El Mokhtar El Ouardi , Habiblah Nabil

Série N°1 : Calcul vectoriel

Exercice N°1

On donne les vecteurs suivants :

$$\vec{r_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \quad , \quad \vec{r_2} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \quad , \quad \vec{r_3} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

1- Calculer leurs modules.

2- Calculer les composantes et les modules des vecteurs :

$$\vec{A} = \vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3} \qquad \vec{B} = \vec{r_1} + \vec{r_2} - \vec{r_3}$$

3- Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $\vec{C} = \vec{r_1} + 2\vec{r_2}$

4- Calculer les produit scalaire et vectoriel des vecteurs $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$.

5- Calculer les produits $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$ et $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$

Exercice N°2

On considère les vecteurs suivants ;

$$\vec{V_1} = \sin t\ \vec{i} - \cos t\ \vec{j} + 3t\ \vec{k} \qquad \vec{V_2} = 5t^3\vec{i} - 3t\ \vec{j} - 2t^4\ \vec{k}$$

1- Calculer le module de ces deux vecteurs

2-Trouver les expressions des grandeurs :

$$\frac{d}{dt}(\vec{V_1}.\vec{V_2}) \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dt}(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2})$$

Exercice N°3

Soit les trois vecteurs : $\vec{a}\,(1, 2, 2)$, $\vec{b}\,(2, 2\sqrt{2}, 2)$ et $\vec{c}\,(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

1- Calculer $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\|\vec{c}\|$, et en déduire les expressions des vecteurs unitaires $\vec{e}_a$, $\vec{e}_b$, $\vec{e}_c$ des directions de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

2- En considérant les angles θ_a , θ_b et θ_c compris entre 0 et π, calculer :

$$\cos\theta_a = \cos(\widehat{\vec{e}_b, \vec{e}_c}), \qquad \cos\theta_b = \cos(\widehat{\vec{e}_a, \vec{e}_c}) \qquad \text{et} \qquad \cos\theta_c = \cos(\widehat{\vec{e}_b, \vec{e}_a})$$

3- Calculer les composantes des vecteurs : $\vec{u}_a = \vec{e}_b \wedge \vec{e}_c$, $\vec{u}_b = \vec{e}_c \wedge \vec{e}_a$ et $\vec{u}_c = \vec{e}_a \wedge \vec{e}_b$.

4- En déduire $\sin\theta_a$, $\sin\theta_b$ et $\sin\theta_c$. Vérifier ces résultats à l'aide de la question **2)**.

Exercice N°4

Soit un vecteur $\vec{v}(t)$ de module V et un référentiel R.

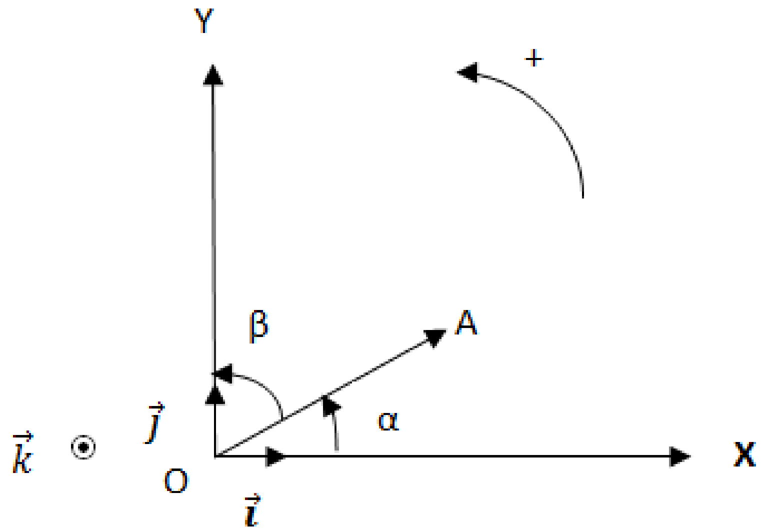
1- Peut-on dire que la dérivée de $\vec{v}(t)$ est égale à la dérivée du module de $\vec{v}(t)$?

2- Montrer que si $\vec{v}(t)$ a un module constant, le vecteur dérivé $\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$ lui est orthogonal.

3- Montrer que, d'une manière générale : $\vec{v}(t).\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = V\frac{dV}{dt}$

Exercice N°5

Dans un repère $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormé direct, on considère un vecteur $\vec{U} = \vec{OA}$ que fait un angle α avec l'axe $(O, \vec{\imath})$ et un angle β avec l'axe $(O, \vec{\jmath})$ (Figur ci − dessous).



Exprimer:

1- le vecteur $\vec{U}$ en fonction de α, le module **U** et les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

2- le vecteur $\vec{U}$ en fonction de β, le module **U** et les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

3- Même questions de **1** et **2** si en faisant une rotation au sens positive suivant l'axe $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{k}})$ de $\frac{\pi}{2}$.

4- Même questions de **1** et **2** si en faisant une rotation au sens négative suivant l'axe $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{k}})$ de $\frac{\pi}{2}$.

Exercice N°6

Un point **M** est repéré dans **(xOy)** par les coordonnées polaires, $\rho(t) = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\theta(t) = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Ox}})$. Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de même direction et sens que $\overrightarrow{OM}$.

1- Tracer dans le plan **(xOy)** le point **M** en y précisant les coordonnées polaires ρ et θ;

2- Ecrire l'expression de $\vec{u}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) ;

3- Calculer la dérivée de $\vec{u}$ par rapport à θ; on note $\vec{v}$ ce vecteur ;

4- Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; conclure ;

5- Calculer la dérivée de $\vec{v}$ par rapport à θ Que constater vous ?

6- Calculer les dérivées première et seconde par rapport au temps de $\vec{u}$.

Exercice N°7

Soit le référentiel $\mathbf{R}(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ et la base $\mathbf{B}(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Dans le plan **(Oxy)**, on considère un point **P** mobile le long d'une courbe **(C)** en tout point de laquelle on peut définir un vecteur tangent $\vec{V}$. Le point **P** est successivement repéré dans les bases :**B** $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, **B′** $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et **B″** $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$

On pose $(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \vec{e}_r}) = \theta$ et $(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \vec{e}_t}) = \varphi$.

Exprimer:

1- Les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.

2- Les vecteurs unitaires $\vec{e}_t$ et $\vec{e}_n$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.

3- Calculer les expressions suivantes où **t** désigne le temps. **Conclure :**

$$\frac{d\vec{e}_x}{dt}\Big|_R \text{ et } \frac{d\vec{e}_y}{dt}\Big|_R \quad ; \quad \frac{d\vec{e}_r}{dt}\Big|_R \text{ et } \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\Big|_R \; ; \quad \frac{d\vec{e}_t}{dt}\Big|_R \text{ et } \frac{d\vec{e}_n}{dt}\Big|_R$$