القطب الجامعي - أيت ملول
ⵜⵉⵎⵍⵍⴰⵍⵉⵏ ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ - ⴰⵢⵜ ⵎⵍⵍⵓⵍ
Campus Universitaire - Ait Melloul

Année Universitaire: **2017 /2018**

Filière SMPC

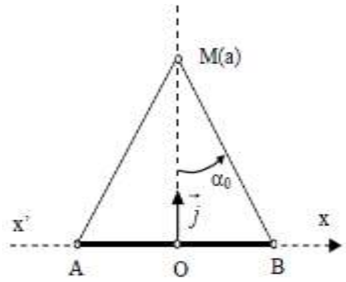
TD d'électrostatique

Série N°2

Exercice N°1 : Segment de droite uniformément chargé avec la densité linéique

Soit un segment AB uniformément chargé avec une densité linéique $\lambda > 0$.

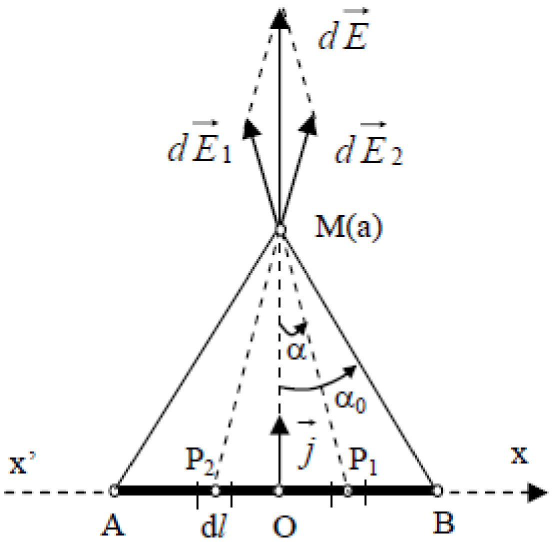
On désigne par O le milieu du segment AB. Calculer le champ E crée par cette distribution en tout point M sur une distance a de la médiatrice de AB et en un point M appartenant au segment AB.



Correction de l'exercice N°1

1) Le point M est sur la médiatrice de AB

Considérons les points A et B sur l'axe x'x tel que l'origine O soit le milieu de AB (figure ci dessous). Deux éléments de charges dq_1 et dq_2, centrés en deux points P_1 et P_2 symétriques par rapport à O, créent en M des champs électrostatiques élémentaires respectivement $d\vec{E_1}$ et $d\vec{E_2}$. La résultante de ces champs est portée par la médiatrice (OM), par exemple l'axe y'y de vecteur $\vec{j}$.



Le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par l'ensemble de la charge portée par le segment AB est donc, par raison de symétrie, dirigé suivant l'axe des y. Soit,

$$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_1M}}{\left\|\overrightarrow{P_1M}\right\|^3} = \frac{\lambda dx}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{\mathbf{dx}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}\cos\alpha\,\vec{j}$$

Si on choisit α comme variable d'intégration, on aura :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0}\frac{\cos\alpha}{a}d\alpha\,\vec{j}$$

avec, $tg\alpha = \dfrac{x}{a}$

$$dx = a(1+tg^2\alpha)d\alpha = \frac{a}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2}$$

Pour x = - L, $\alpha = -\alpha_0$ et pour x = + L, $\alpha = \alpha_0$

Soit,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\sin\alpha_0\vec{j} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}\vec{j}$$

Cas limite

- Si le point M est très éloigné de l'origine O (a >> L), on a :

$$\sin\alpha_0 = \frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}} \cong \alpha_0 \cong \frac{L}{a}$$

et donc,

$$\vec{E} \cong \frac{2\lambda L}{2\Pi\varepsilon_0 a^2}\vec{j}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par une charge $Q = 2\lambda L$ concentrée en O.

- Si le point M est très proche du segment (L >> a), on a :

$$\alpha_0 \to \frac{\Pi}{2}$$

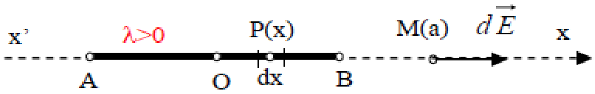
et

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\vec{j}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par un fil de longueur infinie uniformément chargé.

2) Le point M appartient à (AB)

Un élément de charge $dq = \lambda dx$ centré en P crée en M un champ élémentaire $d\vec{E}$ porté par $\vec{\imath}$ (figure ci-dessous) :



$$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = \frac{\lambda dx}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{i}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{dx}{(a-x)^2}\vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{dx}{(a-x)^2}\vec{i} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{-d(a-x)}{(a-x)^2}\vec{i} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0}\frac{L}{(a^2-L^2)}\vec{i}$$

soit,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0}\frac{L}{(a^2-L^2)}\vec{i}$$

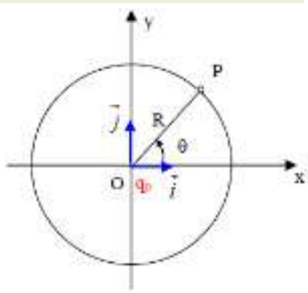
Cas limite

- Si le point M est très éloigné du segment [AB] (a >> L), on a :

$$\vec{E} \cong \frac{2\lambda L}{4\Pi\varepsilon_0 a^2}\vec{i}$$

Exercice N°2 : Répartition linéique de charges non uniforme

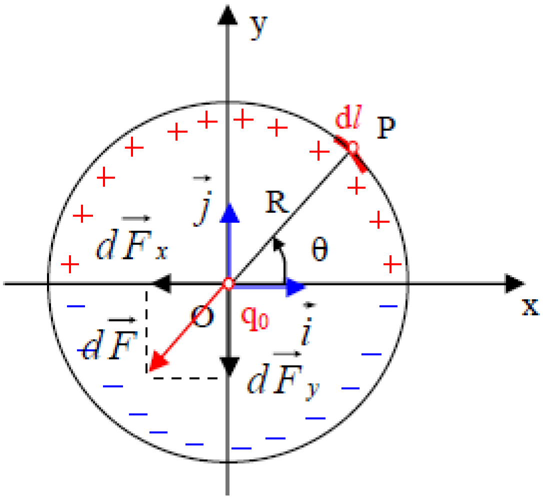
Un fil de section négligeable en forme d'un cercle de centre O et de rayon R placé dans le plan xOy, porte une charge électrique répartie avec une densité linéique λ : $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$ où λ_0 est une constante positive et $\theta = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP})$, P étant un point quelconque du cercle.



Calculons les composantes de la force $\vec{F}$ exercée sur une charge ponctuelle q_0 (> 0), placée en O, par l'ensemble de la charge portée par le cercle.

Correction de l'exercice N°2

La charge est répartie positivement sur le demi-cercle supérieur (y > 0) et négativement sur le demi-cercle inférieur (y < 0) (figure ci-dessous), avec des valeurs maximale et minimale respectivement en $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$.



Un élément de charge $dq = \lambda_0 \sin\theta\, dl$ (avec $dl = R\, d\theta$) , porté par un élément de longueur dl centré en un point moyen P, exerce sur la charge q_0 placée en O une force électrostatique élémentaire donnée par :

$$d\vec{F} = \frac{q_0 dq}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PO}}{\left\|\overrightarrow{PO}\right\|^3}$$

$$\text{avec, } \left\|\overrightarrow{PO}\right\| = R$$

Les deux composantes de la force $\vec{F}$, portées par $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ (figure 5) s'écrivent :

$$d\vec{F}_x = -\left\|d\vec{F}\right\| \cos\theta \vec{i}$$

$$\text{et } d\vec{F}_y = -\left\|d\vec{F}\right\| \cos\theta \vec{j}$$

Dans ce cas le signe (-) correspond à $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Par intégration, on obtient :

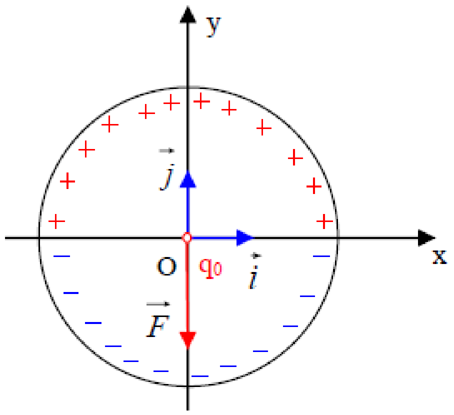
$$\left\|\vec{F}_x\right\| = \frac{q_0\lambda_0}{4\Pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\Pi} \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{q_0\lambda_0}{4\Pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\Pi} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta = \frac{q_0\lambda_0}{8\Pi\varepsilon_0 R}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{2\Pi} = 0$$

$$\left\|\vec{F}_y\right\| = \frac{q_0\lambda_0}{4\Pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\Pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{q_0\lambda_0}{4\Pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\Pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{q_0\lambda_0}{8\Pi\varepsilon_0 R}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\Pi} = \frac{q_0\lambda_0}{4\Pi\varepsilon_0 R}$$

Soit

$$\vec{F} = \vec{F}_y = -\frac{q_0\lambda_0}{8\Pi\varepsilon_0 R}\vec{j}$$

La force totale exercée sur q_0 en O par l'ensemble de la charge portée par le cercle est dirigée suivant $(-\vec{\jmath})$ (figure ci-dessous). Elle est répulsive d'un côté ($0 \le \theta \le \pi$), attractive de l'autre ($\pi \le \theta \le 2\pi$).

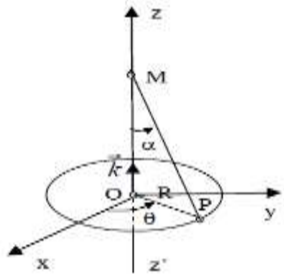


Exercice N°3 : Boucle circulaire portant une charge linéique uniforme

Soit une boucle circulaire de centre O, de rayon R, uniformément chargée avec une densité linéique $\lambda = \lambda_0$. Calculer le champ $\vec{E}$ crée par cette distribution de charges, en un point M de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ de la boucle :

1- A partir du potentiel électrostatique

2- Directement



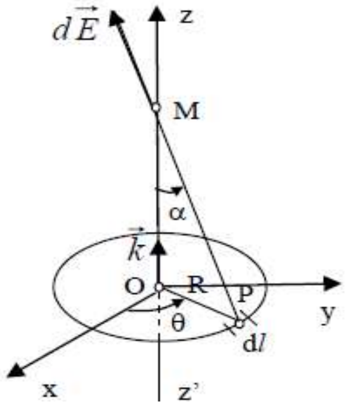
Correction de l'exercice N°3

1- Calcul du champ électrostatique à partir du potentiel

Le potentiel dV(M) créé en un point M(0, 0, z) par la charge $dq = \lambda\, dl$ portée par un élément dl de la boucle entourant P (figure ci-dessous) est :

La charge $dq = \lambda_0\, dl = \lambda_0\, Rd\theta$ crée en M le potentiel V(M) :

$$dV(M) = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{PM}\right\|} = \frac{\lambda_0}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{dl}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}$$



avec,

$$dl = Rd\theta \text{ et } \left\|\overrightarrow{PM}\right\| = (R^2 + z^2)^{1/2}$$

Le potentiel V(M) est obtenu par intégration sur le contour C de la boucle :

$$V(M) = \oint_C dV(M) = \frac{\lambda_0 R}{4\Pi\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}}\int_0^{2\Pi} d\theta$$

Ce qui donne :

$$V(M) = \frac{\lambda_0 R}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} = V(0,0,z) = V(0,0,-z)$$

Le champ $E(M)$ est déduit du potentiel par dérivation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) = -\frac{dV}{dz}\vec{k} = \frac{\lambda_0 R z}{2\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k} = \vec{E}(0,0,z) = -\vec{E}(0,0,-z)$$

b) Calcul direct du champ en un point M(0,0,z)

Examinons d'abord la symétrie du problème : la distribution présente une symétrie de révolution autour de $\overrightarrow{z'z}$. Tout plan contenant l'axe $\overrightarrow{z'z}$ est un plan de symétrie paire de la distribution. Donc le champ $\vec{E}$ en un point de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ est porté par $\vec{k}$:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(0,0,z) = E(z)$$

La charge $dq = \lambda_0\, dl = \lambda_0\, Rd\theta$ crée en M le champ $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = E_z\vec{k}$$

Le champ $\vec{E}(M)$ étant porté par $\vec{k}$, seule la composante dE_z est à considérer :

$$dE_z = d\vec{E}.\vec{k} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}.\vec{k}}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{(R^2+z^2)^{1/2}\cos\alpha}{(R^2+z^2)^{3/2}} \text{ avec, } \cos\alpha = \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E}(M) = \int_{\theta=0}^{\theta=\Pi} dE_z\vec{k} = \frac{\lambda_0 R z}{2\Pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$$

Exercice N°4 : Boucle circulaire portant une chargée non uniforme

On considère à nouveau la boucle circulaire de centre O, de rayon R, cette fois chargée avec une densité linéique de charge λ : $\lambda(P) = \lambda_0 \sin\theta$ où $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$.

Déterminer le potentiel et le champ électrostatique crées par cette répartition de charges en tout point M de l'axe de la boucle.

Correction de l'exercice N°4

1- Calcul du potentiel

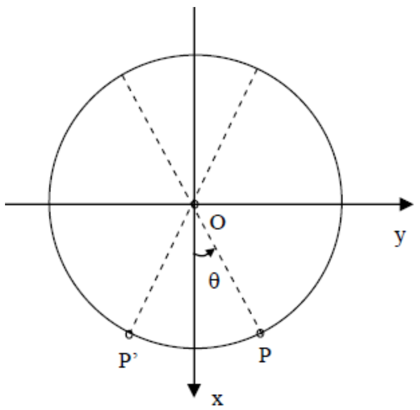
Le potentiel V(M) en un point M de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ de la boucle :

$$V(M) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\Pi} \frac{(\lambda_0 \sin\theta)R d\theta}{2\Pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}} = 0$$

Le potentiel $V(M) = V(0,0,z)$ en tout point de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ est constant et a une valeur nulle. D'après la relation $= -\vec{E}.d\vec{r}$, on en déduit que le champ $\vec{E}(M)$ est normal à l'axe $\overrightarrow{z'z}$.

2- Champ électrostatique crée par la boucle

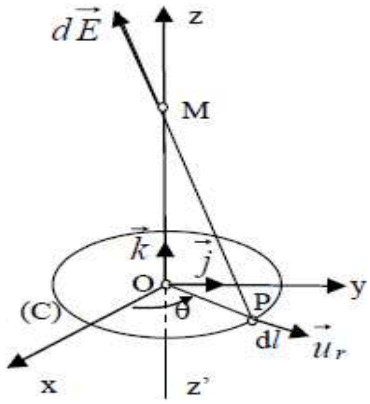
Le plan $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}\ )$ passant par l'axe $\overrightarrow{z'z}$ de la boucle est un plan de symétrie **impaire** (figure ci-dessous) :



$$\lambda(P') = -\lambda(P)$$

Le champ $\vec{E}(M) = \vec{E}(0,0,z)$ est normal à ce plan : $\vec{E}(M) = E(z)\vec{j}$

Le champ $d\vec{E}(M)$ créé par la charge $dq = \lambda \sin\theta\, dl$ entourant le point P (figure ci-dessous) est :



$$d\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0 \sin\theta\, dl}{4\Pi\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\overrightarrow{PM}$$

Calculons la composante $d\vec{E}_y(M)$:

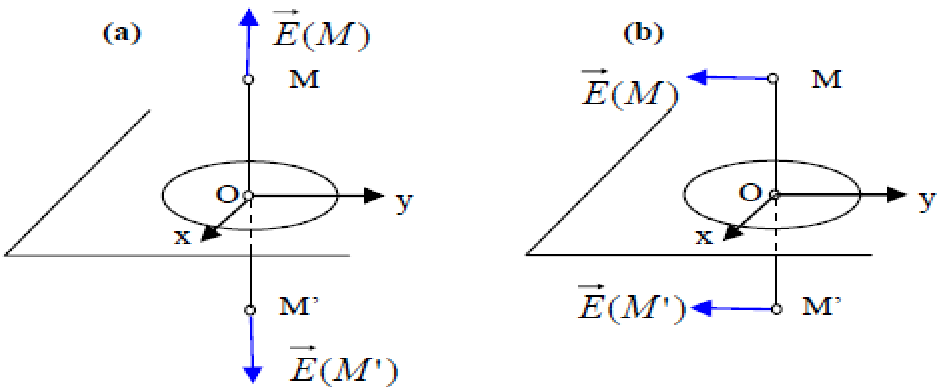
$$\overrightarrow{PM}.\vec{j} = (-R\vec{u}_r + z\vec{k}).\vec{j} = -R\sin\theta$$

$$\vec{E}(M) = -\vec{j}\frac{\lambda_0 R^2}{4\Pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\Pi}\sin^2\theta\, d\theta = -\frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = -\frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\vec{j} = \vec{E}(0,0,z) = \vec{E}(0,0,-z)}$$

3 Remarque

Le plan xOy est un plan de symétrie (plan où se trouve la boucle chargée). Nous avons obtenu, comme on s'y **attend**, que le potentiel en M, $V(M) = V(0,0,z)$ est égal au potentiel en M'(0,0,-z) symétrique de M par rapport au plan (xOy) (figure ci-dessous).



Quant au champ électrostatique, on obtient bien :

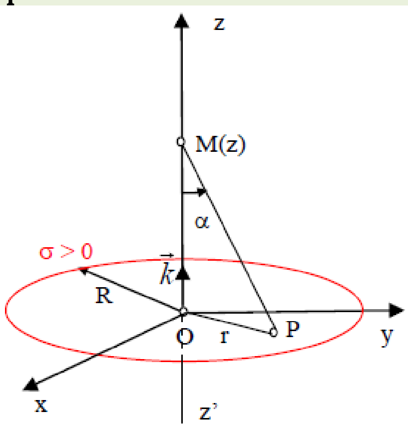
* $\vec{E}(M) = -\vec{E}(M')$ quant le champ est normal au plan de symétrie (figure ci-dessus a).
* $\vec{E}(M) = \vec{E}(M')$ quant le champ est parallèle au plan de symétrie (figure ci-dessus-b).

Exercice N°5 : Disque uniformément chargé avec la densité superficielle uniforme

Soit un disque de centre O, de rayon R, uniformément chargé avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$. Calculer le champ $\vec{E}$ créé par cette distribution de charges en un point M de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ du disque :

1- A partir du potentiel électrostatique

2- directement



Correction de l'exercice N°5

a) Calcul du champ électrostatique à partir du potentiel

Le potentiel dV(M) crée en un point M(0,0,z) par la charge $dq = \sigma\, dS$ entourant le point P (figure ci-dessus) est :

La charge $dq = \sigma\, dS$ crée en M le potentiel V(M) s'écrit :

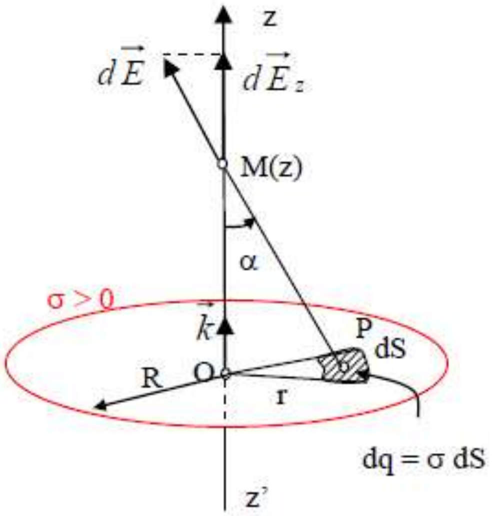
$$dV(M) = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{PM}\right\|} = \frac{\sigma\, dS}{4\Pi\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{PM}\right\|}$$

$$\text{avec, } dS = r dr d\theta \text{ et } \left\|\overrightarrow{PM}\right\| = (r^2 + z^2)^{1/2}$$

Ce qui donne :

$$dV(M) = \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{r\, dr d\theta}{(r^2+z^2)^{1/2}}$$

Le potentiel V(M) est obtenu par intégration sur la surface du disque :



$$V(M) = \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0} \int_{\theta=0}^{2\Pi} \int_{r=0}^{r=R} \frac{r dr d\theta}{(R^2+z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[(r^2+z^2)^{1/2} \right]_{r=0}^{r=R}$$

$$\boxed{V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[(R^2+z^2)^{1/2} - |z| \right] = V(0,0,z) = V(0,0,-z)}$$

Le champ $\vec{E}(M)$ est déduit du potentiel par dérivation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad} V(M) = -\frac{dV}{dz}\vec{k}$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right] \vec{k} = \vec{E}(0,0,z) = -\vec{E}(0,0,-z)}$$

c) Calcul direct du champ en un point M(0,0,z)

Examinons d'abord la symétrie du problème : la distribution présente une symétrie de révolution autour de $\overrightarrow{z'z}$. Tout plan contenant l'axe $\overrightarrow{z'z}$ est un plan de symétrie paire de la distribution. Donc le champ E en un point M de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ est porté par k :

$$E(M) = E(0,0,z) = E(z)\, k$$

Un élément de charge $dq = \sigma dS$, centré en P (figure ci-dessus), crée en un point M de l'axe du disque un champ élémentaire $d\vec{E}$ donné par :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}$$

$$dS = \rho d\rho d\theta \ ; \ \left\|\overrightarrow{PM}\right\| = \sqrt{\rho^2 + z^2} \ ; \ \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}$$

Le disque chargé présente une symétrie de révolution autour de son axe, par exemple l'axe z'z, le champ est alors porté par cet axe. On a :

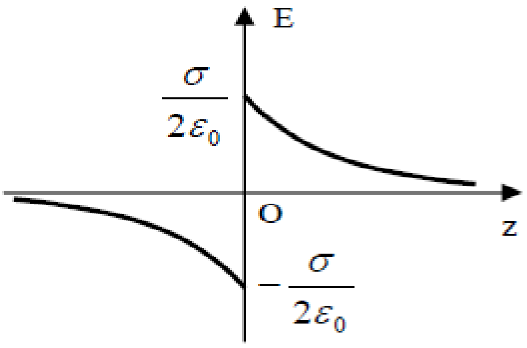
$$d\vec{E} = \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)}\vec{u}$$

avec, ρ variable radiale cylindrique

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)}\cos\alpha\vec{u}_z \\
&= \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)}\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\vec{u}_z \\
&= \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0} z\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\left(\int_0^{2\Pi} d\theta\right)\vec{u}_z \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]\vec{u}_z
\end{aligned}$$

soit,

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]\vec{u}_z$$



Loin du disque (z grand), le champ s'affaiblit (figure 14).

Cas limites

• Si le point M est très éloigné du disque, c'est à dire : $|z| >> R$, on aura alors :

$$\begin{aligned}
\vec{E}(M) &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z/|z|}{(1 + R^2/z^2)^{1/2}}\right]\vec{u}_z \\
&\cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\left[1 - (1 - \frac{R^2}{2z^2})\right]\vec{u}_z \\
&\cong \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 z^2}\frac{z}{|z|}\vec{u}_z = \frac{\sigma\Pi R^2}{4\Pi\varepsilon_0 z^2}\frac{z}{|z|}\vec{u}_z
\end{aligned}$$

C'est l'expression du champ créé en M par une charge $Q = \sigma\Pi R^2$ placée en O.

• Si le point M est très proche du disque, c'est à dire $|z| << R$, on aura :

$$\vec{E}(M) \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{u}_z$$

C'est l'expression du champ créé en M par un plan (infini) uniformément chargé :

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z & \text{du côté des z positifs} \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z & \text{du côté des z négatifs} \end{cases}$$

Conséquence

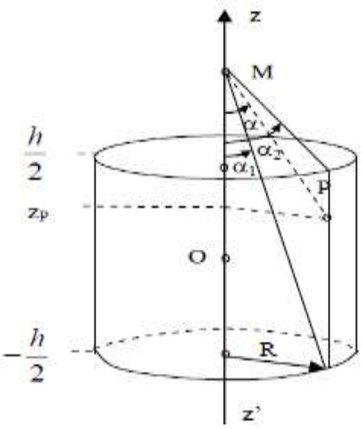
A la traversée du disque, le champ normal au disque subit une discontinuité égale à :

$$E_{z>0} - E_{z<0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Ce résultat est valable pour n'importe quelle distribution de charges en surface, uniforme ou non : si σ est la densité locale d'une distribution surfacique quelconque de charges, il y a en ce point un changement brutal (discontinuité égale à $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$) de la composante du champ électrostatique perpendiculaire à la surface.

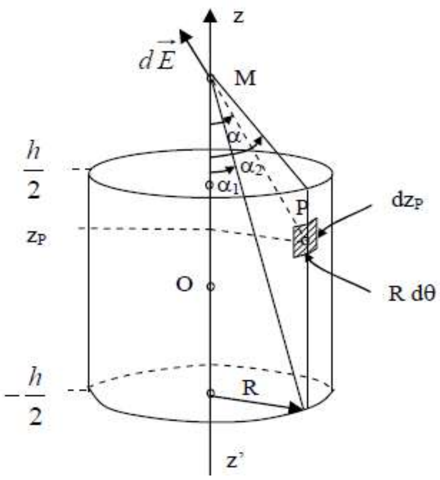
Exercice N°6 : *Cylindre uniformément chargé en surface latérale avec une densité superficielle uniforme*

On considère un cylindre d'axe z'z et tel que l'origine O soit confondu avec son centre. Ce cylindre est uniformément chargé sur sa surface latérale avec une densité superficielle uniforme $\sigma > 0$. Calculer le champ électrostatique en un point M de l'axe du cylindre.



Correction de l'exercice N°6

Un élément de charge dq porté par un élément de surface $S_P = Rd\theta dz_P$, centré en P de cote z_P $(-\frac{h}{2} \leq z_p \leq \frac{h}{2})$, crée en M un champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}$ s'écrivant (figure ci-dessus) :



$$d\vec{E} = \frac{\sigma dS_P}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = \frac{\sigma R}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{dz_P d\theta}{(R^2 + (z - z_P)^2)}\vec{u}$$

avec, $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}$

La symétrie de révolution par rapport à l'axe z'z impose que le champ $\vec{E}$ soit porté par cet axe :

$$d\vec{E}_z(M) = \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{dz_P d\theta}{(R^2+(z-z_P)^2)}\cos\alpha\vec{u}_z$$
$$= \frac{\sigma R}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{(z-z_P)dz_P d\theta}{(R^2+(z-z_P)^2)^{3/2}}\vec{u}_z$$
$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-h/2}^{+h/2}\frac{(z-z_P)}{(R^2+(z-z_P)^2)^{3/2}}dz_P(\int_0^{2\Pi}d\theta)\vec{u}_z$$
$$= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\int_{-h/2}^{+h/2}\frac{(z-z_P)}{(R^2+(z-z_P)^2)^{3/2}}dz_P\vec{u}_z$$
$$= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+(z-z_P)^2}}\right]_{-h/2}^{+h/2}\vec{u}_z$$

soit,

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+(z-h/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(z+h/2)^2}}\right]\vec{u}_z$$

Cas limites

• Si le point M est très éloigné du cylindre ($|z| >> h, |z| >> R$), le champ $\vec{E}$ sera approximativement donné par :

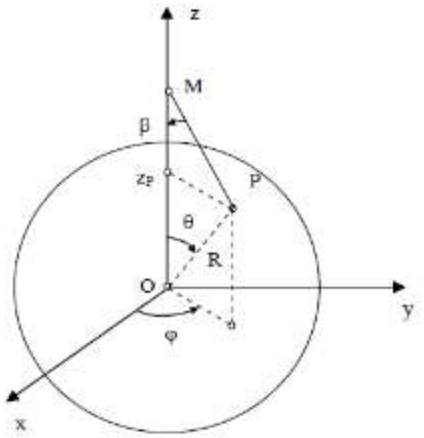
$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2(1-h/z)}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2(1+h/z)}}\right]\vec{u}_z$$
$$= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0|z|}\left[\left(1-\frac{h}{z}+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} - \left(1+\frac{h}{z}+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2}\right]\vec{u}_z$$
$$\cong \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0|z|}\left[1+\frac{h}{2z}-\frac{R^2}{2z^2}-1+\frac{h}{z}+\frac{R^2}{2z^2}\right]\vec{u}_z$$
$$\cong \frac{\sigma Rh}{2\varepsilon_0|z|z}\vec{u}_z$$
$$\cong \frac{\sigma 2\Pi Rh}{4\Pi\varepsilon_0 z^2}\frac{z}{|z|}\vec{u}_z$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par une charge $Q = \sigma\, 2\pi Rh$ concentrée en O.

• Si le point M est au centre géométrique O du cylindre (z = 0), ou encore si le cylindre est infiniment long ($h >> z$), $\vec{E} = \vec{0}$. Ce résultat est prévisible d'après la symétrie, par rapport à ce point, présenté par le cylindre chargé.

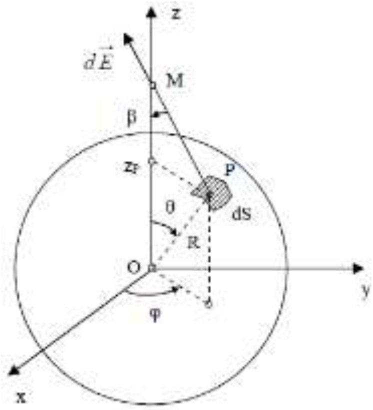
Exercice N°7 : Sphère uniformément chargée en surface

Soit une sphère de centre O, de rayon R et uniformément chargée en surface avec la densité superficielle σ (σ > 0). Choisissons le système d'axes (Oxyz) tel que l'axe Oz soit confondu avec (OM). Calculer le champ électrostatique en un point M de l'axe Oz.



Correction de l'exercice N°7

Dans ce cas, deux éléments de charges dq et dq' symétriques par rapport à l'axe z'z créent en M deux champs élémentaires dont la résultante est portée par cet axe (figure ci-dessus) : $\vec{E} = E_z\vec{k}$.



$$dE_z = dE\cos\beta = \frac{dq\cos\beta}{4\Pi\varepsilon_0\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{\sigma R^2\sin\theta d\theta d\varphi}{4\Pi\varepsilon_0\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}\cos\beta$$

d'autre part,

$$\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2 = z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta$$

$$R^2 = z^2 + \left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2 - 2z\left\|\overrightarrow{PM}\right\|\cos\theta$$

$$E_z = \frac{\sigma R^2 2\Pi}{8\Pi\varepsilon_0 z}\left((z^2 - R^2)\int_0^{\Pi}\frac{\sin\theta d\theta}{(z^2+R^2-2Rz\cos\theta)^{3/2}} + \int_0^{\Pi}\frac{\sin\theta d\theta}{(z^2+R^2-2Rz\cos\theta)^{1/2}}\right)$$

on a :

$$\int_0^{\Pi}\frac{\sin\theta d\theta}{(z^2+R^2-2Rz\cos\theta)^{3/2}} = -\frac{1}{Rz}\left[\frac{1}{(z^2+R^2-2Rz\cos\theta)^{1/2}}\right]_0^{\Pi} = -\frac{1}{Rz}\left(\frac{1}{|z+R|} - \frac{1}{|z-R|}\right)$$

$$\int_0^{\Pi}\frac{\sin\theta d\theta}{(z^2+R^2-2Rz\cos\theta)^{1/2}} = \frac{1}{Rz}\left[(z^2+R^2-2Rz\cos\theta)^{1/2}\right]_0^{\Pi} = \frac{1}{Rz}\left((z+R) - |z-R|\right)$$

Il résulte que :

$$E_z = \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0 z^2}\left(\frac{z^2-R^2}{|z-R|} - \frac{z^2-R^2}{z+R} + z + R - |z-R|\right)$$

$$= \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0 z^2}\left(\frac{z^2-R^2}{|z-R|} + 2R - |z-R|\right)$$

- Si M est à l'intérieur de la sphère ($z < R$) : $E_z = 0$
- Si M est à l'extérieur de la sphère ($z > R$) : $E_z = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 z^2}$

On constate que le champ E est nul à l'intérieur de la sphère et qu'il présente une discontinuité égale à $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ à la traversée de la sphère chargée en surface. A l'extérieur de la sphère le champ est équivalent à celui créé en M par une charge $Q = \sigma\, 4\pi R^2$ concentrée en O.

Calcul du champ et du potentiel électrostatique crées par une distribution continue de charges à partir du théorème de Gauss

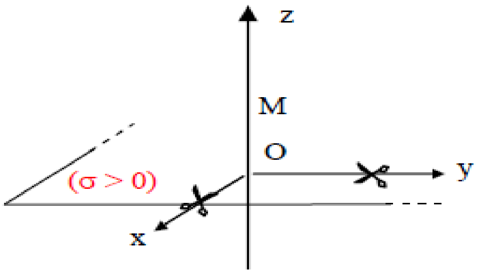
Exercice N°8 : *Nappe chargée uniformément en surface*

Soit un plan **uniformément** avec une densité surfacique $\sigma > 0$ (nappe chargée) de dimension **infinie** et contenue dans le plan xOy. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

Correction de l'exercice N°8

a) Variable dont dépend $\vec{E}$ et sa direction

La nappe chargée en surface est contenue dans le plan (xOy) comme le montre la figure 1.



* La plan chargé est invariant par translations suivant Ox et Oy. Le système des coordonnées le plus adapté au calcul de $\vec{E}$ est le système cartésien de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Le champ $\vec{E}$ est indépendant de x et y : $\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(z)$.

* Le plan $\Pi_1 = (M, \vec{\jmath}, \vec{k})$ passant par M et perpendiculaire à (Ox) est un psp (plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_1$ ainsi : $\vec{E} = \vec{E_y} + \vec{E_z}$.

* Le plan $\Pi_2 = (M, \vec{\imath}, \vec{k})$ passant par M et perpendiculaire à (Oy) est un psp (plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_2 \in \Pi$ ainsi : $\vec{E} = \vec{E_x} + \vec{E_z}$

Ainsi, $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$

D'où : $\vec{E} = E(z)\,\vec{k}$

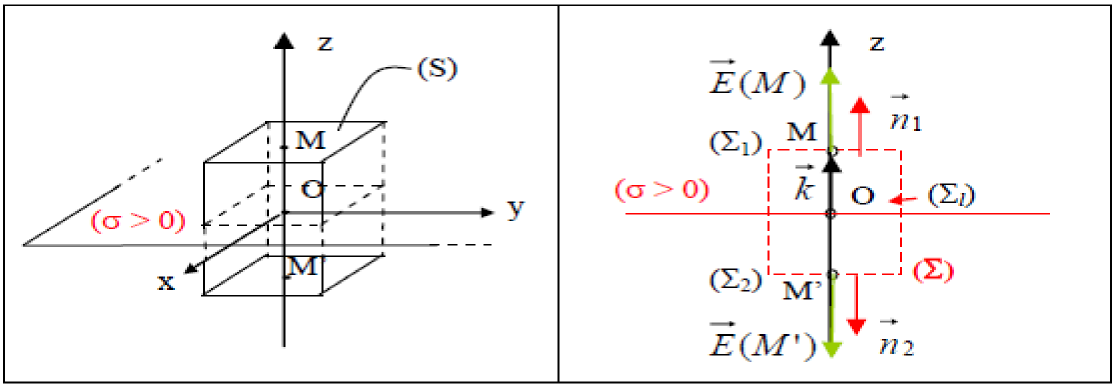
De plus, le plan chargé xOy étant un **plan de symétrie paire**, le champ $\vec{E}$ en un point M′ symétrique de M par rapport à ce plan est :

$\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$ avec , $\vec{E}(M') = \vec{E}(-z) = \vec{E}(-z)\vec{k}$ et $\vec{E}(M) = \vec{E}(z) = E(z)\,\vec{k}$

Ainsi, $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$

b) Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

Tenant compte de la **symétrie** de la distribution plane de charge, nous choisissons comme surface fermée **Σ** le **parallélépipède droit**, dont les génératrices sont **normales** au plan chargé, fermé par **deux sections droites** notées Σ_1 et Σ_2 d'aire **S**, passant respectivement par **M(x, y, z)** et par **M'(x, y, -z)** le symétrique de M par rapport au plan xOy (figure 2).



Le flux E sortant de la surface **latérale** Σ_l du cylindre est **nul**, car en tout point de Σ_l, $\vec{E}.\,d\vec{\Sigma_l} = 0$

Le flux sortant de **Σ** se réduit au flux sortant de Σ_1 et Σ_2 :

$$\Phi = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E}(M).d\vec{\Sigma}_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}(M').d\vec{\Sigma}_2$$

$$\Phi = E(z)(\vec{k}.\vec{n}_1)\iint_{\Sigma_1} d\vec{S}_1 + E(-z)(\vec{k}.\vec{n}_2)\iint_{\Sigma_2} d\vec{S}_2$$

Avec, $(\vec{k}.\vec{n}_1) = 1$; $(\vec{k}.\vec{n}_2) = -1$ et $\iint_{\Sigma_1} d\vec{S}_1 = \iint_{\Sigma_2} d\vec{S}_2 = S$

$$\Phi = \left[E(z) - E(-z)\right]S \quad \text{avec } E(-z) = -E(z)$$

$$\Phi = 2E(z)S$$

La charge à l'intérieure de la surface de Gauss est :

$$Q_{int} = \iint_S \sigma d\vec{S} = \sigma\, S$$

D'après le théorème de Gauss :

$$2E(z)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

D'où le champ $\vec{E}$

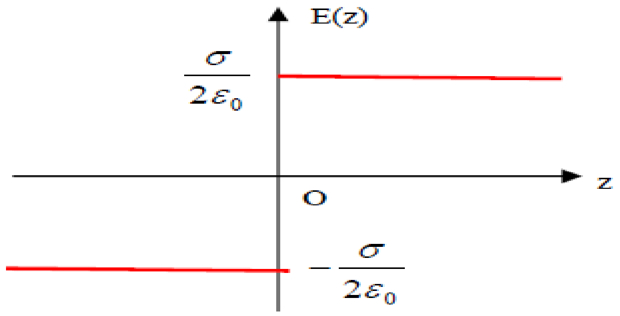
- pour z > 0 : $\vec{E} = +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$
- pour z < 0 : $\vec{E} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$

Ces deux résultats peuvent être **condensés** sous la forme :

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{k} \quad (z \neq 0)$$

Ce résultat peut être retrouvé en choisissant comme surface de Gauss **Σ** la surface fermée formé par le **cylindre droit**, dont les génératrices sont **normales** au plan chargé, fermé par **deux sections droites** d'aire **S**, passant par **M(x, y, z)** et par **M'(x, y, -z)**.

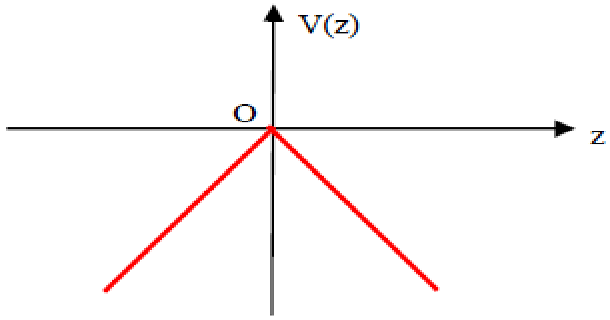
Le champ $\vec{E}$ change de sens à la traversée de la nappe chargée et subit une **discontinuité** égale à $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (figure 3).



En réalité, il n'existe pas de distribution plane de dimensions **infinies.** Cependant, la distribution plane est considérée comme infinie si on ne considère que des points placés **loin des bords** de la distribution, c'est à dire des points dont la **distance** à la surface chargée est **petite par rapport aux dimensions de celle-ci.**

c) Calcul du potentiel électrostatique V(M)

En choisissant l'origine des potentiels dans le plan xOy : $V\ (z\ =\ 0)\ =\ 0$



$$V(z) = \int_0^z dV = -\int_0^z \vec{E}.d\vec{l} \text{ avec, } d\vec{l} = dz\vec{k}$$

Pour z > 0 : $V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^z dz = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z$

Pour z < 0 : $V(z) = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^z dz = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z$

Soit,

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|$$

A la traversée du plan chargé, le potentiel y est **continu** (figure 4).

Exercice N°9 : *Cylindre chargé uniformément en surface*

Soit un cylindre (C) d'axe $\overrightarrow{z'z}$, de rayon R, de longueur **infinie**, uniformément chargé avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

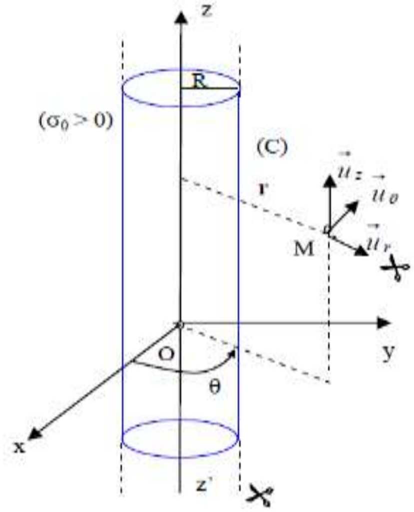
Correction de l'exercice N°9

a) Variable dont dépend $\vec{E}$ et sa direction

* Le cylindre chargé a un axe de révolution Oz (figure 5). Le système de coordonnées le plus adapté est le système cylindrique de base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$. Cette distribution de charge est invariante par translation suivant Oz et par rotation d'angle θ autour de Oz.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r)$$

* Le plan $\Pi_1 = (M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$passant par M et l'axe (Oz) est un psp (plan de symétrie pair.
$\vec{E} \in \Pi_1$ ainsi : $\vec{E} = \overrightarrow{E_r} + \overrightarrow{E_z}$.
* Le plan $\Pi_2 = (M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ passant par M et perpendiculaire à (Oz) est un psp (plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_2$ ainsi : $\vec{E} = \overrightarrow{E_r} + \overrightarrow{E_\theta}$
Ainsi, $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$
D'où, le champ est radial :
D'où : $\vec{E} = E(r)\,\overrightarrow{u_r}$

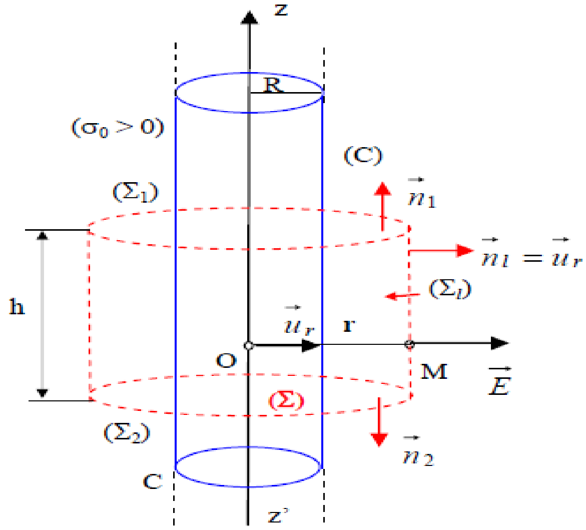


Le système possède une symétrie de **révolution** par rapport à l'axe $z'z$ et de **translation** parallèlement à cet axe : le champ E en un point M situé à la distance r de l'axe est donc de la forme :

$$\vec{E}(M) = E(r)\,\overrightarrow{u_r}$$

a) Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

La surface fermée Σ que nous choisissons pour calculer le flux de E est une surface de même type que la surface chargée constitué d'un cylindre d'axe $\overrightarrow{z'z}$, de rayon r, de hauteur h (figure 6).



Le flux de $\vec{E}$ à travers la surface de Gauss s'écrit :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{\Sigma} \text{ avec, } d\vec{\Sigma}_l = r d\theta dz \vec{u}_r \text{ et } d\vec{\Sigma}_1 = d\vec{\Sigma}_1 = r dr d\theta \vec{k}_r$$

$$\Phi = \iint_{\Sigma_1} \vec{E}.d\vec{\Sigma}_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}.d\vec{\Sigma}_2 + \iint_{\Sigma_l} \vec{E}.d\vec{\Sigma}_l$$

Le flux de $\vec{E} = E(r)\vec{u_r}$ à travers les surfaces **planes** Σ_1 et Σ_2 étant **nul** (en tout point de ces surfaces, on a $\vec{E}(r) \perp \vec{n_1}$ et $\vec{E}(r) \perp \vec{n_2}$). Le flux sortant de Σ se réduit à :

$$\Phi = \iint_{\Sigma_1} (E(r)\vec{u}_r).d\vec{\Sigma}_l \text{ avec, } d\vec{\Sigma}_l = r d\theta dz \vec{u}_r$$

avec, Σ_1 : surface latérale de Σ

Puisque E(r) et r sont des constantes, on a :

$$\Phi = E(r) r \int_0^{2\Pi} d\theta \int_0^h dz = 2\Pi r h E(r)$$

Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\phi = 2\Pi r h E(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

<u>* Si M est **extérieur** au cylindre chargé (C) : r > R</u>

La charge à l'intérieur du cylindre Σ de rayon r > R :

$$Q_{int} = \iint_S \sigma dS \text{ avec, } dS = R d\theta dz$$

Puisque σ est uniforme, on a :

$$Q_{int} = \sigma R \int_0^{2\Pi} d\theta \int_0^h dz = 2\Pi R h \sigma$$

(surface latérale * σ)

Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$\phi = 2\Pi r h E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} 2\Pi R h \sigma$$

En simplifiant par (2 π h), la norme du champ électrostatique E(r) :

$$E(r > R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

Par raison de symétrie, on sait que $\vec{E}(M)$ est porté par $\vec{u_r}$. On obtient finalement :

$$\vec{E}(r > R) = \frac{\sigma_0 R}{\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r} \qquad (3\text{-}19)$$

* Si M est intérieur au cylindre chargé (C) : r < R

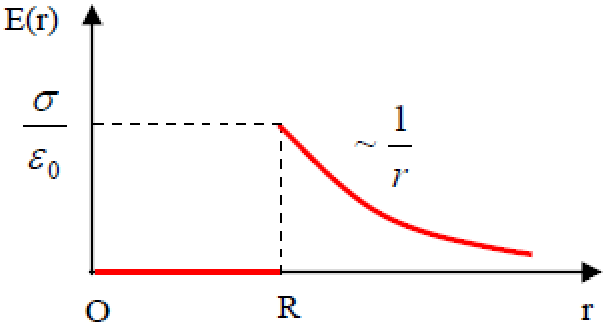
Dans ce cas, la charge à l'intérieur du cylindre Σ de rayon r < R étant **nulle**,

$$Q_{\text{int}} = 0$$

Il s'ensuit, d'après le théorème de Gauss, que la norme du champ est nulle : E(r) = 0

Ce qui conduit à : $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$

Le champ $\vec{E}$ normal à la surface chargée, subit une **discontinuité** égale à σ_0 / ε_0 (figure 7).



b) Calcul du potentiel électrostatique V(M)

$$V(r) = -\int \vec{E}.\vec{dl} \text{ avec, } \vec{dl} = dr\vec{u}_r$$

D'où :

$$V(r) = -\int E(r)dr$$

* Si M est à l'extérieur du cylindre : r ≥ R

$$V(r) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r} = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Log r + cste$$

Dans le cas d'une distribution surfacique portée par le cylindre infiniment long, on prendra l'origine des potentiels, à une distance finie r_0 de l'axe du cylindre (par exemple r0 > R ; $V(r_0) = 0$)

$$V(r = r_0) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Log r_0 + cste = 0$$

$$cste = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Log r_0$$

$$V(r \geq R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Log \frac{r_0}{r}$$

* Si M est à l'intérieur du cylindre : r ≤ R

$$V(r \ \leq) = cste$$

La constante est déterminée par continuité du potentiel en r = R :

$$V(r \geq R)_{r=R} = V(r \leq R)_{r=R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Log \frac{r_0}{R}$$

Exercice N°10 : Sphère chargée uniformément en surface

On considère une sphère (S) de centre O et de rayon R, chargée en surface de densité surfacique de charge σ uniforme. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

Correction de l'exercice N°10

a) Variable dont dépend $\vec{E}$ et sa direction

* La sphère chargée est invariante par double rotation l'une d'angle θ autour de $\vec{u_z}$ et l'autre d'angle φ autour de $\vec{u_\varphi}$: on dit que la sphère a le point O comme centre de symétrie (figure 8). Le système de coordonnées le plus adapté est le système sphériques de base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi})$.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r,\theta,\varphi) = \vec{E}(r)$$

* Le plan méridien $\Pi_1 = (M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ est un psp (plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_1$ ainsi :

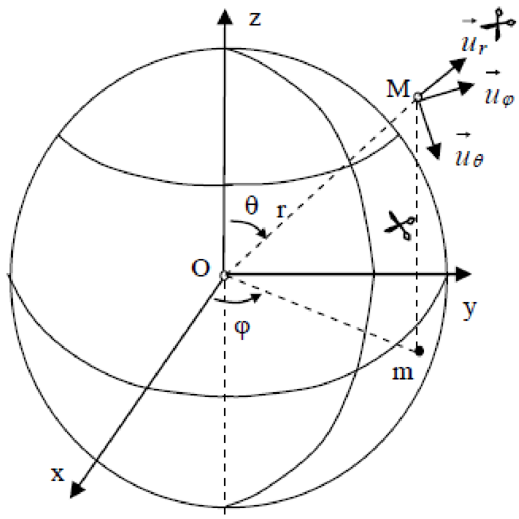
$$\vec{E} = \vec{E_r} + \vec{E_\theta}$$

* Le plan $\Pi_2 = (M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ passant par M et perpendiculaire à (Oz) est un psp (plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_2$ ainsi : $\vec{E} = \vec{E_r} + \vec{E_\theta}$

Ainsi, $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$

D'où, le champ est radial : $\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}$

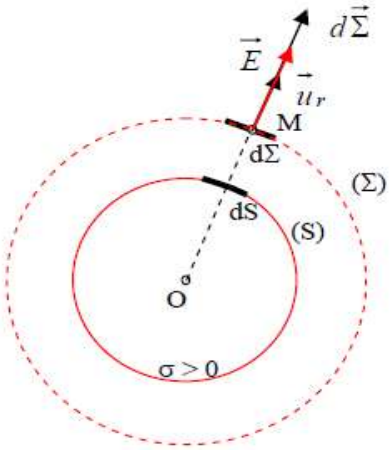
avec $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$



Le champ $\vec{E}$ créé par cette distribution à **symétrie sphérique**, en un point M est porté par le vecteur $\vec{u_r}$ et ne dépend que de la variable d'espace $= \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.

b) Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

La surface fermée Σ que nous choisissons pour calculer le flux de $\vec{E}$ est une sphère de centre O, de rayon r : surface de même type que la surface chargée (figure 9). Le flux de $\vec{E}$ à travers Σ est donné par :$\Phi = \oiint_\Sigma \vec{E}.d\vec{\Sigma}$



Avec ,

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r \text{ et } d\vec{\Sigma} = d\Sigma\,\vec{u}_r = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \vec{u}_r$$

Le champ E est en tout point de Σ porté par la normale « sortante » $\vec{u_r}$ et sa norme est **constante** en tout point de Σ.

$$\Phi = E(r)r^2 \int_0^{\Pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\Pi} d\varphi = 2\Pi E(r) r^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\Pi}$$
$$= 4\Pi r^2 E(r)$$

Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\Phi = 4\Pi r^2 E(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss Σ dépend de la position de M. Deux cas peuvent être distingués : M est extérieur à la sphère chargé (S) ou M est intérieur à (S).

* M est extérieur à (S) : r > R

La charge à l'intérieur de la sphère Σ de rayon r > R est :

$$Q_{int} = \iint_S \sigma\, dS \text{ avec, } dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Puisque σ est uniforme, on a :

$$Q_{int} = \sigma R^2 \int_0^{\Pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\Pi} d\varphi = 4\Pi R^2 \sigma$$ (surface d'une sphère * σ)

Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$\Phi = 4\Pi r^2 E(r) = \frac{4\Pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0}$$

En simplifiant par (4π), la norme du champ s'écrit :

$$E(r > R) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Par raison de symétrie, le champ $\vec{E}(M)$ est porté par $\vec{u_r}$. On obtient finalement :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} \qquad (3\text{-}14)}$$

si on pose : $Q = \iint_S \sigma\, dS = 4\Pi R^2 \sigma$

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

Le champ est **identique** au champ créé en M par une charge **ponctuelle** égale à la charge totale de la sphère, Q concentrée en O.

<u>* M est intérieur à (S) : r < R</u>

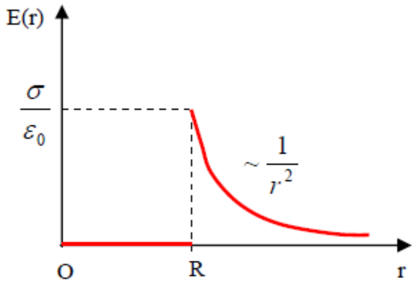
Dans ce cas, la charge à l'intérieur de la sphère de rayon r < R est nulle : $\boldsymbol{Q_{int} = 0}$

Le théorème de Gauss conduit à : $\Phi = 4\pi r^2 E(r) = 0$

Ainsi, la norme de champ est nulle : E(r < R) = 0

Ce qui implique que : $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$

Le champ électrostatique E(r) subit à la traversée de la surface chargée une **discontinuité** égale à 0 σ / ε_0 (figure 10).



c) Calcul du potentiel électrostatique V(M) : $\vec{E} = E(r)\vec{u_r} = -gradV(M)$

Ce qui donne en projetant sur $\vec{u_r}$: $E = \vec{E}.\vec{u_r} = -\frac{dV}{dr}$

D'où, $V(M) = -\int E(r)dr$

<u>* M est extérieur à (S) : r ≥ R</u>

Le potentiel en M est : $V(M) = -\int E(r)dr = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + cste$

En choisissant **l'origine** des potentiels à l'infini ($V(r = \infty) = 0$), on obtient :

Le potentiel est **identique** au potentiel créé en M par une charge **ponctuelle** égale à la charge totale de la sphère, Q.

<u>* M est intérieur à (S) : r ≤ R</u>

Le champ en tout point **intérieur** à S est **nul** ; le potentiel est donc constant : $V(r \leq R) = cste$

Pour déterminer la constante nous pouvons utiliser la **continuité** du potentiel pour r = R :

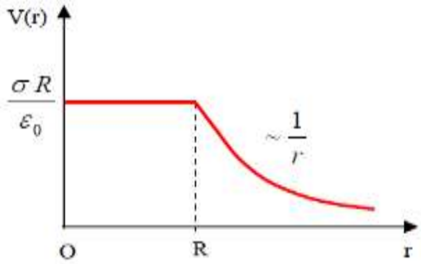
$$V(r \leq R)_{r=R} = V(r \geq R)_{r=R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

Nous pouvons retrouver cette **constante** en écrivant : $V(r \leq R) = V(r = 0)$

avec, V(r=0) est le potentiel **au centre O** de la sphère S obtenu à partir d'un calcul direct suivant la relation : $dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$ avec $r = \|\overrightarrow{PM}\| = R$:

$$V(r \leq R) = V(r=0) = dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

Alors que le champ est discontinu à la traversée de la charge (figure 10), le potentiel électrostatique est **continu** (figure 11).



Exercice N°11 : Sphère chargée uniformément en volume

On considère une sphère (S) de centre O et de rayon R, chargée en surface de densité volumique de charge ρ uniforme. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

Correction de l'exercice N°11

a) Variable dont dépend $\vec{E}$ et sa direction

Les mêmes considérations de symétrie évoquées précédemment suggèrent que :

$$\vec{E}(M) = E(r)\overrightarrow{u_r}$$

b) Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

Pour une sphère fermé Σ de centre O et de rayon r, le flux sortant est :

$$\Phi = \oiint_\Sigma \vec{E}.d\vec{\Sigma} \text{ avec, } d\vec{\Sigma} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Puisque la norme du champ est constant, le théorème de Gauss s'écrit :

$$\Phi = 4\Pi r^2 E(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

* M est extérieur à (S) : r ≥ R

La charge volumique à l'intérieur d'une sphère de rayon r ≥ R est donnée par :

$$Q = \iiint_V \rho d\tau \text{ avec, } d\tau = R^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$Q = \rho R^2 \int_0^R dr \int_0^\Pi \sin\theta \int_0^{2\Pi} d\varphi = \frac{4}{3}\Pi R^3 \rho$$

Le théorème de Gauss donne :

$$\Phi = 4\Pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\Pi R^3 \rho$$

En simplifiant par (4π), on a :

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Le champ électrostatique est porté par $\overrightarrow{u_r}$ et on a :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r^2} = \frac{Q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

* M est intérieur à (S) : r ≤ R

La charge volumique à l'intérieur d'une sphère de rayon r ≥ R est donnée par :

$$Q = \iiint_V \rho d\tau \text{ avec, } d\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$Q = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\Pi \sin\theta \int_0^{2\Pi} d\varphi = \frac{4}{3}\Pi r^3 \rho$$

Le théorème de Gauss donne :

$$\Phi = 4\Pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\Pi r^3 \rho$$

En simplifiant par $(4\pi r^2)$, on a :

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

Le champ électrostatique est porté par $\overrightarrow{u_r}$ et on a :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r \le R) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \vec{u}_r = \frac{Q}{4\Pi\varepsilon_0 R^3} r \vec{u}_r$$

Remarquons que pour r ≥ R, le champ est le même que si la charge 3 3 $Q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$ était concentrée au centre de la sphère O (figure 12).

<u>c) Calcul du potentiel électrostatique V(M)</u>

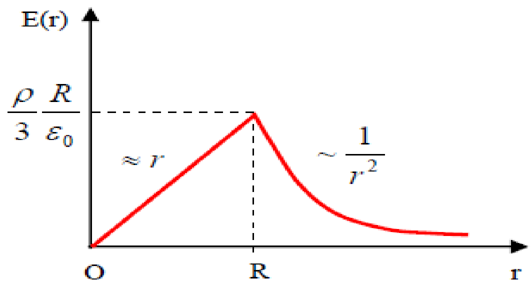
$$V = -\int_\infty^r \vec{E}.d\vec{l}$$

<u>* M est extérieur à (S) : r ≥ R</u>

$$V(M) = V(r \ge R) = -\int_\infty^r \vec{E}_e.d\vec{l} = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{1}{r^2}\vec{u}_r.dr\vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

<u>* M est intérieur à (S) : r ≤ R</u>

$$V(M) = V(r \le R) = -\int \vec{E}_i.d\vec{l} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r\vec{u}_r.dr\vec{u}_r = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^2}{2} + cste$$



Pour déterminer la constante nous pouvons utiliser la **continuité** du potentiel pour r = R :

$$V(r \ge R)_{r=R} = V(r \le R)_{r=R} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}R^2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^2}{2} + cste$$

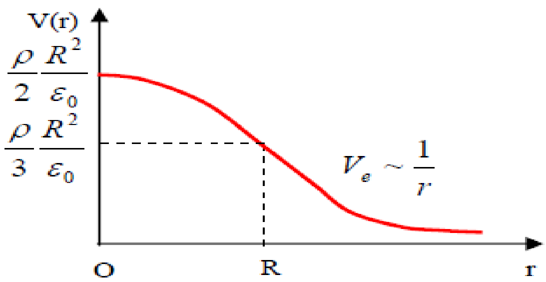
Ce qui donne :

$$cste = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(R^2 + \frac{R^2}{2}) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2$$

d'où,

$$V(M) = V(r \le R) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2 = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

Ainsi pour r ≥ R, le champ et le potentiel sont les mêmes que si toute la charge Q était concentrée en O (figure 13).



Remarque

Le potentiel pour un point M à l'intérieur à Σ peut être également déterminé en écrivant :

$$V(r \le R) = -\int_\infty^r \vec{E}.d\vec{l} = -\int_\infty^R \vec{E}_e.d\vec{l} - \int_R^r \vec{E}_i.d\vec{l} \text{ avec, } \vec{E}_e = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\vec{u}_r \text{ et } \vec{E}_i = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\vec{u}_r$$