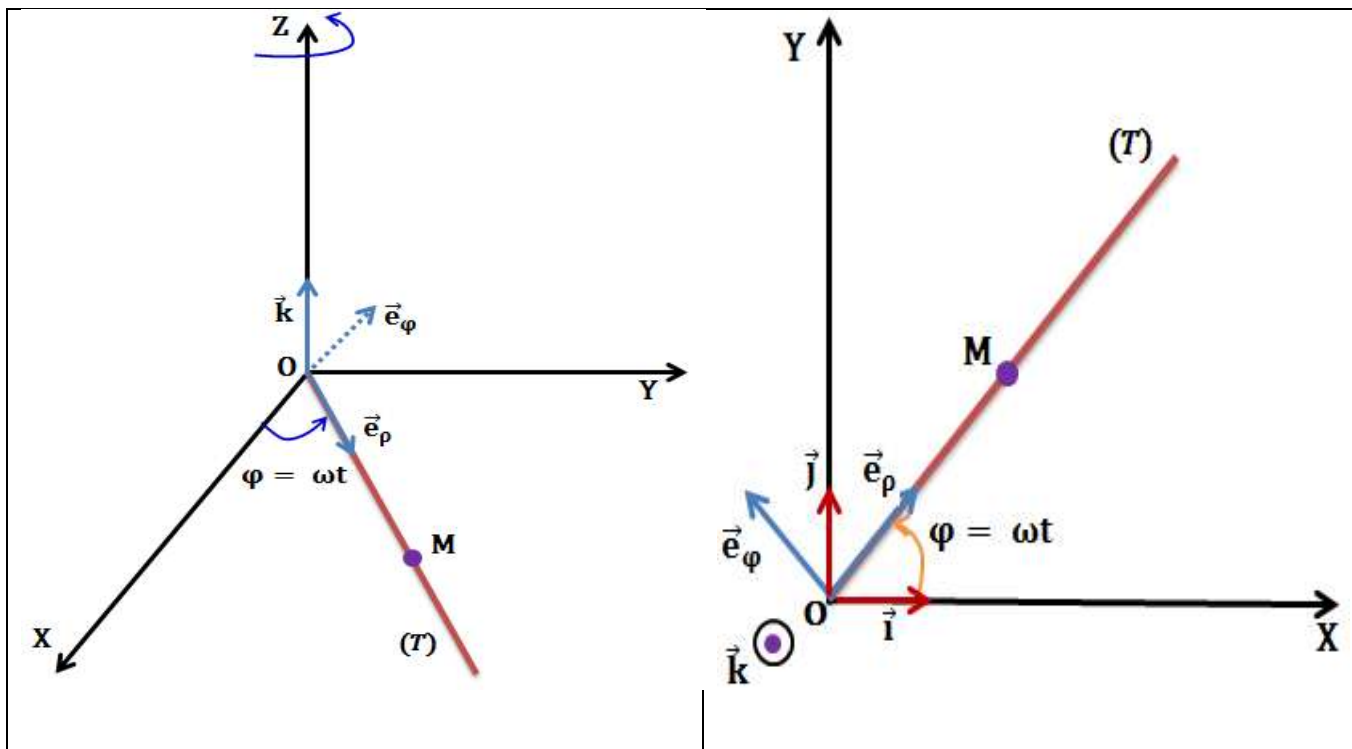


Examen de Mécanique du Point Matériel

Glissement d'un anneau sans frottement sur une tige (T)

Un anneau assimilé à un point matériel M de masse m coulisse sans frottement le long de la tige (T) qui tourne dans le plan horizontal (XOY) autour de l'axe (OZ) avec une vitesse angulaire constante ($\varphi = \omega t$ avec $\omega > 0$). Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un référentiel orthonormé direct et Galiléen, et soit $\mathcal{R}'(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ un référentiel lié à la tige. M est lancée depuis le point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_\rho$ ($v_0 > 0$), elle soumit en plus des forces habituelles, à une force $\vec{F} = -2m\omega\dot{\rho} \vec{e}_\rho$ (Figures ci-dessous). Le mouvement du point M décrit par les variables ρ et φ .



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

Partie I : Etude dans le référentiel $\mathcal{R}$ (Galiléen)

I- Application du principe fondamentale de la dynamique

1- Calculer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, la vitesse $\vec{V}$ ($M/\mathcal{R}$) et l'accélération $\vec{\gamma}$ ($M/\mathcal{R}$) de M .

1.5

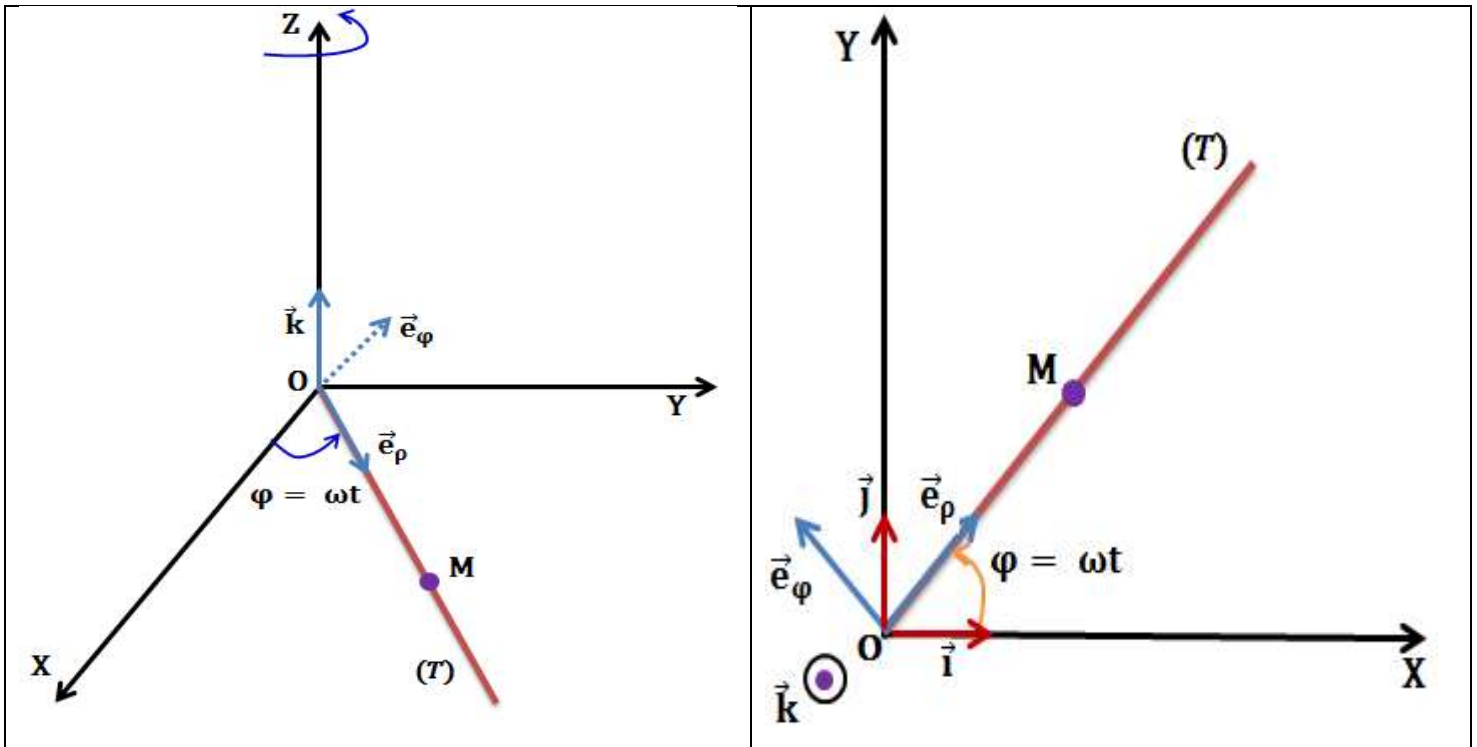
2- Exprimer les forces appliquées à M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ par rapport au

1.25

référentiel galiléen	
3- Ecrire le principe fondamentale de la dynamique (PFD)	1
4- Par projection du PFD suivant $\vec{e}_\rho$; déduire l'équation différentielle du mouvement.	1
<u>II- Application du théorème du moment cinétique</u>	
1- Déterminer $\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$.	1
2- Déterminer les moments de chacune des forces agissant sur le point M .	1.5
3- En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver les expressions de la composante de $\vec{R}$.	2
<u>III- Application du théorème de l'énergie cinétique</u>	
1- Déterminer $E_C(M/\mathcal{R})$ l'énergie cinétique du point M dans $\mathcal{R}$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$.	1
2- Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M .	1.5
3- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'équation différentielle du mouvement.	1.5
<u>Partie II : Etude dans le référentiel $\mathcal{R}'$ (non Galiléen)</u>	
1- Calculer la vitesse relative $\vec{V}(M/\mathcal{R}')$ et la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e(M)$	0.75
2- Calculer l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis du point M .	1.25
3- Donner l'expression des forces appliquées à M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$	1.75
4- Ecrire le principe fondamentale de la dynamique (PFD) dans $\mathcal{R}'$.	1
5- Retrouver l'équation différentielle du mouvement. Déduire l'équation horaire du mouvement.	1.5
6- Retrouver les expressions des composantes de la réaction.	0.5

Correction de l'examen de Mécanique du Point Matériel

Soit un anneau assimilé à un point matériel M de masse m coulisse sans frottement le long de la tige (T) qui tourne dans le plan horizontal (XOY) autour de l'axe (OZ) avec une vitesse angulaire constante ($\varphi = \omega t$ avec $\omega > 0$). $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un référentiel orthonormé direct et Galiléen, et soit $\mathcal{R}'(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ un référentiel lié à la tige. M est lancée depuis le point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_\rho$ ($v_0 > 0$), elle soumit en plus des forces habituelles, à une force $\vec{F} = -2m\omega\dot{\rho} \vec{e}_\rho$ (Figures ci-dessous). Le mouvement du point M décrit par les variables ρ et φ .



Partie I : Etude dans le référentiel $\mathcal{R}$ (Galiléen)

I- Application du principe fondamentale de la dynamique

1- Calculons le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, la vitesse $\vec{V} (M/\mathcal{R})$ et l'accélération $\vec{\gamma} (M/\mathcal{R})$ de M dans $\mathcal{R}$.

☀ Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$

☀ Vecteur vitesse : $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \omega \vec{e}_\varphi$

☀ Vecteur accélération :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/R) &= \left. \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi)}{dt} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi + \rho\omega\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \\ \vec{\gamma}(M/R) &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi - \rho\omega^2\vec{e}_\rho \\ \text{Avec : } \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} &= \omega\vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\omega\vec{e}_\rho \\ \vec{\gamma}(M/R) &= (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

2- On exprime les forces appliquées à M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ par rapport au référentiel galiléen

☀ le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$,

☀ la réaction de la tige qui est normale à celle-ci, puisque les frottements sont négligeables (la composante de $\vec{R}$ suivant $\vec{e}_\rho$ est nul : $R_\rho = 0$) : $\vec{R} = R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{k}$

☀ La force : $\vec{F} = -2m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\rho$

3- Ecrivons le principe fondamentale de la dynamique (PFD) par rapport au référentiel Galiléen :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{ext} &= m\vec{\gamma}(M/R) \\ -mg\vec{k} + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{k} - 2m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\rho &= m[(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi] \\ -2m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\rho + R_\varphi\vec{e}_\varphi + (R_z - mg)\vec{k} &= m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2m\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

4- Par projection du PFD suivant $\vec{e}_\rho$

L'équation différentielle du mouvement.

Pour trouver cette équation, il faut faire une projection sur un vecteur de telle sorte éliminer les composantes de la réaction.

$$\Rightarrow m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) = -2m\omega\dot{\rho} \Rightarrow \ddot{\rho} + 2\omega\dot{\rho} - \omega^2\rho = 0$$

II- Application du théorème du moment cinétique

1- Déterminons $\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \rho\vec{e}_\rho \wedge m(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi) = m\rho^2\omega\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})}{dt} = 2m\rho\dot{\rho}\omega\vec{k}$$

2- On détermine les moments de chacune des forces agissant sur le point M.

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \rho \vec{e}_\rho \wedge -2m\omega\dot{\rho} \vec{e}_\rho = 0$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \rho \vec{e}_\rho \wedge -mg\vec{k} = \rho mg\vec{e}_\varphi$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \rho \vec{e}_\rho \wedge (R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{k}) = -\rho R_z \vec{e}_\varphi + \rho R_\varphi \vec{k}$$

3- Les expressions des composantes de $\vec{R}$.

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathfrak{R})}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) + \mathcal{M}_O(\vec{P}) + \mathcal{M}_O(\vec{R})$$

$$2m\rho\dot{\rho}\omega\vec{k} = \rho(mg - R_z)\vec{e}_\varphi + \rho R_\varphi\vec{k}$$

Par identification, on trouve :

$$R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega \quad \text{et} \quad R_z = mg$$

III- Application du théorème de l'énergie cinétique

1- On détermine $E_C(M/\mathfrak{R})$ l'énergie cinétique du point M dans $\mathfrak{R}$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathfrak{R}$.

☀ L'énergie cinétique s'exprime comme suit :

$$E_C(M/\mathfrak{R}) = \frac{1}{2}mV(M/\mathfrak{R}) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2)$$

☀ La dérivée de l'énergie cinétique s'exprime alors :

$$\frac{dE_C(M/\mathfrak{R})}{dt} = m(\dot{\rho}\ddot{\rho} + \rho\dot{\rho}\omega^2)$$

2- Déterminons les puissances de chacune des forces agissant sur le point M .

$$\text{☀ } P(\vec{F}/\mathfrak{R}) = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathfrak{R}) = -2m\omega\dot{\rho} \vec{e}_\rho \cdot (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi) = -2m\omega\dot{\rho}^2$$

$$\text{☀ } P(\vec{P}/\mathfrak{R}) = \vec{P} \cdot \vec{V}(M/\mathfrak{R}) = -mg\vec{k} \cdot (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi) = 0$$

$$\text{☀ } P(\vec{R}/\mathfrak{R}) = \vec{R} \cdot \vec{V}(M/\mathfrak{R}) = (R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{k}) \cdot (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi) = \rho\omega R_\varphi$$

3- Par applications du théorème de l'énergie cinétique.

$$\frac{dE_C(M/\mathfrak{R})}{dt} = P(\vec{F}/\mathfrak{R}) + P(\vec{P}/\mathfrak{R}) + P(\vec{R}/\mathfrak{R})$$

$$\Rightarrow m(\dot{\rho}\ddot{\rho} + \rho\dot{\rho}\omega^2) = -2m\omega\dot{\rho}^2 + \rho\omega R_\varphi$$

On 'a :

$$R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega$$

$$\Rightarrow m(\dot{\rho}\ddot{\rho} + \rho\dot{\rho}\omega^2) = -2m\omega\dot{\rho}^2 + 2m\rho\dot{\rho}\omega^2$$

$$\Rightarrow m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\rho\dot{\rho}\omega^2 = -2m\omega\dot{\rho}^2 + 2m\rho\dot{\rho}\omega^2$$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} + \rho\omega^2 = -2\omega\dot{\rho} + 2\rho\omega^2$$

On retrouve donc :

$$\Rightarrow \ddot{\rho} + 2\omega\dot{\rho} - \omega^2\rho = 0$$

Partie II : Etude dans le référentiel $\mathcal{R}'$ (non Galiléen)

1- On calcul la vitesse relative $\vec{V}(M/\mathcal{R}')$ et la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e(M)$

☀ la vitesse relative : $\vec{V}(M/\mathcal{R}') = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho$

☀ la vitesse d'entraînement : $\vec{V}_e(M) = \left. \frac{d\vec{OO}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \vec{\omega} \wedge \rho\vec{e}_\rho = \rho\omega\vec{e}_\phi$

2- On calcul l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis du point M.

☀ L'accélération relative :

$$\vec{\gamma}_r(M) = \left. \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}'} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho$$

☀ L'accélération d'entraînement :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_e(M) &= \left. \frac{d^2\vec{OO}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) \\ &= \vec{\omega} \wedge \rho\omega\vec{e}_\phi = -\rho\omega^2\vec{e}_\rho\end{aligned}$$

☀ L'accélération de Coriolis :

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2(\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r(M)) = 2\dot{\rho}\omega(\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho) = 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\phi$$

3- L'expression des forces appliquées à M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{k})$

☀ le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$,

☀ la réaction: $\vec{R} = R_\phi\vec{e}_\phi + R_z\vec{k}$

☀ La force : $\vec{F} = -2m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\rho$

☀ Les forces d'inertie :

☿ Force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e(M) = m\rho\omega^2\vec{e}_\rho$

☿ Force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c(M) = -2m\dot{\rho}\omega\vec{e}_\phi$

4- Le principe fondamentale de la dynamique (PFD) dans le référentiel non galiléen :

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} &= m\vec{\gamma}_r(M) \\ -mg\vec{k} + R_\phi\vec{e}_\phi + R_z\vec{k} - 2m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\rho + m\rho\omega^2\vec{e}_\rho - 2m\dot{\rho}\omega\vec{e}_\phi &= m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho \\ (-2m\omega\dot{\rho} + m\rho\omega^2)\vec{e}_\rho + (R_\phi - 2m\dot{\rho}\omega)\vec{e}_\phi + (R_z - mg)\vec{k} &= m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho\end{aligned}$$

5- L'équation différentielle du mouvement.

La projection du PFD suivant $\vec{e}_\rho$:

$$[(-2m\omega\dot{\rho} + m\rho\omega^2)\vec{e}_\rho + (\mathbf{R}_\varphi - 2m\dot{\rho}\omega)\vec{e}_\varphi + (\mathbf{R}_z - mg)\vec{k} = m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho]. \vec{e}_\rho$$

Ce qui donne :

$$-m\omega\dot{\rho} + 2m\rho\omega^2 = m\ddot{\rho} \Leftrightarrow \ddot{\rho} + 2\omega\dot{\rho} - \rho\omega^2 = 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique est : $r^2 + 2\omega r - \omega^2 = 0 \Rightarrow \Delta' = 2\omega^2$

$$\Rightarrow r_{1,2} = -\omega \mp \sqrt{\Delta'} = -\omega \mp \omega\sqrt{2}$$

et la solution est $\rho(t) = (Ae^{(\sqrt{2}-1)\omega t} + Be^{-(\sqrt{2}+1)\omega t})$. A et B sont déterminées à partir des conditions initiales $\rho(0) = 0 \Rightarrow A+B = 0$ et $\dot{\rho}(0) = v_0 = \omega(\sqrt{2}-1)A - (\sqrt{2}+1)B$

$$\Rightarrow A = \frac{v_0}{2\sqrt{2}\omega} \text{ et } B = -\frac{v_0}{2\sqrt{2}\omega}.$$

La solution est $\rho(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{2}\omega} e^{-\omega t} \sinh\sqrt{2}\omega t$

6- Les expressions de composantes de la réaction.

☀ La projection du PFD suivant $\vec{e}_\varphi$: $\Rightarrow \mathbf{R}_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega$

☀ La projection du PFD suivant $\vec{k}$: $\Rightarrow \mathbf{R}_z = mg$