}$$

$$= \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi + \rho\omega\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

$$\vec{\gamma}\,(M/R) = (\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{\rho} - \rho\omega^2)\,\vec{e_\rho} + (2\dot{\rho}\omega - \ddot{x}\sin\varphi)\,\vec{e_\varphi}$$

$$\text{Avec : } \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \omega\vec{e}_\varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\omega\vec{e}_\rho$$

3- R_1 est nulle car M se déplace sans frottement sur la tige (T)

4- On exprime les forces appliquées à M dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}$) par rapport au référentiel galiléen

- le poids : $\vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{g}} = -\boldsymbol{m}\boldsymbol{g}\vec{\boldsymbol{\jmath}} = -mg(\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi})$,

- la réaction de la tige qui est normale à celle-ci, puisque les frottements sont négligeables **(la composante de $\vec{R}$ suivant $\vec{e}_\rho$ est nul : $R_\rho = 0$)** : $\vec{\boldsymbol{R}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}\vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}$

- La force : $\vec{\boldsymbol{F}} = \ddot{x}\,m\cos\varphi\;\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$

5- Ecrivons le principe fondamentale de la dynamique (PFD) par rapport au référentiel Galiléen :

$$\sum \overrightarrow{\boldsymbol{F}_{ext}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{M}/\mathbf{R})$$

$$-mg\left(\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}\right) + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}\vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}} + \ddot{x}\,m\cos\varphi\,\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}} =$$

$$= m(\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{\rho} - \rho\omega^2)\,\vec{e_\rho} + m(2\dot{\rho}\omega - \ddot{x}\sin\varphi)\,\vec{e_\varphi}$$

$$-\mathrm{m}(\mathrm{g}\sin\varphi - \ddot{x}\cos\varphi)\,\overrightarrow{e_\rho} + (\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{mg}\cos\varphi)\vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}$$
$$= \mathrm{m}(\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{\rho} - \rho\omega^2)\ \overrightarrow{e_\rho} + m(2\dot{\rho}\omega - \ddot{x}\sin\varphi)\ \overrightarrow{e_\varphi}$$

6- on déduit léquation différentielle du mouvement.

Pour trouver cette équation, il faut faire une projection sur un vecteur de telle sorte éliminer les composantes de la réaction.

$$\Rightarrow\quad -\mathrm{m}(\mathrm{g}\sin\varphi - \ddot{x}\cos\varphi) = \mathrm{m}(\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{\rho} - \rho\omega^2) \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\ddot{\rho}} - \boldsymbol{\omega^2\rho} = -\mathbf{g}\sin\varphi$$

<u>II- Application du théorème du moment cinétique</u>

1- Déterminons $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}\,(\boldsymbol{M/\mathfrak{R}})$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathfrak{R}$.

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}\,(\boldsymbol{M/\mathfrak{R}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{M/\mathfrak{R}})$$
$$= \left[(x\cos\varphi + \rho)\overrightarrow{e_\rho} - x\sin\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi}\right]$$
$$\wedge\,\boldsymbol{m}\left[(\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho})\,\overrightarrow{e_\rho} + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}\right]$$
$$= \boldsymbol{m}[(x\cos\varphi + \rho)(\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi) + x\sin\varphi\,(\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho})]\vec{\mathbf{k}}$$

$$\frac{\boldsymbol{d\vec{\sigma}_O}\,(\boldsymbol{M/\mathfrak{R}})}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{m}(\dot{x}\cos\varphi - x\omega\sin\varphi + \dot{\rho})(\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)$$
$$+\,\boldsymbol{m}(x\cos\varphi + \rho)(\dot{\rho}\omega - \ddot{x}\sin\varphi - \dot{x}\omega\cos\varphi)$$
$$+\,\boldsymbol{m}(\dot{x}\sin\varphi + x\omega cos\varphi)(\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho})$$
$$+\,m\,x\sin\varphi\,(\ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\omega\sin\varphi + \ddot{\rho})]\vec{\mathbf{k}}$$
$$= \boldsymbol{m}\rho\omega\dot{x}\cos\varphi - \boldsymbol{m}\rho x\omega^2\sin\varphi + \boldsymbol{m}\,\rho\omega\dot{\rho} - m\dot{x}^2\sin\varphi\cos\varphi + \boldsymbol{mx}\dot{x}\omega\sin^2\varphi$$
$$- m\dot{x}\dot{\rho}\sin\varphi + m\dot{\rho}\omega x\cos\varphi - mx\ddot{x}\cos\varphi\sin\varphi - m\,x\dot{x}\omega\cos^2\varphi + \boldsymbol{m}\rho\dot{\rho}\omega$$
$$- m\ddot{x}\rho\sin\varphi - m\rho\dot{x}\omega\cos\varphi + \boldsymbol{m}\dot{x}^2\sin\varphi\cos\varphi + m\,\dot{\rho}\dot{x}\sin\varphi + mx\dot{x}\omega\cos^2\varphi$$
$$+ m\,x\dot{\rho}\omega cos\varphi + m\,x\,\ddot{x}\sin\varphi\cos\varphi - mx\dot{x}\omega\sin^2\varphi + mx\sin\varphi\,\ddot{\rho}]\vec{\mathbf{k}}$$
$$= \cancel{\boldsymbol{m}\rho\omega\dot{x}\cos\varphi} - \boldsymbol{m}\rho x\omega^2\sin\varphi + m\rho\omega\dot{\rho}\cancel{- m\dot{x}^2\sin\varphi\cos\varphi + \boldsymbol{mx}\dot{x}\omega\sin^2\varphi}$$
$$\cancel{- m\dot{x}\dot{\rho}\sin\varphi} + m\dot{\rho}\omega x\cos\varphi\cancel{- mx\ddot{x}\cos\varphi\sin\varphi - m\,x\dot{x}\omega\cos^2\varphi} + \boldsymbol{m}\rho\dot{\rho}\omega$$
$$- m\ddot{x}\rho\sin\varphi\cancel{- m\,\rho\dot{x}\omega\cos\varphi + \boldsymbol{m}\dot{x}^2\sin\varphi\cos\varphi + m\,\dot{\rho}\dot{x}\sin\varphi + mx\dot{x}\omega\cos^2\varphi}$$
$$+ m\,x\dot{\rho}\omega cos\varphi\cancel{+ mx\,\ddot{x}\sin\varphi\cos\varphi - mx\dot{x}\omega\sin^2\varphi} + mx\sin\varphi\,\ddot{\rho}]\vec{\mathbf{k}}$$
$$= (-\boldsymbol{m}\rho x\omega^2\sin\varphi + \boldsymbol{2m}\,\rho\omega\dot{\rho} + 2m\dot{\rho}\omega x\cos\varphi - m\ddot{x}\rho\sin\varphi + mx\sin\varphi\,\ddot{\rho})\vec{\mathbf{k}}$$

2- On détermine les moments de chacune des forces agissant sur le point M.

$$\boldsymbol{\mathcal{M}_O}(\vec{\boldsymbol{F}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}} = [(x\cos\varphi + \rho)\,\overrightarrow{e_\rho} - x\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}] \wedge \ddot{x}\,m\cos\varphi\ \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$$
$$= x\ddot{x}\,m\cos\varphi\,\sin\varphi\,\vec{\mathbf{k}}$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \left[(x\cos\varphi + \rho)\overrightarrow{e_\rho} - x\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}\right] \wedge \left[-\mathrm{mg}\left(\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}\right)\right]$$

$$= [-\boldsymbol{mg}(x\cos\varphi + \rho)\cos\varphi - \mathrm{mg}\,x\,\sin^2\varphi]\,\vec{\mathbf{k}}$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \left[(x\cos\varphi + \rho)\overrightarrow{e_\rho} - x\sin\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}\right] \wedge \left(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}\vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}\right)$$

$$= -(x\cos\varphi + \rho)\,\mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\varphi}} + (x\cos\varphi + \rho)\,\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}\vec{\mathbf{k}} - x\sin\varphi\,\mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\overrightarrow{e_\rho}$$

$$= -x\sin\varphi\,\mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\overrightarrow{e_\rho} - (x\cos\varphi + \rho)\,\mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\varphi}} + (x\cos\varphi + \rho)\,\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}\vec{\mathbf{k}}$$

3- Les expressions des composantes de $\vec{\boldsymbol{R}}$.

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{M}/\mathfrak{R})}{\boldsymbol{dt}} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) + \mathcal{M}_O(\vec{P}) + \mathcal{M}_O(\vec{R})$$

$$(-\boldsymbol{m}\rho x\omega^2\sin\varphi + \mathbf{2}\boldsymbol{m}\,\rho\omega\dot{\rho} + 2m\dot{\rho}\omega x\cos\varphi - m\ddot{x}\rho\sin\varphi + mx\,\sin\varphi\,\ddot{\rho})\vec{\mathbf{k}}$$

$$= x\ddot{x}\,m\cos\varphi\,\sin\varphi\,\vec{\mathbf{k}} + (-\boldsymbol{mg}(x\cos\varphi + \rho)\cos\varphi - \mathrm{mg}\,x\,\sin^2\varphi)\vec{\mathbf{k}}$$

$$- x\sin\varphi\,\mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\overrightarrow{e_\rho} - (x\cos\varphi + \rho)\,\mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\varphi}} + (x\cos\varphi + \rho)\,\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}\vec{\mathbf{k}}$$

Par identification, on trouve :

$$mx\,\sin\varphi\,\ddot{\rho} - \boldsymbol{m}\rho x\omega^2\sin\varphi + \mathbf{2}\,m\rho\omega\dot{\rho} + 2m\dot{\rho}\omega x\cos\varphi - m\ddot{x}\rho\sin\varphi$$
$$= \boldsymbol{m}x\ddot{x}\,\cos\varphi\,\sin\varphi - \boldsymbol{mg}(x\cos\varphi + \rho)\cos\varphi - \mathrm{mg}\,x\,\sin^2\varphi + (x\cos\varphi$$
$$+ \rho)\,\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$-\mathbf{mgx}\sin\varphi^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{m}\,\rho\omega\dot{\rho} + 2m\dot{\rho}\omega x\cos\varphi - m\ddot{x}\rho\sin\varphi$$
$$= \boldsymbol{m}x\ddot{x}\,m\cos\varphi\,\sin\varphi - \boldsymbol{mg}(x\cos\varphi + \rho)\cos\varphi - \mathrm{mg}\,x\,\sin^2\varphi + (x\cos\varphi$$
$$+ \rho)\,\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\mathbf{2}\boldsymbol{m}\,\rho\omega\dot{\rho} + 2m\dot{\rho}\omega x\cos\varphi - m\ddot{x}\rho\sin\varphi - \boldsymbol{m}x\ddot{x}\,m\cos\varphi\,\sin\varphi + \boldsymbol{mg}(x\cos\varphi + \rho)\cos\varphi$$
$$= (x\cos\varphi + \rho)\,\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}} = m(2\dot{\rho}\omega - \ddot{x}\sin\varphi) + mgcos\varphi \qquad \text{et} \qquad \mathbf{R}_{\boldsymbol{z}} = \mathbf{0}$$

III- Application du théorème de l'énergie cinétique

1- On détermine $\boldsymbol{E_C}(\boldsymbol{M}/\mathfrak{R})$ l'énergie cinétique du point $\boldsymbol{M}$ dans $\mathfrak{R}$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathfrak{R}$.

- L'énergie cinétique s'exprime comme suit :

$$\boldsymbol{E_C}(\boldsymbol{M}/\mathfrak{R}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{mV}(\boldsymbol{M}/\mathfrak{R}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{m}[(\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho})^2 + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)^2]$$

- La dérivée de l'énergie cinétique s'exprime alors :

$$\frac{\boldsymbol{dE_C}(\boldsymbol{M}/\mathfrak{R})}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{m}[\ddot{\boldsymbol{x}}\cos\varphi - \dot{x}\omega\cos\varphi + \ddot{\rho})(\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho})$$
$$+ (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)(\dot{\rho}\omega - \ddot{\boldsymbol{x}}\sin\varphi - \dot{x}\omega\cos\varphi)]$$

2- Déterminons les puissances de chacune des forces agissant sur le point $\boldsymbol{M}$.

- $\boldsymbol{P}(\vec{\boldsymbol{F}}/\mathfrak{R}) = \vec{\boldsymbol{F}}.\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{M}/\mathfrak{R}) = \ddot{x}\, m \cos\varphi\ \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}}.[(\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho})\,\overrightarrow{e_\rho} + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}] = \ddot{x}\, m\cos\varphi\,(\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho})$
- $\boldsymbol{P}(\vec{\boldsymbol{F}}/\mathfrak{R}) = \vec{\boldsymbol{P}}.\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{M}/\mathfrak{R}) = [-\mathrm{mg}(\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathrm{e}_\rho} + \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathrm{e}_\varphi})].[(\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho})\,\overrightarrow{e_\rho} + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}] = -\mathrm{mg}\sin\varphi(\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho}) - \mathrm{mg}\cos\varphi\,(\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)$
- $\boldsymbol{P}(\vec{\boldsymbol{R}}/\mathfrak{R}) = \vec{\boldsymbol{R}}.\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{M}/\mathfrak{R}) = (\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}\vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}).[(\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho})\,\overrightarrow{e_\rho} + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}] = (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}$

3- Par applications du théorème de l'énergie cinétique.

$$\frac{\boldsymbol{dE_C(M/\mathfrak{R})}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{P}(\vec{\boldsymbol{F}}/\mathfrak{R}) + \boldsymbol{P}(\vec{\boldsymbol{P}}/\mathfrak{R}) + \boldsymbol{P}(\vec{\boldsymbol{R}}/\mathfrak{R})$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{m}[\ddot{\boldsymbol{x}}\cos\varphi - \dot{x}\omega\cos\varphi + \ddot{\rho})(\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho}) + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)(\dot{\rho}\omega - \ddot{\boldsymbol{x}}\sin\varphi - \dot{x}\omega\cos\varphi)]\\
&\quad = \ddot{x}\, m\cos\varphi\,(\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho}) - \mathrm{mg}\sin\varphi(\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho})\\
&\quad - \mathrm{mg}\cos\varphi\,(\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi) + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{m}[\cancel{\ddot{\boldsymbol{x}}\dot{\rho}\cos\varphi} - \dot{x}\dot{\rho}\omega\cos\varphi + \dot{\rho}\ddot{\rho} + \cancel{\dot{x}\ddot{\boldsymbol{x}}\cos^2\varphi} - \dot{x}^2\omega\cos^2\varphi + \dot{x}\ddot{\rho}\cos\varphi + \dot{\rho}\rho\omega^2 - \ddot{\boldsymbol{x}}\rho\omega\sin\varphi\\
&\quad - \dot{x}\rho\omega^2\cos\varphi - \dot{x}\,\dot{\rho}\omega\sin\varphi + \dot{x}\ddot{\boldsymbol{x}}\sin^2\varphi + \dot{x}^2\omega\sin\varphi\cos\varphi]\\
&\quad = \cancel{m\,\dot{x}\ddot{x}\cos^2\varphi} + \cancel{\dot{\rho}\ddot{x}\, m\cos\varphi - \mathrm{mg}\dot{x}\sin\varphi\cos\varphi} - \mathrm{mg}\sin\varphi\,\dot{\rho} - \mathrm{mg}\rho\omega\cos\varphi\\
&\quad \cancel{+\dot{x}\mathrm{mg}\cos\varphi\sin\varphi} + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&m\dot{x}\ddot{\rho}\cos\varphi - m\dot{x}\rho\omega^2\cos\varphi - m\dot{x}\dot{\rho}\omega\cos\varphi + m\dot{\rho}\ddot{\rho} - m\dot{x}^2\omega\cos^2\varphi + m\,\dot{\rho}\rho\omega^2\\
&\quad - m\ddot{\boldsymbol{x}}\rho\omega\sin\varphi - m\dot{x}\,\dot{\rho}\omega\sin\varphi + m\dot{x}\ddot{\boldsymbol{x}}\sin^2\varphi + m\dot{x}^2\omega\sin\varphi\cos\varphi]\\
&\quad = -\mathrm{mg}\sin\varphi\,\dot{\rho} - \mathrm{mg}\rho\omega\cos\varphi + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}
\end{aligned}$$

On a : $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}} = m(2\dot{\rho}\omega + g\cos\varphi - \ddot{x}\sin\varphi)$

$$\begin{aligned}
&m\dot{x}\ddot{\rho}\cos\varphi - m\dot{x}\rho\omega^2\cos\varphi - m\dot{x}\dot{\rho}\omega\cos\varphi + m\dot{\rho}\ddot{\rho} - m\dot{x}^2\omega\cos^2\varphi + m\,\dot{\rho}\rho\omega^2\\
&\quad - m\ddot{\boldsymbol{x}}\rho\omega\sin\varphi - m\dot{x}\,\dot{\rho}\omega\sin\varphi + m\dot{x}\ddot{\boldsymbol{x}}\sin^2\varphi + m\dot{x}^2\omega\sin\varphi\cos\varphi\\
&\quad = -\mathrm{mg}\sin\varphi\,\dot{\rho} - \mathrm{mg}\rho\omega\cos\varphi + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)\mathrm{R}_\varphi
\end{aligned}$$

On a: $\mathrm{R}_\varphi = m(2\dot{\rho}\omega + g\cos\varphi - \ddot{x}\sin\varphi)$

$$\begin{aligned}
&m\dot{x}\ddot{\rho}\cos\varphi - m\dot{x}\rho\omega^2\cos\varphi\\
&\quad = m\dot{\rho}\omega\,(-\rho\omega + \dot{x}\,\sin\varphi) + m\dot{x}\dot{\rho}\omega\cos\varphi - m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\dot{x}^2\omega\cos^2\varphi\\
&\quad - m\ddot{\boldsymbol{x}}\sin\varphi\,(-\rho\omega + \dot{x}\,\sin\varphi) - m\dot{x}^2\omega\sin\varphi\cos\varphi - \mathrm{mg}\sin\varphi\,\dot{\rho} - \mathrm{mg}\rho\omega\cos\varphi\\
&\quad + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)\mathrm{R}_\varphi
\end{aligned}$$

$m\dot{x}\ddot{\rho}\cos\varphi \;-m\dot{x}\rho\omega^2\cos\varphi$

$$= (-\rho\omega + \dot{x}\;\sin\varphi)(-m\dot{\rho}\omega - mgcos\varphi) + m\dot{x}\dot{\rho}\omega\cos\varphi - m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\dot{x}^2\omega\cos^2\varphi$$
$$- m\dot{x}^2\omega\sin\varphi\cos\varphi - \mathrm{mgsin}\varphi\;\dot{\rho} - \mathrm{mg}\rho\omega\mathrm{cos}\varphi$$

On retrouve donc : $\Rightarrow\;\; \boldsymbol{\ddot{\rho}} - \boldsymbol{\omega^2\rho} = -\mathbf{g}\sin\varphi$

Partie II : Etude dans le référentiel $\mathfrak{R}_1$ (non Galiléen)

1- Le référentiel $\mathfrak{R}_1$ n'est pas Galiléen car il n'est pas en translation rectiligne et uniforme par rapport à R.

2- On calcul la vitesse relative $\vec{V}(M/\mathfrak{R}_1)$ et la vitesse d'entrainement $\vec{V_e}(M)$

- la vitesse relative : $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M}/\mathfrak{R}_1) = \left.\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{O_1M}}}{\mathbf{dt}}\right|_{\mathfrak{R}'} = \boldsymbol{\dot{\rho}\vec{e}_\rho}$
- la vitesse d'entrainement :

$$\overrightarrow{\mathrm{V}_e}\,(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}(M \in \mathfrak{R}_1)}{dt}\right)_R = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + \vec{\Omega}(R_1/R)\;\wedge\;\overrightarrow{O_1M}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{V}_e}\,(M) \;=\; \dot{x}\,\vec{\imath} + \omega\vec{k}\;\wedge\rho\overrightarrow{e_\rho} \;=\; \dot{x}\big(\cos\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} - sin\varphi\overrightarrow{e_\varphi}\big) + \omega\rho\overrightarrow{e_\varphi}$$

Donc $\overrightarrow{\mathrm{V}_e}\,(M) \;=\; (\dot{x}\cos\varphi)\overrightarrow{e_\rho} + (\omega\rho - \dot{x}sin\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$

3- On calcul l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis du point **M**.

- L'accélération relative :

$$\vec{\gamma}\,(M/\mathfrak{R}_1) \;=\; \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1M}}{dt^2}\right)_{R_1} \;=\; \ddot{\rho}\;\overrightarrow{e_\rho}$$

- L'accélération d'entraînement :

$$\overrightarrow{\gamma_e}\,(M) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(M \in \mathfrak{R}_1)}{dt^2} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right)_{/R} + \frac{d}{dt}\,(\Omega(\mathfrak{R}_1/R)\;\wedge\;\overrightarrow{O_1M})_{/R}$$
$$= \vec{\gamma}(O_1/R) + \frac{d\Omega(\mathfrak{R}_1/R)}{dt}\wedge\overrightarrow{O_1M} + \Omega(\mathfrak{R}_1/R)\wedge\big(\Omega(\mathfrak{R}_1/R)\;\wedge\;\overrightarrow{O_1M}\big)$$
$$= \ddot{x}\vec{\imath} + \omega\vec{\mathrm{k}}\wedge(\omega\vec{\mathrm{k}}\;\wedge\;\overrightarrow{e_\rho}) = \ddot{x}\vec{\imath} + \omega\vec{\mathrm{k}}\wedge\rho\omega\overrightarrow{e_\varphi}) = \ddot{x}\vec{\imath} - \rho\omega^2\overrightarrow{e_\rho}$$

Donc : $\overrightarrow{\gamma_e}\,(M) = (\,\ddot{x}\cos\varphi \;-\; \rho\omega^2)\;\overrightarrow{e_\rho} - \ddot{x}\sin\varphi\;\;\overrightarrow{e_\varphi}$

- L'accélération de Coriolis :

$$\overrightarrow{\gamma_C}\,(M) = 2\Omega(R_1/R)\;\wedge\;\vec{V_r}(M) = 2\omega\vec{\mathrm{k}}\;\wedge\;\dot{\rho}\;\overrightarrow{e_\rho}\;\;\Longrightarrow\;\;\overrightarrow{\gamma_C}\,(M) = 2\omega\dot{\rho}\overrightarrow{e_\varphi}$$

4- vérifions les lois de composition des vitesses et des accélérations.

On a : $\vec{V_r}(M) + \vec{V_e}(M) = \boldsymbol{\dot{\rho}\vec{e}_\rho} + (\dot{x}\cos\varphi)\overrightarrow{e_\rho} + (\omega\rho - \dot{x}sin\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$

$$= (\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho})\overrightarrow{e_\rho} + (\omega\rho - \dot{x}sin\varphi)\overrightarrow{e_\varphi} = \vec{V}(M/R)$$

et

$$\overrightarrow{\gamma_r}(M) + \overrightarrow{\gamma_e}(M) + \overrightarrow{\gamma_c}(M) = \ddot{\rho}\ \overrightarrow{e_\rho} + (\ddot{x}\cos\varphi - \rho\omega^2)\overrightarrow{e_\rho} - \ddot{x}\sin\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi} + 2\omega\dot{\rho}\overrightarrow{e_\varphi}$$
$$= (\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{\rho} - \rho\omega^2)\overrightarrow{e_\rho} + (2\omega\dot{\rho} - \ddot{x}\sin\varphi)\overrightarrow{e_\varphi} = \vec{\gamma}(M/R)$$

Les lois de composition du mouvement sont bien vérifiées

5- L'expression des forces appliquées à M dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}$)

- le poids : $\vec{P} = -mg\,\vec{j} = -mg(sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi})$
- la réaction: $\vec{\boldsymbol{R}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}\vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}$
- La force : $\vec{\boldsymbol{F}} = \ddot{x}\,m\cos\varphi\ \vec{e}_\rho$
- Les forces d'inertie :
- Force d'inertie d'entrainement :

$$\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{\gamma_e}(M) = -m(\ddot{x}\cos\varphi - \rho\omega^2)\overrightarrow{e_\rho} + m\ddot{x}\sin\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi}$$

- Force d'inertie de Coriolis :

$$\overrightarrow{F_{ic}} = -m\overrightarrow{\gamma_C}(M) = -2m\omega\dot{\rho}\overrightarrow{e_\varphi}$$

6- Le principe fondamentale de la dynamique (PFD) dans le référentiel non galiléen :

$$\vec{\boldsymbol{P}} + \vec{\boldsymbol{R}} + \vec{\boldsymbol{F}} + \overrightarrow{\boldsymbol{F_{ie}}} + \overrightarrow{\boldsymbol{F_{ic}}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{M})$$

$$-mg(sin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} + cos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}) + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}\vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}} + \ddot{x}\,m\cos\varphi\ \vec{e}_\rho - m(\ddot{x}\cos\varphi - \rho\omega^2)\overrightarrow{e_\rho}$$
$$+ m\ddot{x}\sin\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi} - 2m\omega\dot{\rho}\overrightarrow{e_\varphi} = \boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{\rho}}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$$

$$-mgsin\varphi\,\overrightarrow{e_\rho} - mgcos\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}\vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}} + \ddot{x}\,m\cos\varphi\ \vec{e}_\rho - m(\ddot{x}\cos\varphi - \rho\omega^2)\overrightarrow{e_\rho}$$
$$+ m\ddot{x}\sin\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi} - 2m\omega\dot{\rho}\overrightarrow{e_\varphi} = \boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{\rho}}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$$

$$[-mgsin\varphi - m(\ddot{x}\cos\varphi - \rho\omega^2) + \ddot{x}\,m\cos\varphi]\,\overrightarrow{e_\rho} + [-mgcos\varphi + m\ddot{x}\sin\varphi - 2m\omega\dot{\rho}$$
$$+ \mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}}]\vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{\rho}}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$$

7- L'équation différentielle du mouvement.

La projection du PFD suivant $\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$ **:**

$$[-mgsin\varphi - m(\ddot{x}\cos\varphi - \rho\omega^2) + \ddot{x}\,m\cos\varphi] = \boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{\rho}}$$

Ce qui donne :

$$\Rightarrow\ \ddot{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{\rho} = -\mathbf{g}\sin\varphi$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants et avec second membre. L'équation caractéristique est : $r^2 - \omega^2 = \mathbf{0}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{r}_{\mathbf{1,2}} = \mp\omega$$

La solution s'écrit sous la forme : $\rho(t) = \rho_g(t) + \rho_p(t)$

Avec :

$$\rho_g(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

$$\rho_p(t) = C\sin\varphi + D cos\varphi$$

$\rho_p(t)$ Doit vérifier l'équation différentielle

$$\ddot{\rho_p}(t) = -C\omega^2\sin\varphi - D\omega^2 cos\varphi$$

On écrit donc :

$$-C\omega^2\sin\varphi - D\omega^2 cos\varphi - C\omega^2\sin\varphi - D\omega^2 cos\varphi = -\mathbf{g}\sin\varphi$$

$$\Longrightarrow -2C\omega^2\sin\varphi - 2D\omega^2 cos\varphi = -\mathbf{g}\sin\varphi$$

$$\Longrightarrow -2C\omega^2 = -\mathrm{g} \text{ et } - 2D\omega^2 = 0$$

$$\Longrightarrow C = \frac{\mathrm{g}}{2\omega^2} \text{ et } D = 0$$

Donc : $\rho_p(t) = \frac{\mathrm{g}}{2\omega^2}\sin\varphi$

Par conséquent :

$$\rho(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + \frac{\mathrm{g}}{2\omega^2}\sin\varphi$$

A et B sont déterminées à partir des conditions initiales $\rho(0) = 0 \Rightarrow$ A+B $= 0$ et $\dot{\rho}(0) = v_0 = \omega^2 A - B\omega^2 \quad \Rightarrow A = \frac{v_0}{2\omega^2}$ et $B = -\frac{v_0}{2\omega^2}$.

La solution est $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{v_0}}{\mathbf{2\sqrt{2}\omega}}\mathbf{e^{-\omega t}}$ $\mathbf{sinh\sqrt{2}\omega t})$

$$\rho(t) = \frac{v_0}{2\omega^2}e^{\omega t} - \frac{v_0}{2\omega^2}e^{-\omega t} + \frac{\mathrm{g}}{2\omega^2}\sin\varphi = \frac{v_0}{\omega^2}\mathbf{sinh\omega t} + \frac{\mathrm{g}}{2\omega^2}\sin\varphi$$

8- Les expressions de composantes de la réaction.

- La projection du PFD suivant $\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\varphi}}$ **:** $\Longrightarrow \mathbf{R}_{\boldsymbol{\varphi}} = m(2\dot{\rho}\omega + g cos\varphi - \ddot{x}\sin\varphi)$
- La projection du PFD suivant $\vec{\mathbf{k}}$ **:** $\Longrightarrow \mathbf{R}_{\boldsymbol{z}} = \mathbf{0}$

9- Pour que le contact entre M et (T) existe, il faut que :

$$R_\varphi \geq 0$$

$\Longrightarrow$ $d'après\ 4-b)$: $\dot{\rho} \geq \frac{a\sin\varphi - g cos\varphi}{2\omega} = \dot{\rho}_{min} = \vec{\mathrm{V}}_{min}(M/R_1)$