Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire
Département de Physique
Safi

Année universitaire : 2018/2019

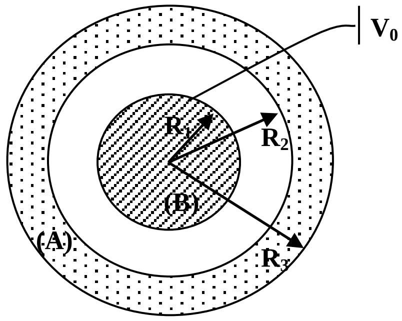
Filière : SMPC – SMIA (S2)

TRAVAUX DIRIGES

Série N° 3 - ELECTRICITE 1

Exercice N°1

Un conducteur sphérique creux A initialement neutre, de rayon intérieur $R_2 = 2R$ et de rayon extérieur $R_3 = 4R$, entoure un deuxième conducteur sphérique B de rayon $R_1 = R$, porté au potentiel V_0 par l'intermédiaire d'un générateur. Le conducteur B porte une charge Q_0 (Figure ci-contre).



1- Quelles sont les charges portées par les surfaces du conducteur A. Justifier.

2- Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace.

3- Soit V_A le potentiel du conducteur A, déterminer le potentiel en tout point de l'espace.

4- Déterminer la capacité du condensateur sphérique ainsi formé.

En déduire la charge Q_0 en fonction de R, V_0 et ε_0.

Correction de l'exercice N°1

Conducteur B porte Q_0, porté au potentiel V_0.

Conducteur A neutre.

1°/ $Q_{A\,int} = -Q_0$ par influence totale. (D'après le Théorème des éléments correspondants)

$Q_{A\,int} + Q_{A\,ext} = 0 \Rightarrow Q_{A\,ext} = Q_0$.

2°/ Le champ $\vec{E}$ en tt pt de l'espace par Th de Gauss :

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(M) = \sum_i \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Si $r < R_1$: $\vec{E}(r<R_1) = \vec{0}$, à l'intérieur du cond B.

Si $R_1 < r < R_2$: $\vec{E}(R_1<r<R_2) = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$; entre les 2 cond.

Si $R_2 < r < R_3$: $\vec{E}(R_2<r<R_3) = \vec{0}$, à l'intérieur du cond A

Si $r > R_3$: $\vec{E}(r>R_3) = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{e_r}}{r^2}$.

3°/ Le potentiel à partir de $\vec{E} = -\vec{grad}\,V = -\frac{dV}{dr}\vec{e_r}$

$$\Rightarrow V(r) = -\int E(r)\,dr + cte$$

Si $r \geq R_3$ $\quad V(r \geq R_3) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte_1$

le potentiel de A est $V_A \Rightarrow cte_1 = V_A - \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon R_3}$

$$\Rightarrow V(r \geq R_3) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{4R}\right) + V_A$$

si $R_2 \leq r \leq R_3$: $\quad V(R_2 \leq r \leq R_3) = V_A$; potentiel du cond A.

si $R_1 \leq r \leq R_2$: $\quad V(R_1 \leq r \leq R_2) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r} + cte_2$

avec $cte_2 = V_A - \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon R_2}$

si $r \leq R_1$ $\quad V(r \leq R_1) = V_0$; potentiel du cond B.

4°/ par continuité du potentiel en $r = R_1$ on aura :

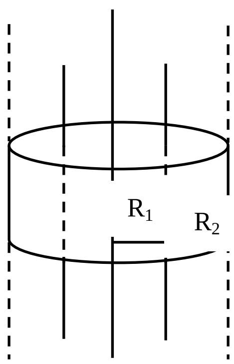
$$V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + V_A - \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \Rightarrow V_0 - V_A = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow V_0 - V_A = \frac{Q_0}{8\pi\varepsilon R} \Rightarrow \boxed{C = 8\pi\varepsilon_0 R} \quad \left(R_1 = R = \frac{R_2}{2}\right)$$

5°/ Pas de charges à l'infini, on peut prendre $V_A = 0$

d'où $\boxed{Q_0 = 8\pi\varepsilon_0 R\, V_0}$

Exercice N°2



Un condensateur cylindrique constitué de deux cylindres supposés infinis, conducteurs coaxiaux de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$). Soit $V_1 - V_2$ la différence de potentiel entre l'armature interne et l'armature externe du conducteur, et q_l la charge de ce conducteur par unité de longueur.

1- Déterminer l'expression du champ électrostatique en un point M situé entre les armatures.

2- En déduire l'expression du potentiel en un point M situé entre les armatures.

3- Exprimer la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre l'armature interne et l'armature externe du conducteur.

4- En déduire l'expression de la capacité C_l par unité de longueur de ce conducteur.

5- En utilisant l'énergie emmagasinée entre les deux armatures, retrouver l'expression de C_l.

Correction de l'exercice N°2

1°/ Pb à symétrie cylindrique $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_\rho$

Th de Gauss appliqué à un cylindre fermé de hauteur h.

$$\iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi r h\, E(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi r \varepsilon_0 h}\,\vec{e}_\rho \;;$$

$(R_1 < r < R_2)$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{q_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{e}_\rho}{r}$$

où q_ℓ : Charge par unité de longueur.

*) Le champ à l'extérieur du condensateur est nul.

2°/ Le Potentiel $V(M)$ à partir de $\vec{E}(r) = -\vec{grad}\,V(M) = -\frac{dV(M)}{dr}\,\vec{e}_\rho$

$$\Rightarrow V(M) = -\int E(r)\,dr + cte = -\frac{q_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\,Ln\, r + cte$$

3°/

On a :

$$V_1 - V_2 = \left(-\frac{q_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\,Ln\,R_1 + cte\right) - \left(-\frac{q_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\,Ln\,R_2 + cte\right)$$

donc :

$$\boxed{V_1 - V_2 = \frac{q_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\,Ln\,\frac{R_2}{R_1}}$$

4°/ on a :

$$C_\ell = \frac{q_\ell}{V_1 - V_2} \Rightarrow C_\ell = \frac{2\pi\varepsilon_0}{Ln(R_2/R_1)}.$$

la capacité du condensateur par unité de longueur

5/ Densité d'énergie électrostatique $\frac{dW}{d\tau} = w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

W_e : énergie par unité de longueur emmagasinée dans le condensateur dans le volume où $E \neq 0$.

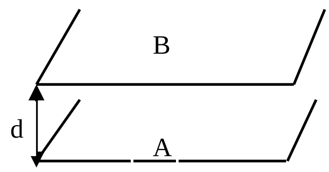
$$W_e = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 r\, dr\, d\varphi$$

$$W_e = 2\pi \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{q_e^2}{(2\pi\varepsilon_0)^2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{q_e^2}{2}\cdot\frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\frac{q_e^2}{C_e}$$

d'où $\boxed{C_e = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$

Exercice N°3

On considère un condensateur constitué de deux armatures planes (A) et (B) parallèles, de même surfaces S et séparées de la distance d. L'armature inférieure (A) porte la charge positive Q.



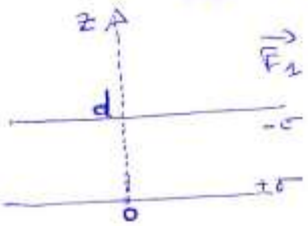
1- Quelle est la charge de l'armature (B) ? Justifier la réponse.
2- En négligeant les effets de bords (en supposant les armatures infinies).
Déterminer le champ $\vec{E}$ entre les armatures (A) et (B) du condensateur.
3- Montrer que la différence de potentiel entre les armatures (A) et (B) est : $V(A) - V(B) = E.d$
4- En déduire la capacité C de ce condensateur plan.
5- Trouver l'énergie W emmagasinée dans ce condensateur.
Retrouver W à partir de la densité d'énergie

Correction de l'exercice N°3

1/ La charge de l'armature B est $-Q$ (Q est la charge de l'armature A) par influence totale.

2/ champ entre les armatures (2 plans infinis de densité σ et $-\sigma$)

Le champ résultant $\vec{E}$ est la somme vectorielle de $\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$: $\vec{E}(M) = \vec{E_1}(M) + \vec{E_2}(M)$



pour $0 < z < d$: $\vec{E} = \vec{E_1}(z>0) + \vec{E_2}(z<d)$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_z} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_z} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_z}$$

d'où $\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\vec{e_z}}$

3°/ A partir de $\vec{E}(M) = -\vec{grad}\, V(M) \Rightarrow E(z)\,\vec{e_z} = -\frac{dV(M)}{dz}\,\vec{e_z}$

$$\Rightarrow -dV(M) = E(z)\,dz \Rightarrow -\int_A^B dV(M) = \int_0^d E\,dz$$

$$\Rightarrow -(V(B) - V(A)) = E(d-0)$$

$$\Rightarrow V(A) - V(B) = E.d = \Delta V$$

4°/ La capacité est donnée par $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{E.d} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\,d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$

5°/ L'énergie électrostatique est donnée par :

$$W = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

d'où $\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}.d}$

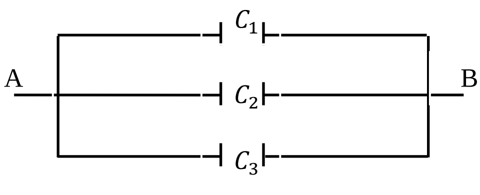
6°/ $dW = \omega . d\tau = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S^2}\right)}_{=ct} d\tau \Rightarrow W = \omega.\tau$ où

$\tau = S\,d$ = volume entre les armatures = espace où $E \neq 0$

$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}\,d}$ $\quad W = \iiint_{\text{espace où } E\neq 0} dW$

Exercice N°4

On considère les trois condensateurs de la figure ci-contre, de capacités C_1, C_2 et C_3 chargés sous une différence de potentiel $V_A - V_B = 5$ V.



On donne : $C_1 = 5\ \mu F$, $C_2 = 10\ \mu F$ et $C_3 = 15\ \mu F$.

1- Calculer les charges Q_1, Q_2 et Q_3 des condensateurs de capacités respectives C_1, C_2 et C_3.

2- a- Déterminer l'expression de la capacité équivalente C_e entre les points A et B

b- Calculer la valeur de la capacité équivalente C_e.

3- En déduire l'expression de la charge Q du condensateur équivalent.

4- Quelle est la relation entre Q_1, Q_2, Q_3 et Q.

5- Calculer l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur équivalent.

Correction de l'exercice N°4

1°/ $Q_1 = C_1(V_A - V_B) = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 5 = 25\ 10^{-6} C = 25\ \mu C$

$Q_2 = C_2(V_A - V_B) = 50 \cdot 10^{-6} C = 50\ \mu C$

$Q_3 = C_3(V_A - V_B) = 75 \cdot 10^{-6} C = 75\ \mu C$.

2°/ a] $C_{équi} = C_e = C_1 + C_2 + C_3$

b] $C_e = 30\ \mu F$

3°/ la charge du condensateur : $Q = C_e(V_A - V_B) = (C_1 + C_2 + C_3)(V_A - V_B)$

$Q = (C_1 + C_2 + C_3)(V_A - V_B)$.

4°/ $\boxed{Q = Q_1 + Q_2 + Q_3}$ relation entre les charges.

5°/ L'énergie du condensateur : $W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_e} = \frac{1}{2} C_e (V_A - V_B)^2$

$W_e = \frac{1}{2} Q (V_A - V_B)$

$\Rightarrow \boxed{W_e = 375 \cdot 10^{-6} J}$