Mécanique quantique – SMC (2014 – 2015)

Série N° 3

Exercice N° 1 : Ondes de De Broglie

Calculer la longueur d'onde de De Broglie associée à :

- 1- Une balle de fusil de masse 1 g et de vitesse 500 m/s.
- 2- Un grain de poussière de masse 10^{-15} kg et de vitesse 1 mm/s.
- 3- Un neutron thermique ayant une vitesse correspondant à l'énergie moyenne d'agitation thermique à la température ambiante $T = 300\text{K}$.
- 4- Un électron accéléré sous une différence de potentiel $U = 100\text{V}$.
- 5- Un électron dans l'atome d'hélium ayant une énergie cinétique de 24.6 eV correspondant à l'énergie d'ionisation de l'hélium.
- 6- Une particule α (noyau d'hélium) ayant une énergie cinétique de 7.7 MeV.

Examiner dans chaque cas l'opportunité de considérer ou non les propriétés ondulatoires de la matière.

Exercice N° 2 : Neutron thermique

Un neutron thermique est un neutron en équilibre thermique avec la matière à une température donnée (généralement quelques centaines de K).

Nous admettons que l'énergie cinétique moyenne d'une entité (une molécule) de gaz parfait à la température absolue T est : $E_{C,moy} = \frac{3}{2} k_B T$

$k_B = 1,382 \cdot 10^{-23}$ S.I. est la constante de Boltzmann, $k_B = R/N_A$ où R est la constante des gaz parfaits et N_A est le nombre d'Avogadro).

Quelle est la longueur d'onde λ de De Broglie, associée à un neutron thermique à une température $\theta = 25^\circ\text{C} = 298\text{K}$?

Exercice N° 3 : Vitesse de propagation de l'onde de de Broglie

Une particule de masse m se déplace à la vitesse v très inférieure à la vitesse de la lumière. Elle n'est soumise à aucune force ; donc son énergie ϵ se réduit à son énergie cinétique. On souhaite trouver la vitesse de propagation de l'onde de de Broglie.

- 1) Exprimer le vecteur d'onde k_{DB} de l'onde de de Broglie en fonction de m et v .
- 2) En admettant que la relation de Planck-Einstein reliant l'énergie du photon à sa pulsation est aussi valable pour la particule, exprimer ω_{DB} en fonction de m , v et h .
- 3) En déduire la vitesse de propagation de l'onde de de Broglie, appelée « vitesse de phase » et notée v_ϕ (alors que la vitesse de la particule est appelée « vitesse de groupe »).

Exercice N° 3 : Probabilité de localisation d'un atome

Un atome en interaction avec un puits d'énergie potentielle infiniment profond de largeur $L = 2\text{ nm}$, se trouve dans un état stationnaire d'énergie ϵ . On admet que sa fonction d'onde $\psi(x, t)$ est de la forme : $\psi(x, t) = \psi(x) \cdot \exp(-i\omega t)$.

L'amplitude complexe $\psi(x)$ de la fonction d'onde de probabilité, associée à son état est choisie réelle :

$$\psi(x, t) = \begin{cases} A \sin(3\pi \frac{x}{L}) & \text{pour } 0 < x < L \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- 1) Représenter graphiquement $\psi(x)$ et $\psi^2(x)$.
- 2) Comment s'exprime la probabilité de trouver l'objet quantique entre x et $x+dx$? Quelle est la probabilité de trouver l'objet quantique entre $x = 0$ et $x = L$? entre les abscisses $x = 0$ et $x=L/3$?
- 3) En déduire la constante A en précisant son unité ainsi que la fonction d'onde $\psi(x, t)$.
- 4) Comment se comporterait une particule classique qui se trouverait dans un puits de potentiel infini?

Exercice N° 4 : Principe d'incertitude de Heisenberg

Le but de cet exercice est d'estimer l'énergie cinétique d'un électron (dont $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$) si on pouvait le confiner dans un noyau de rayon $r \approx 1.0 \times 10^{-14} \text{ m}$.

A- En prenant Δx égal au rayon du noyau, quelle est l'incertitude sur la quantité de mouvement de l'électron, en eV/c ? ($\hbar = 6.582 \times 10^{-16} \text{ eV.s}$)

B- Supposez que la quantité de mouvement d'un électron confiné dans ce noyau soit égale à votre réponse en partie A. En comparant pc avec $m_e c^2$, est-ce que l'électron serait relativiste ou non-relativiste?

C- Quelle est l'énergie relativiste de l'électron, en MeV ?

D- Quelle est l'énergie cinétique relativiste, en MeV ?

Exercice N° 5 : Fonctions d'onde

Partie I : Fonctions d'onde associée à une onde progressive

La fonction d'onde associée à une onde progressive peut s'écrire :

$$\psi(x, t) = \phi(x)e^{-i\omega t} = Ae^{\pm ikx} e^{-i\omega t}$$

avec $\phi(x) = Ae^{\pm ikx}$ la partie spatiale (ou amplitude complexe).

1- donner le sens de propagation des ondes :

$$\psi_1(x, t) = Ae^{+ikx} e^{-i\omega t} \quad \text{ou} \quad \psi_2(x, t) = Ae^{-ikx} e^{-i\omega t}$$

2- Soit la fonction d'onde associée à une particule libre de la forme :

$$\psi_a(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad \text{ou} \quad \psi_b(x, t) = Ae^{-i(kx - \omega t)}$$

Dans quel sens chacune de ces ondes se propagent-elles ? Laquelle est compatible avec

l'équation de Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t)\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$?

Partie II Fonction d'onde - Probabilité de présence - valeurs moyennes

La fonction d'onde d'une particule ponctuelle est donnée par :

$$\psi(x, 0) = \phi(x) = A(e^{i\frac{\pi x}{a}} + 1) \quad \text{pour} \quad -a < x < a \quad \text{et} \quad \Phi(x) = 0 \text{ ailleurs.}$$

1- Calculer $\|A\|$ pour que la fonction $\Phi(x)$ soit normée. Rappeler la raison physique de la normalisation.

Indication: $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos u$

2- Dessiner $\|\phi(x)\|^2$ Sans faire de calcul d'écart quadratique moyen, évaluer la dispersion Δx de la position de la particule.

3- Quelle est la probabilité P_1 de trouver la particule entre les deux points d'abscisses respectives 0 et $a/2$ lors d'une mesure de position effectuée à l'instant $t=0$.