

Examen de Mécanique du Point Matériel

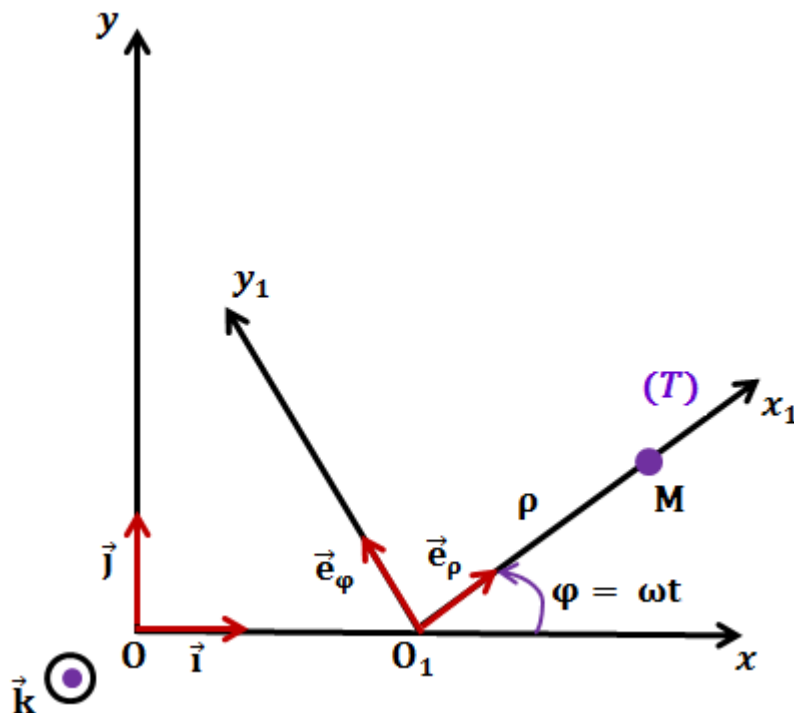
Glissement d'un anneau sans frottement sur une tige (T)

Soit Oxy un plan vertical d'un référentiel fixe supposé Galiléen $R(O, x, y, z)$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée et directe. Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur une tige (T) qui constamment (toujours) en contact par son extrémité O_1 avec l'axe ox . Le point O_1 se déplace sur l'axe ox . (Voir figure ci-dessous).

Soit $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1 = z)$ de base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ orthonormée et directe, un référentiel relatif lié à la tige (T) tel que l'axe O_1x_1 confondu avec (T).

La tige (T) effectue également un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe O_1z_1 .

Les paramètres du système seront : $\|\vec{OO_1}\| = x(t)$, $\|\vec{O_1M}\| = \rho(t)$ et $\varphi(t) = (\vec{i}, \vec{e}_\rho)$



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

A- Cinématique

- 1- Le référentiel R_1 est-il Galiléen ? Justifier clairement votre réponse.
- 2- Donner le vecteur vitesse de rotation de R_1 par rapport à R : $\vec{\Omega}(R_1/R)$.
- 3- Déterminer la vitesse et l'accélération du point O_1 par rapport à R dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- 4- Déterminer le vecteur position $\vec{OM}$.
- 5- Calculer directement dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$:
 - 5- 1- La vitesse absolue de M : $\vec{V}(M/R)$.
 - 5- 2- L'accélération absolue de : $\vec{\gamma}(M/R)$.

6- Déterminer dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ de R_1 .

6-1- La vitesse relative de M : $\vec{V}(M/R_1)$.

6-2- La vitesse d'entraînement de M : $\vec{V}_e(M)$.

6-3- L'accélération relative de M : $\vec{\gamma}_r(M)$.

6-4- L'accélération d'entraînement de M : $\vec{\gamma}_e(M)$.

6-4- L'accélération de Coriolis de M : $\vec{\gamma}_c(M)$.

7- Les lois de composition des vitesses et des accélérations sont-elles vérifiées?

B- Dynamique

L'expression générale de la réaction $\vec{R}$ de la tige (T) sur M peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{R} = R_\rho \vec{e}_\rho + R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{k}$$

1- Justifier que la composante R_ρ de la réaction $\vec{R}$ est nulle.

2- Exprimer les forces appliquées à M dans le référentiel R_1 .

3- Appliquer à M le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel mobile R_1 .

4- Dédire de ce principe :

a- L'équation différentielle du mouvement de M le long de la tige (T). On posera : $\ddot{x} = a$.

b- Les composantes R_φ et R_z de la réaction $\vec{R}$ de la tige.

5- Quelle sera la vitesse minimale de M sur la tige pour que le contact entre M et (T) puisse continuer à exister dans le temps ?

Correction de l'examen de Mécanique du Point Matériel

A- Cinématique

1- Le référentiel R_1 n'est pas Galiléen car il n'est pas en translation rectiligne et uniforme par rapport à R .

2- Le vecteur vitesse de rotation de R_1 par rapport à R est : $\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\varphi} \vec{k} = \omega \vec{k}$.

3- La vitesse et l'accélération du point O_1 par rapport à R dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\vec{V}\left(\frac{O_1}{R}\right) = \left. \frac{d\vec{OO_1}}{dt} \right)_R \Rightarrow \vec{V}(O_1/R) = \dot{x} \vec{i} = \dot{x} \cos \varphi \vec{e}_\rho - \dot{x} \sin \varphi \vec{e}_\varphi$$

Avec $\vec{i} = \cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi$

$$\vec{\gamma}\left(\frac{O_1}{R}\right) = \left. \frac{d\vec{V}\left(\frac{O_1}{R}\right)}{dt} \right)_R = \left. \frac{d\dot{x} \vec{i}}{dt} \right)_R$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(O_1/R) = \ddot{x} \vec{i} = \ddot{x} \cos \varphi \vec{e}_\rho - \ddot{x} \sin \varphi \vec{e}_\varphi$$

4- Le vecteur position $\vec{OM}$ en fonction de $x, \rho, \vec{i}$ et $\vec{e}_\rho$: $\vec{OM} = x \vec{i} + \rho \vec{e}_\rho$

5- Calculons directement dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$:

5- 1- La vitesse absolue de M : $\vec{V}(M/R) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R = \dot{x} \vec{i} + \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \omega \vec{e}_\varphi$.

$$\Rightarrow \vec{V}(M/R) = (\dot{x} \cos \varphi + \dot{\rho}) \vec{e}_\rho + (\rho \omega - \dot{x} \sin \varphi) \vec{e}_\varphi$$

5- 2- L'accélération absolue de : $\vec{\gamma}(M/R)$.

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{\rho} - \rho \omega^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \omega - \ddot{x} \sin \varphi) \vec{e}_\varphi$$

6- Déterminons dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ de R_1 .

6-1- La vitesse relative de M : $\vec{V}(M/R_1)$.

$$\vec{V}(M/R_1) = \left. \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right)_{R_1} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho$$

6-2- La vitesse d'entraînement de M : $\vec{V}_e(M)$.

$$\vec{V}_e(M) = \left(\frac{d\vec{OM}(M \in R_1)}{dt} \right)_R = \frac{d\vec{OO_1}}{dt} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}$$

$$\vec{V}_e(M) = \dot{x} \vec{i} + \omega \vec{k} \wedge \rho \vec{e}_\rho = \dot{x} (\cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) + \omega \rho \vec{e}_\varphi$$

Donc

$$\vec{V}_e(M) = (\dot{x} \cos \varphi) \vec{e}_\rho + (\omega \rho - \dot{x} \sin \varphi) \vec{e}_\varphi$$

6-3- L'accélération relative de M : $\vec{\gamma}_r(M)$.

$$\vec{\gamma}(M/R_1) = \left. \frac{d^2 \vec{O_1M}}{dt^2} \right)_{R_1} = \ddot{\rho} \vec{e}_\rho$$

6-4- Accélération d'entraînement de M : $\vec{\gamma}_e(M)$.

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_e(M) &= \frac{d^2 \overrightarrow{OM}(M \in R_1)}{dt^2} = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OO_1}}{dt^2} \right)_{/R} + \frac{d}{dt} (\Omega(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M})_{/R} \\ &= \vec{\gamma}(O_1/R) + \frac{d\Omega(R_1/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \Omega(R_1/R) \wedge (\Omega(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M})_{/R} \\ &= \ddot{x}\vec{i} + \omega\vec{k} \wedge (\omega\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho) = \ddot{x}\vec{i} + \omega\vec{k} \wedge \rho\omega\vec{e}_\varphi = \ddot{x}\vec{i} - \rho\omega^2\vec{e}_\rho\end{aligned}$$

Donc : $\vec{\gamma}_e(M) = (\ddot{x} \cos \varphi - \rho\omega^2) \vec{e}_\rho - \ddot{x} \sin \varphi \vec{e}_\varphi$

6-4- L'accélération de Coriolis de M : $\vec{\gamma}_c(M)$.

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\Omega(R_1/R) \wedge \vec{V}_r(M) = 2\omega\vec{k} \wedge \dot{\rho} \vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{\gamma}_c(M) = 2\omega\dot{\rho}\vec{e}_\varphi$$

7- vérifions les lois de composition des vitesses et des accélérations.

On a : $\vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) = (\dot{x} \cos \varphi + \dot{\rho})\vec{e}_\rho + (\omega\rho - \dot{x} \sin \varphi)\vec{e}_\varphi = \vec{V}(M/R)$

et

$$\vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M) = (\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{\rho} - \rho\omega^2) \vec{e}_\rho + (2\omega\dot{\rho} - \ddot{x} \sin \varphi) \vec{e}_\varphi = \vec{\gamma}(M/R)$$

Les lois de composition du mouvement sont bien vérifiées

B- Dynamique

L'expression générale de la réaction $\vec{R}$ de la tige (T) sur M peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{R} = R_\rho \vec{e}_\rho + R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{k}$$

1- Justifier que la composante R_ρ de la réaction $\vec{R}$ est nulle.

R_1 est nulle car M se déplace sans frottement sur la tige (T)

2- Faire le bilan des forces appliquées à M dans le référentiel R_1 .

- Poids : $\vec{P} = -mg \vec{j} = -mg(\sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi)$
- Réaction de la tige : $\vec{R} = R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{k}$
- Force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e(M) = -m(\ddot{x} \cos \varphi - \rho\omega^2) \vec{e}_\rho + m\ddot{x} \sin \varphi \vec{e}_\varphi$
- Force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c(M) = -2m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\varphi$

3- Appliquer à M le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel mobile R_1 .

$$\sum \vec{F}_{réelle} + \sum \vec{F}_{inertie} = m\vec{\gamma}_r(M) \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{\gamma}_r(M)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}[-mg \sin \varphi - m(\ddot{x} \cos \varphi - \rho\omega^2)] \vec{e}_\rho + [m(\ddot{x} \sin \varphi - g \cos \varphi - 2\omega\dot{\rho}) + R_\varphi] \vec{e}_\varphi + R_z \vec{k} \\ = m\ddot{\rho} \vec{e}_\rho\end{aligned}$$

4- Dédurre de ce principe :

a- L'équation différentielle du mouvement de M le long de la tige (T).

Soit $\ddot{\rho} - \omega^2 \rho = a \cos \varphi + g \sin \varphi$ avec $\ddot{x} = a$

b- Les composantes R_φ et R_z de la réaction $\vec{R}$ de la tige.

La projection de la PFD sur $\vec{e}_\varphi$ donne la composante de R_φ de $\vec{R}$.

$$R_\varphi = m(g \cos \varphi - a \sin \varphi + 2\omega\dot{\rho})$$

La projection de la PFD sur $\vec{k}$ donne la composante de R_z de $\vec{R}$.

Soit $R_z = 0$

5- Pour que le contact entre M et (T) existe, il faut que :

$$R_\varphi \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{d'après 4 - b): } \dot{\rho} \geq \frac{a \sin \varphi - g \cos \varphi}{2\omega} = \dot{\rho}_{\min} = \vec{V}_{\min}(M/R_1)$$